Ying, J. M., Huang, J. W., & Su, Y. W. (2015).
An Exploratory Study on Influences of a Mathematical Culture Course on University Students' Mathematics Beliefs – the Case in a Medical University.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *2*(2), 1-24.
doi: 10.6278/tjme.20151001.001

An Exploratory Study on Influences of a Mathematical Culture Course on University Students' Mathematics Beliefs – the Case in a Medical University

Jia-Ming Ying[1] Jyun-Wei Huang[2] Yi-Wen Su[3]
[1]College of Humanities and Social Science, Taipei Medical University
[2]Department of Mathematics, National Taiwan Normal University
[3]Department of Mathematics, University of Taipei

In this paper, we present an exploratory study on how a liberal-arts course about the culture and history of mathematics influenced the mathematics beliefs of medical university students in Taiwan. This study used a single-group pretest-posttest design. The research tools of this study included: (1) a liberal-arts mathematics course with an emphasis on history and culture, and (2) a 20-question Likert-scale questionnaire used in the pre-test and the post-test. The questions were separated into two dimensions, aiming to investigate students' beliefs about the nature and values of mathematics. A total of 100 students took the pre-test, participated in the teaching experiment, and finally took the post-test. In the teaching experiment course, titled "Mathematical Thinking in the Multicultural Contexts", students were exposed to mathematical topics presented in their historical contexts. There were also examples of distinct approaches to similar problems by scholars in different civilisations, such as comparing Liu Hui's work and Euclid's *Elements*. Students were also required to make artistic creations related to mathematics. The results showed that part of the students' beliefs did change. In the dimension of the nature of mathematics, after taking the course, the students were more prone to believe that "generalisation" was a method of thinking in mathematics; however, the results also revealed that the course did not clarify the difference between the "context of justification" and the "context of discovery" for students. As for the values of mathematics, students were more prone to believe that "sensibility to beauty" and "creativity" were important values of mathematics.

Keywords: HPM, liberal arts, mathematics beliefs, medical university students.

Corresponding author：Jia-Ming Ying，e-mail：j.m.ying@tmu.edu.tw
Received：7 December 2014;
Accepted：1 October 2015.

英家銘、黃俊瑋、蘇意雯（2015）。
數學文化通識課程對大學生數學信念之影響初探—以醫學大學為例。
臺灣數學教育期刊，2（2），1-24。
doi: 10.6278/tjme.20151001.001

數學文化通識課程對大學生數學信念之影響初探—以醫學大學為例

英家銘 [1]　　黃俊瑋 [2]　蘇意雯 [3]

[1] 臺北醫學大學人文暨社會科學院

[2] 國立臺灣師範大學數學系

[3] 臺北市立大學數學系

本篇論文旨在描述作者對於一數學文化通識課程如何影響醫學大學學生數學信念之初探。本篇論文敘述的研究使用單一群體前後測的實驗設計，其研究工具包含（1）一門關於數學史與數學文化的大學數學通識課程，以及（2）一份包含 20 個問題的 Likert-scale 數學信念問卷。問卷的內容包含兩個向度：數學本質與數學價值。共有 100 位同學修課並同時參與前後測。教學實驗進行的課程名稱為「多元文化中的數學思維」。課程中學生會接觸到不同文化與歷史場景中的數學知識。學生也會看到古文明中對類似問題的相異解法，例如比較東亞的劉徽對錐體體積的研究與古希臘歐幾理德《幾何原本》中相關命題的證明。學生在課程中也被要求將數學元素融入他們的藝術創作作業中。研究結果顯示，學生部分的數學信念確實有改變。在數學本質向度上，學生更傾向同意「一般化」是數學思考的方法之一。然而，結果也顯示這門課程並沒有幫學生釐清「核證的脈絡」與「發現的脈絡」。至於在數學價值的向度上，學生更傾向同意「數學培養創造力」，以及「數學培養美感」這兩項的價值。

關鍵詞：數學史與數學教學、通識教育、數學信念、醫學大學學生

通訊作者：英家銘，e-mail：j.m.ying@tmu.edu.tw
收稿：2014 年 11 月 7 日；
接受刊登：2015 年 10 月 1 日。

I. Introduction

In Taiwan, medical practitioners—physicians, dentists, pharmacists, etc—usually have high socio-economic statuses, and are generally well-respected in Taiwan. The reason, beside their above-average income, lies in history. In Japanese colonial times, before WWII, Taiwanese people were rarely allowed to study social sciences at Taipei Imperial University (which was the only institution of advanced studies in Taiwan before 1945, and was re-named National Taiwan University after the war), so most of the wealthiest, best and brightest mostly went to its medical school. Moreover, medical doctors not only practised medicine but some also became leaders of social movements during the Japanese colonial period. As a result, medical practitioners nowadays often have greater influences on Taiwanese people.

Medical doctors' long-standing high socio-economic status and the respect they receive are certainly reasons for some high school students in modern-day Taiwan to study hard and try to get into medical school. Therefore, medical students are usually high performers in many subjects, including mathematics. However, as far as the authors of this paper can observe, mathematics education in medical schools in Taiwan does not make use of their advantages well. Medical students usually have to study only very basic calculus and some bio-statistics, and that is all they learn about mathematics in their training. The philosophy behind this is that, unlike science or engineering students, medical students will not need so much mathematics when they practise medicine in the future. The message sent to medical students, and in turn the message those future doctors may send to the general public in Taiwan, is that mathematics is only there to solve problems, and nothing more.

Problem-solving is certainly one very important reason for anyone to study mathematics, but as most mathematics educators would agree, the discipline may also improve a person's abilities related to conjecture, induction, deduction, abstraction, specialisation and generalisation. Moreover, mathematics is a cultural phenomenon related to histories and philosophies of different civilisations across the face of the earth. Mathematics is not only a science, but also belongs to the humanities. If the personal observation of one of the authors of this paper bears any significance, it would seem that medial university students are more than capable of appreciating the humanistic value of, for instance, music and philosophy, but for science and mathematics, applications and problem-solving are the only value for them. Therefore, if some course in a medical school can change students' beliefs about mathematics, then in the long run medical practitioners may influence the people of Taiwan in regard to the other values of mathematics. Also, many medical doctors in Taiwan's modern history have pursued a political career and become high-profile politicians, so changing the mathematics-related beliefs of medical students might also change the beliefs of some future policy makers. Indeed, what constitutes "good science" or "good mathematics" has often been influenced by politics, as evidenced by many cases in history, such as the competition among several cosmic models during the time of the scientific revolution in Europe (Kuhn, 2003), or the debate between logical and intuitive approaches of Euclidean geometry during Emperor Kangxi's reign in China (Jami, 2012).

Besides, before the beginning of this study, there have been very few studies that discuss mathematical culture courses for non-mathematics majors at the university level. Under these rationales, the main aim of this study was to explore how medical university students' mathematics beliefs changed after taking a liberal arts course in mathematics with an emphasis on the cultural and historical dimensions of mathematics. The authors especially wanted to explore how this course changed medical university students' beliefs about the nature and values of mathematics. In the following, we shall discuss related literature, and then describe the research setting and results we have found.

II. Literature Review

1. The nature and values of mathematics

As mentioned in the previous section, the authors wanted to explore students' beliefs about the nature and values of mathematics. Although it is clear that students might have different beliefs about the values of mathematics, one thing that may need to be clarified is what we mean by the "nature" of mathematics in this paper. When one reads that the authors intend to discuss students' beliefs about the "nature" of mathematics, she might assume that the authors take a Platonic stance to mathematics. Indeed, Plato's realism claims that geometrical objects exist in the "world of being," and the propositions of geometry are objectively true or false, independent of the mind and language of mathematicians (Shapiro, 2000, p. 53). Thus, in Plato's universe mathematical objects do exist and certainly have a nature. However, one can still discuss the nature of mathematics if she takes the stance of, for instance, formalism. One formalist view of mathematics likens the practice of mathematics to a game played with linguistic characters. A radical version of this view asserts outright that the symbols are meaningless (Shapiro, 2000, p. 144). In this view, the nature of mathematics could be seen as mere verbal games. Also, intuitionists' accounts of the nature of mathematics are that it is idealised mental construction (Shapiro, 2000, p. 178). One can even take social constructivists at their word and believe that mathematics is somehow socially constructed (Ernest, 1991, p. 85). Imre Lakatos preached that mathematics, like natural sciences, was fallible, not indubitable; it too grew by the criticism and correction of theories which were never entirely free of ambiguity or the possibility of error (Davis & Hersh, 1987, p. 347). In this view, the nature of mathematics can be seen as a kind of consensus formed after dialogues among individuals and in society. As the reader can see, non-Platonic views of mathematics also discuss the ontology, or nature, of mathematics.

That being clarified, this study did not intend specifically to categorise the medical university students' philosophical stances towards the ontology of mathematics. We simply wanted to see how they thought about "what mathematics is" and how much they agreed with items that described the nature and values of mathematics.

The second dimension of beliefs the authors wanted to explore, as already raised in the last paragraph, is about the "values" of mathematics. This is a dimension that is not completely identical to the "nature" of mathematics. If the nature of mathematics can be briefly described as "what mathematics is," then a simple way of describing the values of mathematics is "what mathematics can do for us." Those who hold an instrumentalist view of mathematics might argue that mathematics is an accumulation of facts, rules, and skills to be used in the pursuance of some external end. Thus mathematics is a set of unrelated but utilitarian rules and facts (Ernest, 1994). In this view, the nature of mathematics is necessarily dependent on its applications, and hence the values of mathematics. However, as the reader can easily see that, in many cases, whether one believes that a mathematical entity (such as a right-angled triangle) exists in the Platonic realm of ideals, in human intuition, or in the collection of social constructions, it can pretty much have the same applications (such as measurement by trigonometry). Therefore, the authors of this paper maintained a more cautious stance and treated the nature and values of mathematics as different, though not entirely unrelated, dimensions of mathematics-related beliefs when we did our research and designed the questionnaire (see below in Research Setting).

2. Mathematics beliefs and learning

The authors are aware that, in the field of mathematics education, there are many variations on the concept of belief and belief system, some of whose definitions do not make a clear distinction between belief and those of conception and knowledge (Furinghetti & Pehkonen, 2002). In this paper, we have decided to follow a broad and intuitive working definition of students' mathematics-related beliefs raised in (Op ‘t Eynde, De Corte, & Verschaffel, 2002):

> Students’ mathematics-related beliefs are the implicitly or explicitly held subjective conceptions students hold to be true, that influence their mathematical learning and problem solving. (p. 16)

Therefore, according to this broad definition, what we mean in this paper by students’ mathematics-related beliefs is their subjective conception of mathematics that may or may not coincide with objective knowledge. They can include but are not limited to students’ prejudice and misconceptions. Students’ mathematics-related beliefs can also include their simple opinions, results of reflections, impressions, deep or superficial feelings, and knowledge without demonstration.

Many studies suggest that students’ beliefs about the nature of mathematics can influence their mathematical learning. According to Schoenfeld’s observation of high school and university students, one’s mathematical worldview shapes the way one does mathematics, and belief systems are one’s mathematical worldview (Schoenfeld, 1985). He also holds that mistaken beliefs about mathematics not only cause students’ conflicting epistemological beliefs about mathematics, but also have negative influences on students’ academic achievements. (Schoenfeld, 1992; 1994). Therefore, he strongly suggests that teachers and educators help students develop appropriate mathematics beliefs. Schoenfeld’s findings resonate with many other studies. Stage and Kloosterman (1991) find that university students with lower achievements in mathematics usually have poorer understanding about the nature of mathematics. Cifarelli and Goodson-Espy (2001) point out that the university students’ epistemological beliefs about mathematics do affect their mathematical learning.

In their paper, Op ‘t Eynde et al. (2002), after reviewing several important twentieth-century publications about mathematics beliefs, also propose a framework for students’ mathematics-related beliefs. In this framework mathematics-related beliefs are described in students’ class context, and are divided into three categories: beliefs about mathematics education (mathematics as a subject, learning and problem-solving, and teaching in general), beliefs about self (self-efficacy, control, task value, and goal-orientation), and beliefs about the social context (the role and functioning of the teacher and the student, and the social-mathematical norms in the classroom, e.g., what counts as a good solution?).

In Taiwan’s local studies, some researchers have also shifted their interests to the field of beliefs. Tang (2009) discusses, among other topics, the beliefs of mathematics intern teachers and their relations to their teaching performances. Wang and Chin (2007) investigate the ways mentors intervene in the mathematics teaching of practice teachers, and the principles and underlying beliefs for their interventions.

Some studies have been done on the social or psychological factors of mathematics teaching and learning in primary and secondary schools in Taiwan, but usually the focuses are on attitudes and anxieties about mathematics. For instance, Wu and Ge (2006) find that students who have success attribution, lower mathematics anxiety, or positive mathematics attitudes, would have higher mathematics achievement, while students who have failure attribution, higher mathematics anxiety, and passive mathematics attitudes, would have lower mathematics achievement. For secondary school students, some studies do address directly to their mathematics beliefs. For vocational high school students, they often believe that mathematics merely consists of numbers, symbols, calculations, and formulae. In other words, it is a group of facts, procedures, and tools. They also believe that learning mathematics requires talent, and that mathematics can be used in real life (Ke, 2013). Another study shows that high school students in Taiwan who have decided to study science, engineering, or medicine believe that mental exercises and professional necessities are the most important values of mathematics, but still they do not really see how high school mathematics can be applied in real life (Chou, 1999). This study also tells us that, even at the end of the 20th century, when senior high school and university education in Taiwan were more or less focused not on the general public but on the elites, students believed that the main values of mathematics were about application, and its humanistic values were not considered. Some of those students who aimed to study science or medicine would actually become medical practitioners, so it is reasonable to believe that they still hold the same beliefs, if they have had no chances to be exposed to the humanistic side of mathematics in their tertiary-level education.

Although there are already some studies about beliefs in primary and secondary mathematics education, very few studies focus on Taiwanese tertiary students' mathematics beliefs. One important work, (Liu, 2007), shall be discussed in the next sub-section. In another study, Hong (2009) explores gender issues among students in universities of technology. In her work, she concludes that the stereotype that mathematics teaching environments unsuitable for female students would lower their willingness to pursue mathematics-related professional development. This is also a case in which culture affects mathematics beliefs and behaviour.

From the aforementioned literature review, we can see that belief was a hidden variable in mathematics education throughout the previous decade (Leder, Pehkonen, & Törner, 2002), but since then researchers have paid more and more attentions to the research of mathematics beliefs in different levels of mathematics teaching and learning. This paper also aims to enrich research in this area, through investigating the effects of a course in mathematics with an emphasis on the cultural and historical dimensions.

3. Mathematics learning and history of mathematics as a form of mathematical culture

The title of this paper contains the term "mathematical culture", by which the authors broadly mean any aspect of human creation that is related to the academic field we now refer to as "mathematics," such as logical thinking, or the applications of mathematical methods in architecture, art, astronomy, or business. The reason the authors hold this broad view is that there has always been a "humanist" trend in mathematics, in which philosophers, such as Aristotle, John Locke, David Hume, John Stuart Mill, and many others, saw mathematics as a human creation (Hersh, 1997, p. 183). These philosophers applied mathematics to many aspects of human society, such as science, art, and critical thinking. Practical, scientific, aesthetic, and philosophical interests have all shaped mathematics, which in turn has moulded modern culture (Kline, 1953). There is an abundance of instances of mathematical culture in human history, including how philosophers discussed Nature, and how ancient people solved real-world problems with mathematics. It is widely accepted that modern mathematics has a "cultural basis" (e.g., Wilder, 1950), and scholars believe that history can be used as a "crossroad" of mathematical culture and mathematics teaching (Furinghetti & Paola, 2003). Therefore, the authors of this paper also wanted to use the history of mathematics to design a mathematical culture course.

What can the history of mathematics do for mathematics teaching and learning? There are many answers. Furinghetti and Paola (2003) believe it can stimulate students' interests in mathematics. Tzanakis and Arcavi (2000) propose that using history in mathematics teaching helps learning, and it gives teachers a chance to have an alternative view on the nature and development of mathematical activities. Teachers may learn to appreciate mathematics as a cultural phenomenon. Through different solutions to the same problem in different times and places, students can also appreciate the evolution of mathematical knowledge (Horng, 2000).

In Taiwan's local research and education practices, the integration of certain historical topics of into mathematics teaching, learning, and teacher education has been advocated since the 1980s (e.g., Horng, 1984), and many primary and secondary school teachers have been trying to use history to assist their teaching, many using worksheets and pre-modern texts as tools (Su, 2007; Tsai & Su, 2009). Animation, storytelling, and theatrical performances are more recent practices mainly used in primary schools (Su, 2011). For secondary school mathematics, under the guidance of the research of HPM (relations between History and Pedagogy of Mathematics), it is possible for the teacher or students to have a certain level of liberation in the knowledge content of the textbook, to untie or overthrow the more conventional aspects of the textbook (Horng & Su, 2007). There is also evidence that reading pre-modern mathematical texts and reflections improves in-service teachers' pedagogical content knowledge (Su & Ying, 2014).

Meanwhile, Liu (2003) proposes several reasons to use the history of mathematics in school curricula. They include: (1) history can help to increase motivation and to develop a positive attitude towards learning; (2) historical problems can help develop students; mathematical thinking; (3) history reveals the humanistic facets of mathematical knowledge; (4) history gives teachers a guide for teaching.

Most of the studies tell us that history of mathematics can show students how mathematical knowledge developed and evolved, and help them appreciate mathematics as cultural activities created by different peoples. However, these studies into the influence of history on students' learning and beliefs, whether local or international, mainly focus on school mathematics. Very few studies explore university teaching and learning. Liu (2007) is one of very few papers that addresses directly the issue of the influence of history on university students' beliefs about mathematics. This study describes a history-oriented calculus course and the development of the views of mathematics held by students' in that course. Its results indicate that most of the students considered mathematics thinking to be the processes involved in calculation and formulae at the very beginning, nonetheless expressing different viewpoints after finishing the course. They attempted to connect the context of mathematicians' problem solving with the characteristics of mathematics thinking. Although students strongly held a consistent instrumentalist view of mathematics, at the end of the course they were more likely to recognise mathematics as the continuity and inheritance of knowledge and the role of mathematicians in its development. Furthermore, this study also emphasises the importance of students' understanding of the nature of mathematics. Kjeldsen (2011) shows that using history as a means to teach university students differential equations helps them understand the special nature of mathematical thinking, and the idea that mathematics and physics closely interact with each other. However, among the few studies about the relations between history and university students' beliefs about mathematics, none of them studies students in medical universities. Two of the abovementioned studies, (Liu, 2007) and

(Hong, 2009), address cases of universities of technology in Taiwan, but other than that, it would seem that the mathematics belief system held by students in non-comprehensive universities in Taiwan is still an open problem. Knowing the possible advantages of the history of mathematics and the current status of research, with the rationale introduced in the beginning of this paper, it should be easy for the reader to see why the authors of this paper wanted to devise a university mathematics course with an emphasis on the cultural and historical dimensions of mathematics, and to investigate whether it could change the stereotypical beliefs about mathematics that might be held by students in medical universities.

III. Research Setting

This study used a single-group pretest-posttest design. The research tools of this study included a liberal-arts mathematics course with an emphasis on the history and culture of the discipline, and a questionnaire used in the pre-test and the post-test. The same group of students took the pre-test, participated in the teaching experiment, and finally took the post-test. A total of 131 students took the course, and they were separated into two classes. One of the authors was the lecturer in the teaching experiment of both classes. In what follows we shall describe the research setting in detail.

1. Subjects

The subjects of this study were students at a medical university in Taiwan. These students took an elective liberal-arts course about mathematics in the second semester of Taiwan’s 2012-13school year (February to June 2013) that was designed to be the teaching experiment in this study. Students in this course consisted of students in all twelve undergraduate schools and departments of this medical university. Their majors were medicine, dentistry, pharmacy, nursing, public health, and other related disciplines (the professional training for medicine and dentistry are undergraduate programs in Taiwan, but it takes longer time for students to earn a degree; a degree in medicine usually takes six to seven years to complete, while that in dentistry usually takes six years). Most of the 131 students in the course were in their first or second year in university, although a few students were in their third or higher years.

2. Research tools

(1) Mathematics beliefs of the authors and the lecturer

As one of the authors was also the lecturer of the teaching experiment, the mathematics beliefs of the authors, and especially those of the lecturer, might or might not have influenced the results of the experiment. Therefore, it may be necessary to describe the beliefs held by the authors of this paper. As mentioned earlier, this study was not specifically intended to categorise the students' particular philosophical stances, and the authors tried not to hold a clear assumption about the ontology of mathematics. Interestingly, on the one hand, many of the greatest mathematicians in history have firmly taken a Platonic stance, most notably from Euclid in the Hellenistic period to Kurt Gödel in the modern era (Lloyd, 1975; Parsons, 1995), while, on the other hand, some historians, sociologists, and educators of mathematics tend to emphasise on the social and cultural dependence of mathematics (e.g., Ernest, 1991; Jami & Han, 2003). So arguing for or against any particular stance would be just as easy (or as difficult) as any other. In fact, some scholars even argue that a working mathematician might hold seemingly contradicting beliefs about the nature of mathematics for different purposes (Davis & Hersh, 1987, p. 321). For the authors of this paper, our training and backgrounds are closer to those of historians and educators than pure mathematicians, so we lean more to the side of intuitionism and social constructivism on the spectrum of the ontology of mathematics, although the lecturer did not specifically argue for or against any ontological stance in class.

(2) The teaching experiment

The course used as the teaching experiment, titled "Mathematical Thinking in the Multicultural Contexts", was taught during a seventeen-week semester, with two hours of class time each week. This course tried to introduce to students the mathematical activities in several pre-modern and early-modern civilisations. Students were exposed to mathematical topics that they had learned before but presented in historical context, some topics of advanced mathematics they might not have seen in high school, and some applications of mathematics in different societies. There were also examples to distinct solutions to the same problems by mathematicians in different civilisations, such as comparing how Liu Hui (3rd-century China) and Euclid's *Elements* discussed the volume of a pyramid. There was also a mid-term project that had the students create an art work with some mathematical concepts in it. The reader may refer to the appendix for the syllabus of this course.

In what follows, we shall use weeks 6 to 8, 11, 14, 15, and 17 to show how this course was taught and how students learned in it.

In weeks 6 and 7, the main theme was to show that in different ancient civilisations, they tackled similar problems with distinct approaches. The protagonist in East Asia was Liu Hui in the 3rd century, and his works were compared with those of Euclid and Archimedes. The mathematical contents involved were the arguments for the area of the circle and the volume of the pyramid. For both cases, Liu Hui used methods of limits and infinitesimals to argue for his formulae in his commentary on the *Nine Chapters* (the *Nine Chapters of Mathematical Art*, or *Jiuzhang suanshu*, was considered one of the most important mathematical canons and the paradigm for the learned practice of mathematics in pre-modern China; the reader may refer to, for instance, [Chemla & Guo (2004)] for a detailed translation and analysis of the text). In the case of the circle, Liu Hui argued that if one "cut" the circle—that is, constructed inscribed regular polygons—in certain ways, the areas of the inscribed polygons would always equal "half-circumference multiplied by half-diameter." And if one continued to cut until one could not cut any more, then the inscribed polygons would coincide with the circle, and the area formula of the circle was just the same as those of the inscribed polygons. Similarly for the pyramid, Liu Hui argued that if one dissected the pyramid in certain ways, rearranged some solids and dissected the rest, and then continued the process in an infinite manner, one would reach the conclusion that the volume of a pyramid was one third of the cuboid with the same length, width and height. However, for both cases, the Greek mathematicians used reductio ad absurdum to prove the same results. The reason they did not use methods of limits and infinitesimals is very likely due to the fact that Greek philosophers avoided talking about "infinity" for it might lead to logical paradoxes. The point in weeks 6 and 7 was to show the students that due to different cultural backgrounds, mathematicians used distinct approaches for the same problems. Ancient East Asian scholars used more intuitive approaches, while the Greeks, for logical consistencies, avoided arguments about infinity and used finite steps with reduction to absurdity to reach the same result.

In week 8, the point was also about contrast. The diagrams in Greek mathematics, due to the influence of Platonic philosophy, are always "static." The focus of the diagrams in propositions in Euclid's *Elements* is on their structures. A mathematician would refer to different components of the diagrams to prove the wanted results. The focus of the diagrams in East Asian texts is not the diagrams themselves, but the transformations of the diagrams. For instance, one would transform an original diagram of a triangle into that of a rectangle to show the area formula of a triangle. As the reader can see, in weeks 6 to 8, students were exposed to different patterns of mathematical thinking. They could, in the process, learn to appreciate different approaches of thinking.

In week 11, students were asked to present their artistic creations related to mathematics. At first glance, one might wonder why a task about the arts was put into this course of mathematical culture. The reason was because the arts—we use the term in a broad sense that includes visual arts, performance arts, literature, music, etc—have always been one of the many domains of life that implicitly make use of mathematics, and by creating artistic works, students might feel how mathematics were applied in different aspects of human cultures. In the reality of the course, the authors must admit that not all of the students made very interesting creations. However, some students successfully brought enough mathematical and artistic elements into their works. For instance, some students wrote mathematical novels. Some created suspense stories in which the readers/viewers had to use their mathematical knowledge to crack puzzles. Some invented board games that required mathematics to win. Through this process, they could feel that mathematics could be linked to artistic creations. The grading of this task could also link students' aesthetic experience to mathematics. The grade for each artistic creation was given by both the lecturer and students. When students graded others' works, they had to consciously look for mathematical elements in the creation, and consider if they fit their own standard of "beauty." In this way, students learned to appreciate art through glasses of mathematics.

In weeks 14 and 15, the lecturer talked about calendrical astronomy and how several of our calendars were created in different cultural backgrounds. Behind the fascinating stories was the intent of the lecturer to show students that mathematics could and actually did solve problems about the real world, and the results—the calendars—were deeply embedded in our cultures.

In week 17, the final written examination was mainly about the historical and mathematical knowledge they learned in class. For each question, students had to give their answers and explain how they reached this answer. That means they often had to give background information in addition to mathematical arguments. Students were allowed to bring hardcopy or electronic references to the examination. So they did not need to memorise most of the factual knowledge, but they would have to understand the logic and arguments used by pre-modern mathematicians to get good grades in the examination. Beside this kind of questions that tested students' knowledge about the history of mathematics, there was also the final question, called the "reflexive question" by the authors, which asked if students could give an example of the same problem being tackled in distinct manners by both European and East Asian mathematicians, and if they could use this as an example to show the differences between the two civilisations. This was not an easy question, but some students managed to present good examples and arguments. And although, strictly speaking, this question could not be regarded as a qualitative question directly about mathematics-related beliefs, the students' answers could still serve as circumstantial evidence when the authors analysed the results of the quantitative questionnaire introduced in the next sub-section.

(3) The questionnaire

The questionnaire used in the pre-test and post-test consisted of 20 Likert-scale questions, each of which was a declarative sentence about mathematics. The responses from which students could choose for each statement formed a set of typical seven-level Likert items: "strongly agree," "agree," "slightly agree," "neither agree nor disagree," "slightly disagree," "disagree," and "strongly disagree." For each question, the student had to choose one and only one item from the seven. Students' responses were then transformed into scores for analysis, with the highest score of 7 for "strongly agree," 6 for "agree," 5 for "slightly agree," 4 for "neither agree nor disagree," 3 for "slightly disagree," 2 for "disagree," and the lowest score of 1 for "strongly disagree." The questions in the pre-test and the post-test were identical, so we could see the changes in students' beliefs.

As mentioned before, Op 't Eynde et al. (2002) discuss a useful framework for mathematics-related beliefs. However, since it mainly deals with primary and secondary school students, we believe it was necessary for us to modify it according to our purposes. In this tertiary-level course for our teaching experiment, the intellectual history played as important a role as the social history and culture of mathematics, so we believed that the structure for our questionnaire must address the (intellectual) nature of mathematics at least as much as the (social and personal) values of mathematics. Therefore, before the teaching experiment began, the authors divided the questionnaire into two dimensions (nature and values), and devised questions accordingly.

During the developmental period, the questionnaire was examined by three external experts whose respective expertise was in beliefs and affects, curriculum, and HPM in order to ensure the validity of the questions in the questionnaire. One of the external experts, whose specialty was in curriculum, was invited to join the authors' discussions and offer comments when we were developing the course and the questionnaire. After the first version of the questionnaire was finished, it was sent to the other two experts for review. We told them about the items of the questionnaire and what we really wanted to inquire about students' beliefs, and they gave us comments about how we could change our wording so it would be easier for students to understand. We later changed many words usages and expressions, so that what students would read was closer to what the authors would like to inquire about and to the contents of the course. For instance, we wanted to see if students believed that exemplification justified a mathematical proposition, and the original statement was "By checking a large number of examples one can justify mathematical knowledge." One of the external experts told us that this sentence was vague and suggested changes. Eventually the statement was modified to become "If an assumption in mathematics fits most situations, then it is justified".

Finally, the design of the questionnaire was finished. Table 1 shows the structure of our questionnaire, in which questions were separated into two dimensions of beliefs—the "nature of mathematics" and the "values of mathematics"—each of which contained 10 questions. The statement mentioned at the end of the previous paragraph is question 17 in Table 1.

Table 1

The Structure of the Questionnaire

Dimensions	Questions
Nature of mathematics	1. Mathematics is a discipline described with symbols. 3. Mathematics is a discipline composed of procedures and formulae. 5. Mathematics is a discipline that finds general principles from individual facts. 7. The general principles found in mathematical research can be applied to all kinds of situations that fit the conditions of the principles. 9. Mathematics is a discipline that constructs common models from complex phenomena in reality. 11. Results calculated with mathematics can accurately explain many phenomena. 13. Mathematics is a rigorous and logical discipline. 15. Proof is the only method that justifies mathematical knowledge. 17. If an assumption in mathematics fits most situations, then it is justified. 19. Mathematics is objective truth.

(continued)

Table 1 (continued)

Dimensions	Questions
Values of mathematics	2. The research results of mathematics can help human beings describe phenomena of the real world.
	4. The research results of mathematics can be used as tools to solve problems in other fields of study.
	6. Learning mathematics can help us solve problems encountered in daily lives.
	8. Learning mathematics can cultivate our logic and reasoning.
	10. Learning mathematics can cultivate our creativity.
	12. Learning mathematics can cultivate our observing ability.
	14. Learning mathematics can increase our knowledge.
	16. Learning mathematics can elevate our ability to judge things around us.
	18. Learning mathematics can improve our sensibility to beauty.
	20. Learning mathematics is helpful to our career development.

Since questions in the same dimensions have similar wordings, we gave them an iterated order—odd-numbered questions for the nature of mathematics and even-numbered ones for the values of mathematics—to reduce the disturbance that the wordings might have caused. In the next section, we will discuss the findings of our study seen in the questionnaire.

IV. Results

After deleting the samples with missing values and invalid questionnaires, we collected 112 valid questionnaires in the pre-test and 121 questionnaires in the post-test. However, since this was a elective course, there were some changes in participating students between the beginning and the end of the course. Since we needed to compare students' scores between pre-test and post-test, we excluded the data of those students who only took one of the two tests. Eventually, there were exactly 100 students who participated in both the pre-test and post-test. The average score of each question in each test was computed and recorded. We used Paired-Samples T Test (α = 0.05) to compare the averages of two paired samples that contain these 100 students. We found several interesting results, some of which are discussed below. The reader may refer to Table 2 in the following discussions (the *p*-values less than .05 are marked with a "*").

Table 2

Average Scores and Standard Deviations of Questions in the Pre-test and the Post-test (N = 100)

Question number	Pre-test *M*	Pre-test *SD*	Post-test *M*	Post-test *SD*	*t*	*p*-value	*95%* CI *LL*	*95%* CI *UL*	effect size
1	5.48	1.01	5.39	1.24	0.736	.464	-0.15	0.34	0.15
2	5.39	1.10	5.90	0.79	-4.164***	.000	-0.75	-0.26	-0.83
3	5.18	1.23	5.21	1.21	-0.245	.807	-0.28	0.22	-0.05
4	6.40	0.68	6.46	0.56	-0.743	.459	-0.20	0.09	-0.15
5	5.52	0.90	5.66	0.93	-1.094	.277	-0.40	0.12	-0.22
6	5.37	1.21	5.58	1.00	-1.760	.081	-0.44	0.03	-0.35
7	5.09	1.30	5.37	1.08	-2.031*	.045	-0.56	-0.01	-0.41
8	6.28	0.77	6.32	0.89	-0.335	.739	-0.24	0.17	-0.07
9	5.33	1.08	5.48	0.93	-1.224	.224	-0.40	0.09	-0.24
10	4.77	1.12	5.21	1.15	-3.560**	.001	-0.69	-0.20	-0.71
11	4.86	1.21	5.12	1.08	-2.077*	.040	-0.51	-0.01	-0.42
12	5.43	1.13	5.65	1.05	-1.762	.081	-0.47	0.03	-0.35
13	5.87	0.93	5.95	0.87	-0.942	.348	-0.25	0.09	-0.19
14	5.55	0.92	5.64	0.96	-0.886	.378	-0.29	0.11	-0.18
15	3.95	1.57	4.31	1.30	-2.347*	.021	-0.67	-0.06	-0.47
16	5.20	1.11	5.40	1.03	-1.694	.093	-0.44	0.03	-0.34
17	4.19	1.24	4.58	1.25	-2.473*	.015	-0.70	-0.08	-0.49
18	4.37	1.31	4.91	1.25	-3.704***	.000	-0.82	-0.25	-0.74
19	5.19	1.28	5.24	1.24	-0.378	.706	-0.32	0.21	-0.08
20	4.83	1.19	5.02	1.20	-1.527	.130	-0.44	0.06	-0.31

Notes: $*p < .05$. $**p < .01$ $***p < .001$

Further analysis showed that after taking this course, students agreed more on the following: mathematics can help human beings describe phenomena in the real world (q.2, $p = .000$); general principles found in mathematical research can be applied to all kinds of situations that fit their conditions (q.7, $p = .045$); learning mathematics can cultivate our creativity (q.10, $p = .001$); results calculated with mathematics can accurately explain many phenomena. (q.11, $p = .040$); proof is the only method that justifies mathematical knowledge (q.15, $p = .021$); if an assumption in mathematics fits most situations, then it is justified (q.17, $p = .015$); learning mathematics can improve our sensibility to beauty (q.18, p = .000). The seven questions listed in this paragraph, although show significant changes, do not have large enough effect sizes. This could be a result of the relatively small number of samples (100 students), which is a limitation of this study. This being said, we can still see that an important value of this teaching experiment was the change it may have caused in students' beliefs. In what follows, we shall discuss the reasons for significant and non-significant changes in the two dimensions.

IV. Discussions

1. Changes in beliefs about the nature of mathematics

In the aspect of the nature of mathematics, six questions had no significant changes, while four had significant changes after the teaching experiment. Q.1, 3, and 5 were about contents and representations of mathematics—symbols, procedures, formulae, and general principles. Since, during the course, the lecturer had shown multiple representations of various kinds of contents in mathematics created by different cultures, students' beliefs about contents and representations were neither strengthened nor weakened, and hence there were no significant changes. Q.9 was about modelling. The non-significant change could be due to the fact that the course seldom talked about how ancient cultures created models that represented a part of the real world, and the term "model" was never mentioned in class. Q.13 asked if students believed that mathematics was rigorous and logical. For the reflexive question in the final written examination, many students answered that the Greeks put more emphasis on the logical structure of mathematics, while Chinese argumentations appealed more to intuition. Since there were two major paradigms with different emphases on formal rigour, their beliefs about the logical method of mathematics were again neither strengthened nor weakened. A similar explanation can be argued for the non-significant change in q.19, since very different methodologies and results were created by the two paradigms, students were not more prone to believe that mathematics was objective truth.

For the four questions that had significant changes, we can offer some interesting explanations as well. Results showed that after taking the course, the students were more prone to believe in the "generalisation" thinking of mathematics (q.7), that is, that general principles can be applied to different situations. Students also agreed more on the claim that "results calculated with mathematics can accurately explain many phenomena" (q.11). This could very well be due to their exposure to the topic of calendrical astronomy.

However, in terms of how to justify mathematical knowledge, the scores of both q.15 (proof) and q.17 (exemplification) were increased, showing that this course did not clarify for students the difference between "the context of justification" and "the context of discovery." In the context of discovery, it is reasonable for a person to believe in some assumption if it is verified in most situations she encounters or can think of; however, in the context of justification, the only mathematically acceptable method to justify a proposition is through logic. In the teaching experiment, the reader can see from the appendix and discussions in section III that the focus was mainly on approaches used by different ancient civilisations to tackle similar problems, and also on the link between mathematics and the physical world, but not on how ancient philosophers and modern mathematicians developed logic and ways to justify mathematical knowledge. This is a point that lecturers of similar courses should keep in mind when they teach them: ancient mathematicians used experiments, manipulations of mental or physical objects, or even mere intuition to discover some propositions, but then they had to use logic to justify them.

A final remark about the nature of mathematics is that, although the authors and the lecturer stood closer to intuitionist and social constructivist views on the spectrum of the ontology of mathematics, students' beliefs about mathematics being objective truth and about the logical method of justification were not weakened in any way. This could mean that in this course of mathematical culture, even if the lecturer presented different aspects of mathematics created in different ancient cultures, the lecturer's own philosophical stance would not alter students' ontological beliefs in any drastic way. This could be a topic of future research.

2. Changes in beliefs about the values of mathematics

There were seven questions about which students had no significant changes in their beliefs. The initial observation that one of the authors made, that medical university students saw mathematics as a useful tool, was already confirmed after the pre-test. Most of the average scores of the even-numbered questions were relatively high, and two of them were even more than 6 (q.4 and 8). Q.4 was about mathematics as a tool to be applied in other disciplines, and q.8 was about mathematics used to train one's reasoning. Since their pre-test scores were already high, and in the course the lecturer also gave examples of mathematics applied to many fields of mathematics, such as engineering and astronomy, their beliefs about the applicative values of mathematics maintained at a high level.

As for significant changes, after taking the course, the students agreed more on q.2, 10, and 18. Q.10 and 18 talked about creativity and sensibility to beauty, neither of which had been a value in traditional stereotypes of mathematics. In the course, the lecturer gave examples to show how ancient scholars observed and described Nature (such as the case of calendar-making). The authors believe that this was the reason the students' beliefs changed. Moreover, the lecturer let students compare different thinking on the same problem and he asked the students to create artwork with mathematical concepts. In the reflexive question, many students gave examples of different approaches to tackling similar problems, such as demonstrating the area formula of the circle or the volume formula of the pyramid. These differences strengthened the idea of creativity in mathematics. Besides, their artistic works gave them a different way to use mathematics. These were clearly the reasons for which students realised the values of creativity and sensitivity to beauty.

A final topic that this paper may probably address is whether changes in the beliefs of one dimension in this study might affect the other. Unfortunately the evidence the authors found could not support or refute the claim. As mentioned in the literature review, the authors of this paper treated the nature and values of mathematics as different but related dimensions. Q.9 and 11 in the dimension of the nature of mathematics could be seen as related to the values of mathematics, but students' beliefs about only one of them was significantly changed. Although the authors did not see strong evidence of related changes, this topic can certainly be included in future studies of university students' beliefs about mathematics.

Summarising the whole study, the authors believe that with the evidence, a liberal-arts mathematics course with an emphasis on the culture and history of the discipline can indeed change a part of medical university students' beliefs, especially regarding the link between mathematics and creativity and sensibility to beauty, both of which belong to the humanistic aspect of mathematics. Of course, this preliminary exploratory study still has many limitations, such as some possible threats to its internal validity and the small sample size, so the reader should not extrapolate too much about the influences of the proposed course. However, we did see some changes in students' beliefs and hope in the long run that these students could influence the opinion of the public. Also, further modifications can be made about the context of discovery and that of justification, so the contents of the course can still stay close to the modern practice of mathematics. Finally, all these results can serve as references for university lecturers and mathematics educators for future courses and for research into the mathematics-related beliefs held by students in different non-comprehensive universities and in various professional aims.

Reference

Chemla, K., & Guo, S. (2004). *Les neuf chapitres: Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Paris, France: Dunod.

Chou, S. F. (1999). *A study on mathematics beliefs held by twelfth-grade students in Kaohsiung who aim to study science, engineering or medicin*e. (Unpublished master's thesis). National Kaohsiung Normal University, Kaohsiung. (In Chinese)

Cifarelli, V. V., & Goodson-Espy, T. (2001). The role of mathematical beliefs in the problem solving actions of college algebra students. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 265-272). Utrecht, the Netherlands: PME.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1987). *The Mathematical Experience*. Boston, MA: Birkhäuser.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London, UK: Falmer Press. doi: 10.4324/9780203497012

Ernest, P. (1994). The impact of belief on the teaching of mathematics. In A. Bloomfield & T. Harries (Eds.), *Teaching and Learning in Mathematics* (pp. 62–72). Derby, UK: Association of Teachers of Mathematics.

Furinghetti, F., & Paola, D. (2003). History as a crossroads of mathematical culture and educational needs in the classroom. *Mathematics in School*, *32*(1), 37-41.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of beliefs. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 39–57) Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. doi: 10.1007/0-306-47958-3_3

Hersh, R. (1997). *What is Mathematics, Really?* New York, NY: Oxford University Press.

Hong, H. C. (2009). *A study about gender-stereotypes threat and mathematic-related professional development for female students major in engineer at universities of Science and Technology in Greater Kaohsiung Pintung Area* (Unpublished master's thesis). National Kaohsiung Normal University, Kaohsiung. (In Chinese)

Horng, W. S. (1984). History of mathematics and mathematics education. *Science Monthly*, *15*(5), 371-375. (In Chinese)

Horng, W. S. (2000). Euclid versus Liu Hui: A pedagogical reflection. In V. J. Katz (Ed.), *Using history of mathematics in teaching mathematics* (pp. 37-48). Washington, DC: Mathematics Association of America.

Horng, W. S. & Su, J. H. (2007). How to teach Heron's Formula? An HPM episode. *Journal of Basic Education*, *16*(1), 81-96. (In Chinese)

Jami, C. (2012). *The emperor's new mathematics: Western learning and imperial authority during the Kangxi reign (1662-1722)*. New York, NY: Oxford University Press. doi: 10.1093/acprof:oso/9780199601400.001.0001

Jami, C. & Han, Q. (2003). The reconstruction of imperial mathematics in China during Kangxi's reign (1662-1722). *Early Science and Medicine*, *8*(2), 88-110. doi: 10.1163/157338203X00026

Ke, H. J. (2013). *The study of the first grade of vocational high school students' mathematics beliefs and problem solving*. (Unpublished Master dissertation). National Changhua University of Education, Changhua. (In Chinese)

Kjeldsen, T. H. (2011). History in a competence based mathematics education: A means for the learning of differential equations. In V. Katz & C. Tzanakis (Eds.), *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education*. (pp. 165-173). Washington, DC: MAA. doi: 10.5948/UPO9781614443001.016

Kline, M. (1953). *Mathematics in Western Culture*. New York, NY: Oxford University Press.

Kuhn, T. S. (2003). *The Copernican revolution: Planetary astronomy in the development of western thought*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Leder, G. C., Pehkonen, E., & Törner, G. (Eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. doi: 10.1007/0-306-47958-3

Liu, P. H. (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching? *Mathematics Teacher*, *96* (6), 416-421.

Liu, P. H. (2007). Exploring the relationship between a history oriented calculus and the development of students' views on mathematics. *Chinese Journal of Science Education*, *15*(6), 703-723 (In Chinese)

Lloyd, G. E. R. (1975). *Greek science after Aristotle*. New York, NY: W. W. Norton & Company.

Op 't Eynde, P., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2002). Framing students' mathematics related beliefs: a quest for conceptual clarity and a comprehensive categorization. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 13-37) Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. doi: 10.1007/0-306-47958-3_2

Parsons, C. (1995). Platonism and mathematical intuition in Kurt Gödel's thought. *Bulletin of Symbolic Logic*, *1*(1), 44-74. doi: 10.2307/420946

Schoenfeld, A. H. (1985). A framework for the analysis of mathematical behavior. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical problem solving* (pp. 11-45). New York, NY: Academy Press. doi: 10.1016/B978-0-12-628870-4.50007-4

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York, NY: Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53-75). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Shapiro, S. (2000). *Thinking about mathematics: The philosophy of mathematics*. New York, NY: Oxford University Press.

Stage, F. K., & Kloosterman, P. (1991). Relationships between ability, belief and achievement in remedial college mathematics classrooms. *Research and Teaching in Developmental Education, 8*(1), 27-36.

Su, J. H., & Ying, J. M. (2014). Enhancing in-service mathematics teachers' professional knowledge with an HPM approach as observed in teachers' reflections. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, *1*(1), 79-97. doi: 10.6278/tjme.20140307.003

Su, Y. W. (2007). Using ancient texts in mathematics teaching – Root extractions as an example. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*, *9*, 56-67. (In Chinese)

Su, Y. W. (2011). An investigation of the theories and practices of integrating history of mathematic into elementary school teaching. *The Elementary Education Journal*, *58*(3), 65-73. (In Chinese)

Tang, S. C. (2009). *The belief structure of secondary mathematics intern teachers' expectation and evaluation of teaching performances*. (Unpublished Doctoral thesis). National Taiwan Normal University, Taipei. (In Chinese)

Tsai, H. N., & Su, Y. W. (2009). A practical study on integrating history of mathematics into elementary mathematics teaching – Fraction multiplications and divisions as examples. *Taiwan Journal of Mathematics Teachers*, *20*, 17-40. (In Chinese)

Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education* (pp. 201-240). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47220-1_7

Wang, C. Y., & Chin, C. (2007). How do mentors decide: Intervening in practice teachers' teaching of mathematics or not. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S., & Seo, D. Y. (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 241-248). Seoul, Korea: PME.

Wilder, R. L. (1950). The cultural basis of mathematics. In L. M. Graves, E. Hille, P. A. Smith, & O. Zariski (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. 1, pp. 258-271). Cambridge, MA: American Mathematical Society.

Wu, M. L. & Ge, J. J. (2006). A correlation study on the mathematics attribution, mathematics attitude, mathematics anxiety and mathematics achievement of elementary school students. *Journal of National Kaohsiung Normal University*, *21*, 1-18. (In Chinese)

Appendix: Syllabus of the teaching experiment.

Week	Theme
1	Introduction to the course.
2	Pre-test administration, unit fractions, the sexagesimal and other numerals in ancient civilisations.
3	Greek philosophy of mathematics, Euclid’s *Elements* and its contents.
4	Euclid’s *Elements* and its influences.
5	Archimedes, Apollonius and Heron.
6	Mathematics in early imperial China, The *Nine Chapters of Mathematical Art*, and Liu Hui’s commentary, Archimedes vs. Liu Hui.
7	Liu Hui’s and the Zu family’s methods of limits and infinitesimals, Euclid vs. Liu Hui.
8	Chinese algebra in the 13^{th} century: *Tianyuan shu*, the use of geometrical diagrams in Greek and in China, adversary vs. authority.
9	Mid-term break
10	Partition of inheritance, geometrical solutions of quadratic equations.
11	Students (separated into groups of 7-9 students) present their art creations.
12	Cubic equations, the social status and interactions of Renaissance mathematicians and nobles.
13	Japanese mathematics in the Edo period (17^{th} to 19^{th} centuries), mathematical competitions in the temples and shrines.
14	Basic calendrical astronomy.
15	The making of Julian calendar, Gregorian calendar, and the East-Asian lunisolar calendar.
16	The invention of calculus, the histories of “integration” and “differentiation”, the arithmetisation of analysis, the fundamental theorem of calculus.
17	Final written examination.

蘇意雯、陳政宏、王淑明、王美娟（2015）。
幾何文本閱讀理解的實作研究。
臺灣數學教育期刊，2（2），25-51。
doi: 10.6278/tjme.20151001.002

幾何文本閱讀理解的實作研究

蘇意雯[1]　陳政宏[2]　王淑明[3]　王美娟[1]
[1]臺北市立大學數學系
[2]國立臺灣師範大學數學系
[3]新北市立明治國民中學

本研究主要是由師資培育者與現場教師一齊探討如何開發出幫助學生閱讀理解之幾何文本。參與教師利用所開發之幾何文本，進行班級教學，並根據學生基礎素養國際研究計畫（Programme for International Student Assessment, PISA）所提的擷取與檢索、統整與解釋、省思與評鑑的閱讀理解歷程，設計評量試題，觀察學生學習狀況，作為教師教學反思之參考。本研究開發出主題為「平行與截線性質」之幾何文本，藉由此教學實作，發現閱讀融入數學史素材的幾何文本，能幫助學生對於數學主題之理解，在統整與解釋面向，實驗組學生與控制組學生有顯著差異。另外在幾何閱讀文本的編排上，可以先提綱挈領，讓學生明瞭學習主題梗概。

關鍵詞：幾何文本、閱讀理解、數學史

通訊作者：蘇意雯，e-mail：yiwen@uTaipei.edu.tw
收稿：2015 年 3 月 26 日；
接受刊登：2015 年 10 月 1 日。

Su, Y. W., Chen, C. H., Wang, S. M., & Wang, M. C. (2015).
Teaching practices for reading comprehension of geometry texts.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *2*(2), 25-51.
doi: 10.6278/tjme.20151001.002

Teaching Practices for Reading Comprehension of Geometry Texts

Yi-Wen Su[1]   Cheng-Hung Chen[2]   Shu-Ming Wang[3]   Mei-Chuan Wang[1]

[1] Department of Mathematics, University of Taipei

[2] Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

[3]New Taipei Municipal Mingzhi Jumior High School

In this study, a teacher educator and in-service teachers collaborated to develop geometry texts that helped students improve their reading comprehension. The teachers used geometry texts, conducted classroom instruction, and, according to the Programme for International Student Assessment guidelines, designed assessment questions and observed students' learning styles as a teaching reference. We developed reading materials, addressed geometric concepts—including the transversal line properties of parallel lines—and created assessments for math reading, thereby enabling students to access and retrieve, interpret and integrate, and reflect on and evaluate information. This study discovered the following: Integrating the history of mathematics into texts can help students understand geometric concepts. In addition, individual students exhibit significant differences in interpretation and integration skills. Furthermore, the arrangement of geometry reading texts should be focused on vital information, to enable students to understand the learning topic outline.

Keywords: geometry text, reading comprehension, history of mathematics

Corresponding author：Yi-Wen Su，e-mail：yiwen@uTaipei.edu.tw
Received：26 March 2015;
Accepted：1 October 2015.

壹、緒論

數學是很多同學在求學過程中頭痛的科目。在教學過程中研究者發現，各階段的學生只有少部分能從數學解題的過程中獲得些許的成就感，對於大多數學生來說，不僅不清楚數學概念的發展，也不知道為什麼要學習數學，更別說體會數學在日常生活中的應用。即使是在數學成績表現優良的表象下，學生對數學的興趣依舊不高，以國際數學與科學教育成就趨勢調查（Trends in International Mathematics and Science Study, TIMSS）2011 為例，台灣八年級學生數學成就位居第三名，四年級學生排名第四，但是台灣學生對數學學習的正向態度及自信心卻明顯偏低（Mullis, Martin, Foy, & Arora, 2012）。對於這門被喻為「科學之母」的學科，如何發掘其迷人之魅力？如何在教學中針對課程內容設計教材進行教學，讓學生能了解數學，欣賞數學，正是身為一名數學教育工作者念茲在茲努力的方向。從 1980 年代開始，解題、溝通與連結等數學能力的培養一直是數學教育界的目標，而數學論證能力是其中不可輕忽的一環。Balacheff（1990）發現數學論證教材太強調證明的邏輯觀點，忽略了數學活動中社會實作的面向。為了提升學生的論證能力，也因此，有一些學者（Selden & Selden, 2003; Yang & Lin, 2008, 2012） 關注到了運用閱讀策略來幫助證明理解之研究取向。

事實上，閱讀能力與終身學習的能力息息相關，也因此近年來各國越來越重視培養學生的閱讀能力，為了瞭解學生的閱讀表現，也產生了一些國際性的評量，例如由經濟合作暨發展組織（Organization for Economic Cooperation and Development [OECD]）主辦，針對 15 歲學生所舉辦的全球性學生評量－學生基礎素養國際研究計畫（Programme for International Student Assessment, PISA）；以及由國際教育學習成就調查委員會（International Association for the Evaluation of Educational Achievement [IEA]）辦理，評量對象為 9 到 10 歲，亦即四年級學生的閱讀能力的促進國際閱讀素養研究（Progress in International Reading Literacy Study, PIRLS）這樣國際性的閱讀評比，PIRLS 是五年循環一次的國際評比，測量兒童閱讀素養成就以及與讀寫能力有關之政策、實務的發展趨勢，這個研究的調查結果也提供了各國作為改善閱讀教學的參考依據。2006 年共有 45 個國家和地區參加 PIRLS 研究，臺灣學生名列第 22（閱讀與學習研究室，2009）。至於 PISA 的調查結果，PISA 2006 共有 57 個國家及經濟體參與，在閱讀素養方面台灣學生名列 16；PISA 2009 共有 65 個國家及經濟體參與，在閱讀素養方面，臺灣學生與丹麥並列 23 名（臺灣 PISA 國家研究中心，2011）。PISA 報告也指出，一般而言，閱讀測驗平均分數可以反映國家教育的品質。如果絕大部分國中畢業生閱讀能力都在平均水準之下，那麼國家未來的勞動人力很可能缺乏必備的技能，國民的判斷力也可能不足（臺灣 PISA 國家研究中心，2008）。由前述國際評比發現，閱讀素養的加強及能力的培養實為台灣教育當務之急。

有鑑於閱讀的重要性，教育部不但持續推動閱讀教育，強化推廣學習素養取向之教學，在國中小部分也加強提升各領域閱讀能力，將閱讀納入九年一貫各領域課程與教學輔導群未來推動重點。讓閱讀不只是國語文教育的事，而是各學科均應提倡的重要目標，例如：數學閱讀、社會閱讀、科學閱讀…等，並發展閱讀教學實務方案，系統性的協助學生發展閱讀樂趣（行政院中部聯合服務中心，2010）。經過一連串的推動及加強，PISA 2012 和 PIRLS 2011 的閱讀素養評比表現，分別進步至第 8 名和第 9 名（行政院，2013），顯見國內推動閱讀教育之成效。為了因應十二年國教啟動，臺北市政府教育局也於 101 學年度第一學期舉辦國中素養評量工作坊，分為數學素養評量及閱讀理解評量兩大組，讓參與教師認識素養理論到命題實作，可見中學階段對於閱讀的重視。

人類在學習知識的過程中，是先經由動態的語言獲得新知，再藉由靜態的「閱讀」得到更多的資訊。Mayer 認為「閱讀」是學生獲得訊息的最重要手段，學生在剛入學的階段「學習閱讀」（learn to read），到高年級階段則「經由閱讀而學習」（read to learn）。前者是指學會將印刷文字轉換成其他的形式，亦即學習將一些低層次之技能自動化，後者則是指藉由閱讀的方式來獲得新知（Mayer, 1987/1997）。因此，我們知道在學習過程中時時刻刻離不開閱讀，然而「閱讀」是一個複雜的過程，在學生心智歷程的模型中包含識字和閱讀理解，其中識字是閱讀理解的先備條件，而閱讀理解是閱讀行為的重心；故此，不論閱讀的目的為何，如果沒有理解，所花的精神和時間都可能是白白浪費。

一般談到閱讀，通常以語文素材為主；數學相關的閱讀常是讓人忽略的教學活動，也是被一般教師遺忘的盲點；這導致數學課本之敘述在數學教學中常被忽略，而只重在計算、思考、解題技巧等方面的練習，也造成當學生作獨立閱讀思考學習時，會面臨到障礙。九年一貫數學學習領域的五大主題是數與量、代數、幾何、機率與統計、連結。幾何學從希臘時代便有卓著的發展，是當時的四藝之一，雖然幾何也被視為中學數學領域中極重要的學習素材，然而從研究中均可發現中學生在學習幾何時碰到許多困難、學生的幾何直觀推理能力與學習成就不佳，對於幾何證明也是望之卻步（Fey, 1984; Senk, 1985）。為了讓閱讀素材更多樣性，也呼應教育部積極提升學子閱讀素養的要求，本研究嘗試開發幾何文本，並利用此文本進行教學，希望能增進學生的閱讀理解。

承上所述，本研究之研究目的為發展幾何文本，探討學生對於所開發之幾何文本的閱讀理解情形。因此，本計畫之研究問題為：

學生對於所開發之幾何文本的閱讀理解情形為何？

貳、文獻探討

以下的篇幅，我們將討論學習理論及閱讀教學架構，並根據閱讀教學架構的發展步驟，探討數學閱讀策略，由於本研究關注於幾何文本的閱讀理解，因此也探討幾何主題相關文獻，本章節分別以（1）學習相關理論（2）閱讀教學架構（3）數學閱讀策略與（4）幾何主題相關研究來呈現。

一、學習相關理論

Vygotsky 認為，每一個兒童在各領域有其實際發展的水準（actual development level），即未經協助下所能表現的水準，另一個是潛在的發展水準，即在協助下所能表現的水準。實際的發展水準和潛在的發展水準之間的區域，即是所謂的近側發展區（Zone of Proximal Development, ZPD）。從學習的觀點，他亦認為個人的發展與學習的速度並不一致，教學的主要特徵在於創造近側發展區，以刺激一系列的內在發展歷程（Vygotsky, 1978）。學校教學的結構提供了文化經驗，使得較高的心理功能歷程得以形成。在教育機構進行的教育歷程的核心就其觀點來說是兒童與成人以獨特的合作方式進行互動，藉由該互動歷程，兒童得以獲得知識並建立較高等的心智功能，這種歷程是透過成人的參與而發生（Vygotsky, 1978）。

鷹架（scaffolding）意指兒童內在的心理能力之成長有賴於成人的協助，而這些協助應建立在學習者當時的認知基礎上，當成人有系統地給予指導時，學習者較易超越原來的層次。本研究期望藉由教師對於幾何文本閱讀理解的教學設計實施，增進學生數學閱讀理解的能力。

McKenna 與 Robinson（2002）認為所有的學科閱讀必須包含三種主要的技能，分別是一般讀寫技能、學科的先備知識與學科特殊的閱讀技巧，三者的關係如圖 1 所示：

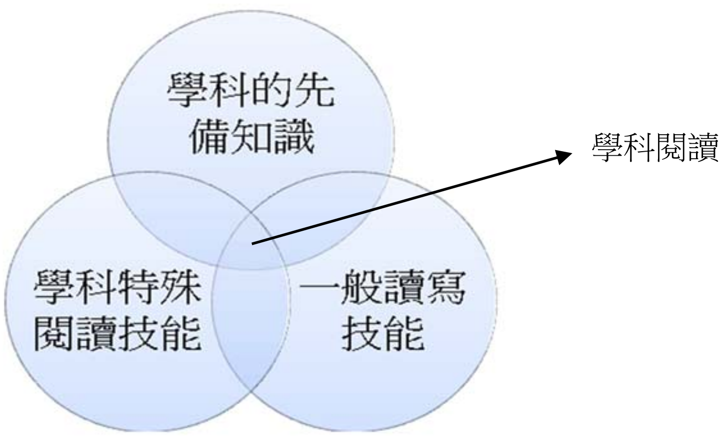


圖 1　**學科閱讀的認知技巧**。引自 *Teaching through Text: Reading and Writing in the Content Area* (p.9), by. M. C. Mckenna & R. D. Robinson, 2002, New York, NY: Pearson.

由圖 1 我們可以知道數學閱讀顯然與一般的語文閱讀不同，答題者必須經由閱讀理解才能針對問題作出解釋性回答，而當外來資訊若存在文字問題時，將會對學生有限的處理能力增加負擔（Muth, 1984）；數學閱讀有其特定的學科閱讀技能，其中包含了數學先備知識、數學圖示理解、數學詞彙符號理解、和數學作圖程序理解（秦麗花、邱上真，2004）。數學閱讀是經由數學語言而建構意義的過程（秦麗花，2007），數學被視為一種科學的語言，事實上，學生要經由數學閱讀來學習新概念。Pólya（1945）提出的解題歷程，其四個步驟依序為閱讀並了解題意、提出解題計畫、執行解題計畫、回顧及驗證。其中以「閱讀」並了解題意（文意）是理解問題、解決問題的首要關鍵。Woodward 與 Elliott（1990）針對中學生的研究，發現有 67%到 90%的課堂教學是以教科書為主要來源，但也發現大部分的學生並無法經由閱讀理解教科書的結構（Allington, 2006; Budiansky, 2001）。

本研究針對幾何主題，由國中教師發展相應之幾何文本學習工作單，融入閱讀策略，希望能幫助學生之閱讀理解，強化其學習。當參與教師在進行閱讀教學之時，有何教學架構可供參照呢？相關之閱讀教學架構，研究者將於以下篇幅加以敘述。

二、閱讀教學架構

很多學者（Herber, 1978; Richardson, Morgan, & Fleener, 2011; Singer & Donlan, 1985; Vaughan & Estes, 1986）提出學科領域閱讀教學架構，這些學科領域閱讀架構都包含了如下的三個基本的假定：

（1）學習者必須準備好去學習

（2）學習者必須在學習中被引導，以致在課程中能發展理解

（3）學習者必須複習學到了甚麼，此步驟的一部份是教師必須提供閱讀之後的學習機會，幫助學生保持學習。

如果這些基本步驟在教學序列中一直重複，學習者就開始能獨立的使用它們（Richardson et al., 2011）。此處研究者舉 PAR（preparation, assistance, reflection）領域閱讀教學架構，此架構包含準備、協助及反思三個步驟，以下加以說明。在準備步驟，教師需要考慮文本問題以及學生的背景知識。此步驟幫助引發學生閱讀動機。接著教師移至協助步驟，於此處提供課程的教學脈絡，這正是幫助學生較佳理解的決定性步驟。往往教師引動學生後就讓他們在教室自行閱讀或當回家作業，殊不知思考貧乏的學生並沒有足夠的研讀技能或是批判性的思考，這些學生在閱讀時都需要協助以建立理解。如果選擇策略讓學生於閱讀時有所反應，則可以改善理解的程度，這些策略也對於完成閱讀提供了一個具體清楚的目的。至於反思步驟，教師使用閱讀素材提供延展、豐富及批判性思考的機會。真實的反思發生在學生自問難題，例如「我從這個閱讀學到甚麼？」、「它適合我嗎？」、「我相信作者所言嗎？」、「此份閱讀素材值得保留嗎？」等等，

當學生在一個閱讀上真正反思時，他們才能將素材深層的牢記不忘（Richardson et al., 2011）。

由上述可知，在準備步驟，教師除了了解學生之先備知識外，也應引起學生之學習動機，經由數學史融入數學教學實作，我們發現透過數學史能為學生揭開數學神秘的面紗，讓學生了解數學的起源，也能正面增強他們的數學學習態度（沈志龍、蘇意雯，2009；林妙霜、蘇意雯，2009；蔡幸霓、蘇意雯，2009）。數學史融入數學教學的實施，可以經由介紹數學思維的發展歷史，讓學生體會數學是人類的活動，也能了解數學的發展與社會文化脈絡息息相關，進而開拓學生的視野（洪萬生，2000；洪萬生等，2009）。以下的篇幅，研究者將討論數學閱讀策略。

三、數學閱讀策略

Brown 和 Palincsar 根據 Vygotsky 認知理論所提出的交互教學法是用來幫助學生主動進行有意義的閱讀，利用教導學生提出問題（questioning）、摘錄重點（summarizing）、澄清（clarifying），以及預測下段文章內容（predicting）等認知策略，讓學生從文本中獲得有意義的學習（Palinscar & Brown, 1984）。閱讀理解包括語言與思考，也就是在讀中想、在想中讀。其中包括了預測文字意義、檢驗所預測的以及超越所讀的。以 PISA 的閱讀素養為例，閱讀理解歷程包含了擷取與檢索、統整與解釋、省思與評鑑（OECD, 2010），也就是擷取資訊、理解資訊、詮釋資訊、反思與評估資訊內容以及反思與評估資訊形式。所謂的擷取與檢索主要是針對文本資訊，也就是能從閱讀的文本中，找到所需的資訊。統整與解釋則是針對閱讀內容，涉及文本內部的統整，要求了解文本各部分的關係，包括問題與解決方法、因果關係、分類與舉例、等價、比較與對照、部分與整體的關係，意即閱讀後，能正確解讀資訊的意義。至於省思與評鑑則需連結文本資訊與利用文本外在知識、想法和價值，能夠將所讀內容，與自己原有的知識、想法和經驗相連結，綜合判斷後，提出自己的觀點。此一歷程要求讀者從文本抽離，以進行客觀思考，並評鑑文本的品質與適切性（臺灣 PISA 國家研究中心，2011）。關於閱讀理解的策略首先是「摘要」，也就是提供摘要圖，接著是「預測」，就是提供閱讀停看聽的時機，以及猜想。再來是「自問自答」，也就是詰問自己「我懂了什麼，我不懂什麼」、「如果是…，如果不是…」，接著是「澄清」，也就是比較前後想法和比較他人想法，最後則是「反思」，思索為什麼及如何等問題（林福來，2011）。

Ostler（1997）在他的數學課堂中實施幫助學生閱讀課本的行動研究，他發現在自己的教學中習慣於將課本當作用來練習題目的資料，而非用來理解內容而閱讀的資料，並且注意到學生時常無法從課文中擷取意義或看到課本上的主題與表徵之間的連結，他假定學生在閱讀小說時是採用相同的方法，因此學生未意識到知道如何閱讀數學文本中的數學記號與數學語言能使他們成功的理解課文。

透過觀察後，Ostler 提出閱讀數學文本時的四個要素並針對各要素提供教學策略，其研究將十一年級的 21 位學生與 16 位學生分成實驗組與控制組，在實驗組內使用數學閱讀策略，進行為期四周的實驗教學，而從家庭作業的完成度做二組之間的比較。Ostler 所提出之要素及相應之策略茲敘述如下：

（一）專門用語（**Terminology**）：

此要素主要觀察自學生閱讀時，若非完全跳過技術性名詞，不然就是直接記憶章節最後重點整理的所有名詞，這兩種方式在本質上皆非好方法，因此教學策略應要求學生在解例題時辨別與學習本題內之專門用語，在每個例題中如此的重複到章節結束。

（二）視覺模式（**Eye patterns**）：

此要素主要觀察自學生趨向於由左至右閱讀數學式，就如同閱讀一般資料文本，但許多數學式利用到小括號，因應適當的計算程序需要由內運算至外，因此教學策略應鼓勵學生更加注意數學運算的適當程序。

（三）圖文交互作用（**Graph/text interaction**）：

此要素主要觀察自學生在看到例題中圖文並列時，通常在嘗試找出問題與圖形之間的關係前，就先閱讀詳解，因此教學策略應鼓勵學生在例題上的某一階段做適當停留，並找出同時出現在圖形中的規則。

（四）閱讀方向（**Reading direction**）：

此要素主要觀察自學生較常依由前至後的順序閱讀問題，但是在閱讀數學文本例題時，有時候從解法的最後一步驟開始去推敲每一個步驟是如何由前一個步驟推演而來，反而對學生會有幫助。

Fuentes（1998）在自己的課堂中為了讓學生閱讀理解數學文本所使用的教學方法叫做 FLIP（Schumm & Mangrum, 1991），其中做到兩件事，一方面增加學生感到有趣的角色和閱讀的先備知識，另一方面讓學生意識到辨別文本的結構和語言困難度的用處。這個方法主要是用於閱讀前的策略，但在閱讀中與閱讀後同樣也有效果。用為閱讀前的策略時，先要求學生瀏覽文本並尋找特別的特徵，然後判斷哪些部分對他們而言會有難度，這些判斷包含學生決定對於任務而言哪些策略可以或不可以產生好結果。

F 是指「親切度（friendliness）」，要求學生查看文本並決定其親切或不親切的程度。如果文本看起來親切，學生可能期望使用親切的特徵去幫助他們理解，如果文本看來不親切，學生可能預期會有關於理解的問題並且希望在閱讀時能有外在的幫助。親切與否的討論在閱讀前後都能提升學生感知文本的語言和文本的構件。

L 是指「語言（language）」，要求學生瀏覽一個段落並決定出語言的困難度，此特色的討論包含看複雜的句子和大量的字彙。學生看到一個段落包含許多冗長及複雜的句子，困難的字彙或注釋，可能決定去找出在看每一個句子後哪些會是理解的，或者他們可能決定減緩速度，分析和再次閱讀。

I 是指「興趣（Interest）」，要求學生在閱讀一個段落後決定出個人感興趣的程度。雖然興趣具高度的主觀及變動的特性，在理解過程中卻是極為重要的因素。當學生興致低落，所投注的精力就少。對學生而言認知到理解的失敗在於興趣低落而非策略的效用是重要的，因為這些策略需要投注高度的精力。因此當學生評論某個策略不實用時，教師可以先詢問學生對於任務的感興趣程度。增加興趣的程度有許多策略，有時可用活化先備知識來幫助，尋找理解的第一瞬間可以激起興趣；學生需要給予機會去談論興趣如何影響他們的閱讀、為什麼興趣低落會是一個問題、當需要的時候學生的責任是要如何增進興趣、以及多少興趣可以被增進。

P 是指「先備知識（prior knowledge）」，學生需要了解這個學習的基本原則：從一個人已經知道的事中學習，他所學到的必定很少。應用在閱讀，學生需要了解關於他所知道很少或不知道的學習主題的文本會是困難的－如果可能的話－去理解它。在閱讀前先檢視文本可以幫助學生決定關於閱讀的事前準備有哪些，並且經由它而讓閱讀有所進展。舉例來說，學生若被要求閱讀一段對他而言是完全陌生的主題，那麼在他開始任務前應被給予機會去取得一些相關知識。或者如果學生正在閱讀並對先備知識感知不全，學生要注意應該做某些事去確信是否理解。

Carter 和 Dean（2006）調查數學教師教導學生閱讀數學文本時所使用的策略，他們研究教師在閱讀文本的過程中所使用的方法與閱讀技巧，調查的對象共有八位具有五年級至十二年級教學經驗的數學教師，他們企圖去瞭解教師如何培養學生三個面向的數學閱讀技巧：解讀文字與符號、瞭解字彙的意義、理解問題。此研究結果發現，針對解碼策略應包含為了使學生更正對符號的誤解而要求他們重複閱讀，讓學生讀出聲音或提供學生正確的文字與符號的解釋。針對字彙應教學生使用策略去幫助他們連結概念與專門用語，包含設計許多活動使學生藉由看出文字與數學項目之間的關係去建立概念性的知識。至於理解策略應包含教師透過與學生談論他們剛閱讀完的內容而使學生自我提問，如「我讀了什麼？」、「那是什麼意思？」或者老師可藉由學生用自己的語言去重新敘述問題進而做出解釋與摘要，此外，教師應該幫助學生辨識文本中重要的資訊，例如：教師可引導學生將解題中重要的資訊與不相關的內容分開，老師也可以使用直接提問的策略去評估學生對於問題的理解程度。

Borasi、Siegel、Fonzi 與 Smith（1998）利用交易閱讀理論（transactional reading theory）探究在中學數學教學中的四個閱讀策略，也就是讓學生對於文本說出、寫下、畫出以及扮演，提供他們以具體的方式建構以及協商解釋所閱讀到的資訊。研究顯示，利用上述四種策略，提供

了學生閱讀教科書的不同方式，也鼓勵學生持續地修正他們的解釋，考慮另類的觀點，甚至推衍探究教科書之外的新問題。

有關數學圖文的教學，Pengelley（2011）在大學課堂上使用原典，以巴斯卡的數學歸納法及組合數為例，讓學生研讀原始文本，除了數學知識的獲得外，學生也更珍視現代符號的便利。同樣借助原始文本，也可以只採用圖像表徵的方式在中學課堂上施行，利用歷史圖像讓學生敘事，幫助了解數學（Dematte & Furinghetti, 2011）。Dematte 和 Furinghetti 以歷史圖像融入數學教學的立場主要是認為對於數學知識的初始進路來說，敘事不失為一個好方法，因為學生對於特定敘事的潛能發展，可能對他們所學賦予意義。也就是說，雖然有時歷史圖像對於寫成的文本來說只是裝飾用途，沒有參照的作用，但是有時它們也被賦予了解釋的功能，成為數學溝通的重要元素。此教學實驗施行方式是佈置人類從事一些與數學相關之活動的圖像，例如用不同的工具測量或是把計算的結果記錄下來等等。此研究讓學生閱讀圖像，然後要求學生針對數學面向寫下在此場景中發生了甚麼事。此種讀圖敘事，引入了一個對學生來說相當可接近又具激發動機的模式，這個模式包含了對原典的詮釋學取向，也強調數學的文化面向，並提供連接敘事的邏輯思考以促進創造推論的技能，從中得到如果能正確實施隱含數學史的歷史圖畫，將可以獲得教育上的功能的結論（Dematte & Furinghetti, 2011）。上述研究所提供的是歷史圖像，那麼如果針對幾何主題的圖文教學，又會獲得何種結論呢？下一節，研究者將針對本研究幾何主題之相關文獻，提出探討。

四、幾何主題相關研究

九年一貫課程綱要裡對於國中幾何教學的目標，提到「首先在於提供學生日後有用的核心幾何知識，其次是提供豐富的背景，可以展示數學推理證明的過程與威力，而推理能力的培養正是國中數學教育的重點之一。」（教育部，2008）。另外對於國中的幾何學習，綱要也提及是由直觀、歸納轉入幾何推理與證明。並強調「幾何教學起初仍然以學生的幾何直覺經驗為前導，但開始強調幾何觀念的明確定義，及幾何相關量的計算，甚至代數演算，學生同時應開始學習閱讀幾何性質的嚴格推理，最後，再學習自己動手寫出較短的證明」（教育部，2008）。本研究關注於如何開發幾何文本，以幫助學生之閱讀理解。

在探討閱讀幾何證明的相關文獻中，左台益等人（2011）探討將一個複雜的幾何證明用分段方式呈現，降低任務的複雜度對專家（28 位準中學數學教師和 21 位中學數學教師）與生手（66 位八年級學生）在認知負荷感受與閱讀理解之影響。本研究結果顯示：（1）不論是對專家或對生手而言，證明文本以分段方式呈現，有助於提高其閱讀意願以及降低其閱讀證明時的困難度和所花費的心力，但對他們在閱讀理解的表現上，則未造成顯著差異。（2）不論證明文本以分段或未分段呈現，專家的閱讀意願與信心指數皆顯著高於生手，而其閱讀證明時的困難度

和所花費的心力則顯著低於生手；且專家的閱讀理解表現也顯著優於生手。以分段方式呈現幾何文本，正可以作為本計畫之參考。Yang 與 Lin（2008）嘗試將認知策略設計於工作單內，增進學生對於幾何證明的閱讀理解，並探討學生感知使用認知和後設認知閱讀策略與幾何證明的閱讀理解能力間的結構關係（Yang, 2012）。另外也有研究比較閱讀導向和書寫導向兩種實施類型下，學生對於幾何證明的閱讀理解效果（Yang & Lin, 2012）。此處的閱讀導向是以閱讀策略和佈題的理念設計，依照前文所提之交互教學法的四個認知閱讀策略：提出問題、摘錄重點、澄清、預測，以及另一個後設認知閱讀策略：省思而設計。書寫導向則是指一般的證明教學。研究對象為分處於 22 個班級，年齡介於 14 到 15 歲之間的 683 位九年級學生，還有 12 位中學教師參與本項研究，該研究為準實驗研究，利用兩節 45 分鐘的課程讓實驗組及控制組學生完成所設計之工作單。研究顯示，實驗組的延後測成績顯著高於控制組的成績。在此研究，兩位研究者首先瀏覽交互教學法之相關文獻，然後根據問題推導、澄清、摘錄重點、預測等四個閱讀認知策略，設計教材並加入後設認知的閱讀策略，也就是反思，接著進行課堂實作，最後提供一個證明，請學生思索其命題，藉此迫使學生重新思索論證的邏輯形式及激發他們的閱讀策略。

因此，若是中學教師除了具備學科內容領域知識之外，也能瞭解如何運用閱讀策略，幫助學生對於教科書的閱讀理解，應該對於學生的學習會有助益。本研究即是針對幾何主題，規劃參與之國中教師共同研發國中課程相關幾何文本，希望能幫助學生的閱讀理解，並提出可行之設計建議。

參、研究方法

本研究為準實驗設計，採方便取樣的方式，選取參與教師所任教程度相當的兩個班級，一個班級為實驗組，利用研究團隊所開發之幾何文本為上課內容；另一個班級為控制組，利用數學課本為上課內容。研究對象為新北市某國民中學八年級學生二個班級共 61 人，實驗組學生和控制組學生分別為 33 人和 28 人。在本研究中，研究團隊共同討論研發適用於國中幾何文本，接著再實施於教學現場，希望能幫助學生之閱讀理解，以下篇幅將進行詳細說明。

一、研究設計

在本研究中，研究團隊開發「平行與截線性質」文本，並進行教學。教學者為研究者之一，實驗組與控制組兩班學生原本就皆由教學者授課，在本次教學實驗上，實驗組與控制組學生並無適應教師之問題。課程實施共兩節，在教學活動中，實驗組與控制組之前、後測工具均一致，兩組最主要之差異為閱讀素材之不同。實驗組以「平行與截線性質」文本閱讀為主進行教學活動，控制組以閱讀教科書為主進行教學活動。有關教科書的內容，主題一是平行線的意義，利用「在一平面上，兩直線如果可以找到一條共同的垂直線，我們就稱這兩直線互相平行。」、「在一平

面上，當兩直線平行時，若一直線與其中一條平行線垂直，則此直線必與另一條線平行線垂直。」作說明，並請學生思考「在一平面上有相異三直線，L1、L2、L3 ，若 L1 // L2、L2 // L3 ，則 L1 與 L3 有什麼關係？」。主題二是截線與截角，介紹在平面上，一直線同時與另兩直線交於不同的兩點，這一直線稱為截線，截角與截角之間，隨著彼此的位置關係，會有不同的名稱。接下來是平行線的截線性質以及平行線的截線性質的應用。控制組第一節課先讓學生閱讀完教科書之後進行前測，第二節課再依照課本的內容，教師一邊做適當的引導，讓學生一邊閱讀教科書後，再做後測。實驗組第一節課先讓學生閱讀完「平行與截線性質」文本進行前測，第二節課依照文本的內容，教師一邊做適當的引導，讓學生一邊閱讀文本後，再進行後測。

關於實驗組的教學進行，在第一節課授課教師先以歐幾里得《幾何原本》的平行設準與《數理精蘊》的平行定義引起動機，讓學生利用 25 分鐘時間自行閱讀文本，並利用文本來回答學習工作單的評量問題。第二節課則是教師引領學生閱讀文本，再進行 15 分鐘的後測。

本研究之研究工具為研究團隊所開發之「平行與截線性質」幾何文本，以及前、後測所用之學習工作單。關於「平行線截線性質」幾何文本之設計理念，以及學習工作單，研究者將於下一小節加以介紹。

二、研究工具

（一）「平行與截線性質」幾何文本

有關「平行與截線性質」幾何文本之教材地位如下圖 2 所示，研究者之設計理念詳述於後：

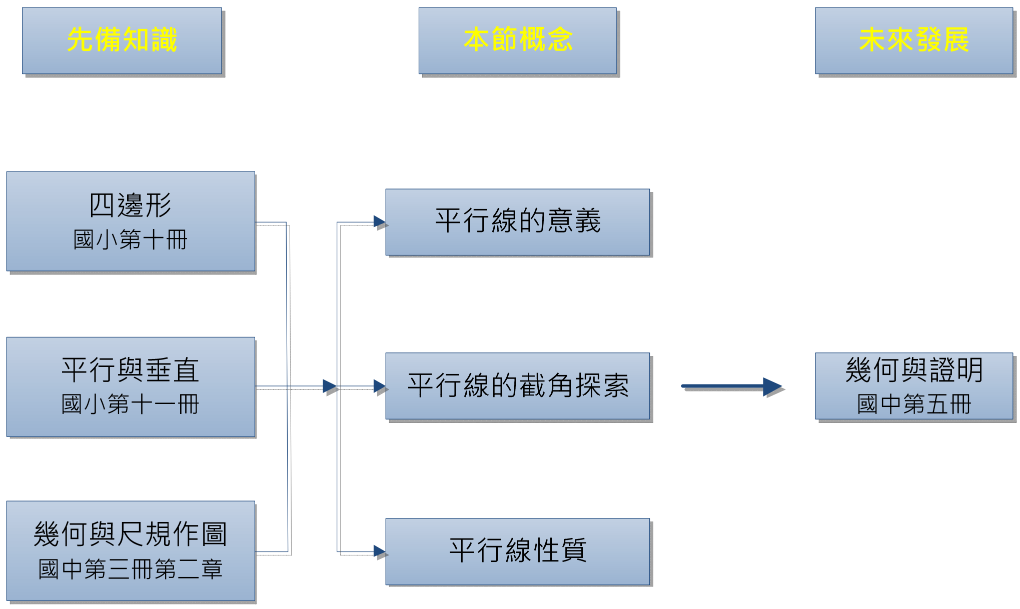


圖 2 「平行線截線性質」幾何文本之教材地位

研究者先從古代數學文本蒐集與平行相關的資料，作為幫助學生引起動機的素材，所引入的史料是《幾何原本》與《御製數理精蘊》。歐幾里得的《幾何原本》是一部百科全書式的著作。本書奠基於前人的工作，將希臘數學建築於統一的邏輯基礎之上。歐幾里得建造了平面幾何的理論，《幾何原本》非常完整且清楚，從歐幾里得的時代開始，《幾何原本》就被世人奉為學習平面幾何的圭臬。《幾何原本》全書共 13 卷，卷 1 從 5 個公理和 5 個設準開始。其中第五設準也稱作平行設準，困擾了很多數學家，為了揭開此設準的神秘面紗，導致非歐幾何的出現（Berlinghoff & Gouvea, 2004/2008）。

清朝康熙皇帝時期的一本關於數學的書籍《御製數理精蘊》，簡稱《數理精蘊》，是一部介紹包括西方數學知識在內的數學百科全書。全書分上下兩編及附錄。上編五卷專講數理，立綱明體，是全書的基本理論部分。卷二至卷四為《幾何原本》，是根據張誠、白晉的法文譯本修訂的，共 12 章，分別講述了三角形、四邊形、圓及內接外切多邊形、立體幾何、比例、相似形、勾股定理、圓錐體及球與橢圓體的表面積和體積、幾何作圖法等內容（韓琦，1993）。

研究者以前述兩份數學史料引起學生動機，再參照課本內容設計成「平行與截線性質」幾何文本。關於文本的布置，首先研究者讓學生思考「什麼是平行？請利用日常生活中的例子來說明平行的意義。」，讓學生嘗試自行說出平行的意義。接著從古代數學文本《幾何原本》的平行設準：「一條直線與另外兩條直線相交，若某一側的兩個內角和小於兩直角，則這兩條直線不斷延長後在這一側相交。」、以及《數理精蘊》中關於平行線的定義：「凡二線之間寬狹相離之分俱等，則此二線謂之平行線也。」其後鋪排數學課本中平行的定義：「（1）在同一平面上，兩直線同時垂直於另一直線，則稱此兩直線互相平行。（2）當兩條直線平行時，若有一條直線與其中另一條平行直線垂直，則此直線必與另一條平行直線垂直。（3）兩平行線間的距離處處相等。平行線間的距離指的是做垂直線段的長度。」，讓學生思考彼此之異同，加深對平行意義的印象。此一部分教師主要鋪陳數學文本上關於平行的意義讓學生與現在平行的定義做比較，幫助學生學習。接著由平面上任意兩直線被一直線所截，介紹八個截角的名稱，之後介紹兩平行線被一垂直線所截，這八個截角都是 90 度，接續介紹兩平行線被任一直線所截，這八個截角的名稱與角度關係。再來是說明平行線與不平行線的截角性質，讓學生透過圖形記住截角名稱、位置、性質。

「平行與截線性質」幾何文本編排方式是先介紹平行的定義再鋪排例題；接著介紹截線、截角的意義再接續例題；以及截角性質的內容鋪陳再引進例題。至於課本內容則是由例題得出平行的意義，由平行與不平行去了解截線與截角，再說明平行線截角性質。研究團隊完成此份文本後，也經由另外兩位國中教師檢視，並延請數學教育專家進行審查，再做定稿確認，實施於教學。

（二）「平行與截線性質」學習工作單

有關學習工作單裡的題目所對應之 PISA 閱讀理解歷程，如下表 1 所示：

表 1

「平行與截線性質」學習工作單內容分析表

學習工作單之題目	**PISA** 閱讀理解歷程
1. 在一平面上有相異三直線 L_1、L_2、L_3，若 $L_1\perp L_2$，$L_2\perp L_3$，則 L_1 與 L_3 有什麼關係？	擷取與檢索
2. 如圖 1，$L_1 // L_2$，那麼同位角∠1 與∠5、∠3 與∠7、∠4 與∠8 的度數相等嗎？	擷取與檢索
3. 如圖 2，∠3＝80°，求其他七個截角的度數。	擷取與檢索
4. 如圖 3，$L_1 // L_2$，M、N 都是 L_1 與 L_2 的截線，∠2＝108°、∠4＝81°，求∠1、∠3 和∠5 的度數。	統整與解釋
5. 如圖 4，$L_1 // L_2$，$M_1 // M_2$，求∠1、∠2 的度數。	擷取與檢索
6. 若∠A 與∠B 角的兩邊互相平行，∠A＝70°，則∠B＝______。	省思與評鑑
7. 如圖 5，$L_1 // L_2$，已知∠1＝135°，∠2＝55°，求∠ABC 的度數。	統整與解釋

此份學習工作單之題目來源大部分選自課本及習作，至於閱讀理解歷程的「擷取與檢索」，表示能從所閱讀的題目中，找到所需要的資訊；「統整與解釋」指的是閱讀後，能正確解讀資訊的意義，完成解題；「省思與評鑑」則是將所閱讀內容，與自己原有的知識、想法和經驗相連結，綜合判斷後，提出自己的解法。研究團隊完成此份學習工作單，同樣也經由另外兩位國中教師檢視，並延請數學教育專家進行審查，再做定稿確認，做為教學實驗前、後測之用。

三、資料蒐集與分析

本研究的資料收集方式，主要以「文本收集」之方式取得，此處的文本是指學生所填答的學習工作單，也就是教學實驗中學生對於幾何文本的理解情形填答。學生是學習的主體，我們從實作中觀察學生之反應，探究如何開發合適之幾何文本，幫助國中生之閱讀理解。文本收集所得之資料由研究者分析後，也經由研究團隊成員加以討論確認。

肆、結果與討論

在本研究中，參與教師們首先討論對學生閱讀理解幾何文本的認識及教學掌握，研究團隊交叉討論，集思廣義，再行統整定稿。所完成之文本經過專家審查後，參與教師進行班級實作，從中體會所開發之幾何文本與相應之教學活動如何進行及了解學生之回饋。研究團隊所完成之「平行與截線性質」幾何文本中的評量試題依照擷取與檢索、統整與解釋、省思與評鑑分類，藉由參與教師在自己所任教班級之教學實驗，蒐集學生閱讀幾何文本之資料，作為日後設計幾何文本以幫助學生閱讀理解教學之參考。以下針對本次教學實驗所得之結果，進行整理與分析。

本研究的前測在實驗組指的是學生自行閱讀「平行與截線性質」幾何文本後，填寫學習工作單；在控制組學生指的是學生自行閱讀課本後作的測驗。後測在實驗組指的是教師引導學生閱讀「平行與截線性質」幾何文本後作的測驗；在控制組指的是教師引導學生閱讀課本後作的測驗。研究者分別計算擷取與檢索（第 1、2、3、5 題）、統整與解釋（第 4、7 題）、省思與評鑑（第 6 題），以及整份測驗的答對題數，以代表受試者在各向度試題的答題情況。

表 2 為組內迴歸係數同質性檢定的考驗結果，「擷取與檢索」的 $F(1,59) = 0.777, p > .05$、「統整與解釋」的 $F(1,59) = 0.448, p > .05$、「總分」的 $F(1,59) = 0.547, p > .05$，均未達顯著水準，應接受虛無假設，表示實驗組與控制組的組內迴歸係數沒有顯著差異，符合共變數組內迴歸係數同質性的假設，可以進行共變數分析。由於二組學生在前測的省思與評鑑（第 6 題）均未答對，無法進行組內迴歸係數同質性檢定考驗，故此部分直接對後測進行共變數分析。

表 2

組內迴歸係數同質性檢定摘要表

變異來源	平方和	*df*	平均平方和	*F*	顯著性
組別 * 擷取與檢索（前測）	0.750	1	0.750	0.777	.382
組別 * 統整與解釋（前測）	0.211	1	0.211	0.448	.506
組別 * 省思與評鑑（前測）	0.000	0			
組別 * 總分（前測）	1.038	1	1.038	0.547	.463

註：依變數為後測各向度

表 3 為共變數分析的結果，在排除前測的影響後，實驗組與控制組在「擷取與檢索」的 $F(1,58) = 0.997, p > .05$、在「省思與評鑑」的 $F(1,58) = 0.873, p > .05$、以及在「整體測驗」的 $F(1,58) = 0.047, p > .05$，均未達顯著水準，應接受虛無假設，表示實驗組與控制組在這三部分的試題答題情況均沒有顯著差異；而在「統整與解釋」的 $F(1,58) = 5.767, p < .05$，達顯著水準，應拒絕虛無假設，表示實驗組與控制組在「統整與解釋」的試題答題情況有顯著差異，即不同

的教學法對於受試者在「統整與解釋」的試題答題情況有顯著影響。

表 3

共變數分析摘要表

變異來源	平方和	*df*	平均平方和	*F*	顯著性
共變項：擷取與檢索（前測）	62.099	1	62.099	64.578	.000
組間：組別	0.959	1	0.959	0.997	.322
誤差	55.774	58	0.962		
共變項：統整與解釋（前測）	12.813	1	12.813	27.402	.000
組間：組別	2.697	1	2.697	5.767	.020
誤差	27.121	58	0.468		
共變項：省思與評鑑（前測）	0.001	1	0.001	0.057	.813
組間：組別	0.015	1	0.015	0.873	.354
誤差	0.969	58	0.017		
共變項：總分（前測）	155.830	1	155.830	82.714	.000
組間：組別	0.089	1	0.089	0.047	.829
誤差	109.270	58	1.884		

註：依變數為後測各向度

表 4 為實驗組與控制組的原始平均數與調整後平均數摘要表。在排除前測的影響後，實驗組在「統整與解釋」的試題答題情況（調整後的平均數 $M = 1.156$）顯著優於控制組的試題答題情況（調整後的平均數 $M = 0.709$）。

此外，為探討實驗組的學生在前、後測上有無明顯地改變，以下將針對實驗組的學生分別在「平行與截線性質」擷取與檢索、統整與解釋、省思與評鑑和總分進行後測－前測的成對樣本 t 檢定。

表 **4**

後測原始平均數與調整後平均數摘要表

	組別	人數	原始平均數（標準誤）	調整後平均數（標準誤）
擷取與檢索	實驗組	33	2.82 (1.467)	2.803 (0.171)
	控制組	28	3.04 (1.347)	3.054 (0.185)
統整與解釋	實驗組	33	1.30 (0.918)	1.156 (0.122)
	控制組	28	0.54 (0.693)	0.709 (0.133)
省思與評鑑	實驗組	33	0.03 (0.174)	0.031 (0.023)
	控制組	28	0.00 (0.000)	0.000 (0.025)
總分	實驗組	33	4.15 (2.360)	3.921 (0.240)
	控制組	28	3.57 (1.794)	3.843 (0.261)

由表 5 可知，實驗組後測和前測的成對樣本 t 檢定的結果，在「擷取與檢索」的 $t(32) = 0.511$, $p > .05$，未達顯著水準，應接受虛無假設，表示實驗組學生在這部分的試題答題情況沒有顯著差異，但是後測略優於前測（後測-前測 $M = .091$）。在「統整與解釋」的 $t(32) = 2.811$, $p < .01$，達顯著水準，應拒絕虛無假設，表示實驗組學生在這部分的試題答題情況有顯著差異，而且後測顯著優於前測（後測-前測 $M = 0.424$）。在「省思與評鑑」僅有 1 題，而且前、後測的試題答對情形一樣，所以無法比較。在「總分」的 $t(32) = 2.026$, $p > .05$，未達顯著水準，應接受虛無假設，表示實驗組學生在這部分的試題答題情況沒有顯著差異，但是後測略優於前測（後測-前測 $M = 0.515$）。

表 **5**

實驗組後測和前測的成對樣本 **t** 檢定摘要表

測驗	平均數	標準差	平均數的標準誤	t	自由度	顯著性(雙尾)
擷取與檢索(後-前)	0.091	0.947	0.165	0.511	32	.585
統整與解釋(後-前)	0.424	0.867	0.151	2.811**	32	.008
省思與評鑑(後-前)	0.000	0.250	0.044	0.000	32	1.000
總分(後-前)	0.515	1.460	.254	2.026	32	.051

註：$^{**}p < .01$

根據上述的統計分析結果，在「統整與解釋」的試題答題情況，後測實驗組顯著優於控制組，即表示以文本閱讀為主進行的教學活動優於以閱讀課本為主進行的教學活動。而在探討實驗組的學生在前、後測上有無明顯改變的結果中，實驗組學生的後測表現優於前測的表現，顯示教學實驗對實驗組的學生在本測驗有良好的效果。整體而言，學生在「平行與截線性質」文本的課程實施中，後測的表現皆優於前測的表現。

伍、結論與建議

本研究所開發之幾何文本，首先藉由數學史料的鋪陳，引起學生之學習動機及思索。Fasanelli（2000）認為在數學教學上可以藉由文本讓學生比較不同解題方法或思考方向，解放對數學的單一思考方式。研究者鋪陳《幾何原本》中數學史料的目的，是藉由介紹平行公設的內容，讓學生了解「平行」的意義。至於呈現《數理精蘊》中關於平行線部分的文本，則是讓學生經由欣賞《數理精蘊》古文中對於平行的描述，能更加清楚「平行」的概念。透過《幾何原本》和《數理精蘊》兩份數學文本對於「平行」的不同敘寫，希望學生能進一步探索，再進行之後平行課程的教學。

本份幾何文本在各主題的進行上，都先將主題概念整理在最前面，讓學生可以經由閱讀先了解此主題所要學習的重點，再來由練習範例與隨堂練習的題目，加深對本主題的了解。參與教師以 PISA 閱讀理解歷程為參考，讓學生在閱讀文本中，體會擷取與檢索、統整與解釋及省思與評鑑的歷程。在教學進行中，授課教師首先讓學生思考學過的平行或是想想生活中有那些是平行的例子，再代入《幾何原本》與《數理精蘊》中平行的定義，讓學生對於平行多一些了解，以引起學生的興趣。接著介紹截線與截角、截角性質，讓學生可以利用學過的截角性質完成之後的學習工作單。從教學觀察中發現，閱讀融入數學史素材的幾何文本，能幫助學生對於數學主題之理解，學生經由閱讀文本的過程中，發現《幾何原本》與《數理精蘊》中對於平行的定義不同，也引發相互之討論。或許是由於這樣的引導鋪陳，以致從前、後測之結果顯示出，在統整與解釋的面向上，實驗組班級有優於控制組班級的表現。

至於學習工作單上，省思與評鑑面向的題目只編入第 6 題一題，有關本題的布置，學生要思考如何畫出兩個角的兩邊要互相平行的圖形，又要進行解題，這對於剛學完平行概念的學生來說並不容易，而且大部分會畫出圖形並回答的學生，都只寫出一個答案，但是研究者要求回答兩個答案才給分，這也是學生前、後測表現都不理想的原因之一。如何開發更完整之幾何文本，讓學生在擷取與檢索及省思與評鑑的歷程上都能有所精進，正有待研究者更進一步的努力。

致謝

本文之得以完成，主要來自國科會的專題研究計畫（計畫編號：NSC 102-2511-S-845 -009）的研究成果，在此感謝國科會之補助，至於文責，則由作者自負。

參考文獻

左台益、呂鳳琳、曾世綺、吳慧敏、陳明璋、譚寧君（2011）。以分段方式降低任務複雜度對專家與生手閱讀幾何證明理解的影響。**教育心理學報**，**43**（閱讀專刊），291-314。doi: 10.6251/BEP.20110517

行政院（2013 年 12 月 5 日）。**江揆聽取「我國中小學學生學習表現之國際評比：現況分析與展望」報告**。檢自 http://www.ey.gov.tw/News_Content.aspx?n=F8BAEBE9491FC830&s=D0739C9FEB21D331

沈志龍、蘇意雯（2009）。當動畫與學習工作單相遇－數學史融入國小數學教學之實作研究。**教師天地**，**163**，70-77。

林妙霜、蘇意雯（2009）。數學史讓數學變有趣。**師友月刊**，**509**，81-83。

林福來（2011 年 11 月 23 日）。**數學閱讀、猜想與建模**。國立科學工業園區實驗高級中學之演講，新竹，臺灣。

洪萬生（2000）。《無異解》中的三案初探：一個 HPM 的觀點。**科學教育學刊**，**8**（3），215-224。

洪萬生、英家銘、蘇意雯、蘇惠玉、楊瓊茹、劉柏宏（2009）。**當數學遇見文化**。臺北：三民。

秦麗花、邱上真（2004）。數學文本閱讀理解相關因素探討及其模式建立之研究～以角度單元為例。**特殊教育與復健學報**，**12**，99-121。

秦麗花（2007）。**數學閱讀指導的理論與實務**。臺北：紅葉文化。

教育部（2008）。**國民中小學九年一貫課程綱要**。臺北：作者。

行政院中部聯合服務中心（2010 年 12 月 13 日）。**我國參與國際學生能力評量計畫（PISA）2009 結果**。檢自 http://www.ey.gov.tw/eycc/News_Content.aspx?n=DF52F83A5B7D2A47&sms=114B66117B4BF117&s=D0C45A32CD5F9B3B

臺灣 PISA 國家研究中心（2008）。**PISA 閱讀素養應試指南**。檢自 http://pisa.nutn.edu.tw/download/Publishing/pisa_read_guide.pdf

臺灣 PISA 國家研究中心（2011）。**臺灣 PISA 2009 結果報告**。臺北：心理。

蔡幸霓、蘇意雯（2009）。數學史融入國小數學教學之實作研究－以分數乘、除法為例。**台灣數學教師（電子）期刊**，**20**，17-40。

閱讀與學習研究室（2009 年 5 月 11 日）。**臺灣四年級學生閱讀素養（PIRLS 2006 報告）**。檢自 http://lrn.ncu.edu.tw/Teacher%20web/hwawei/PIRLS%202006%20National%20Report%EF%BC%882nd%20Edition%EF%BC%89.pdf

韓琦（1993）。數理精蘊提要。收錄於郭書春（主編），**中國科學技術典籍通彙：數學卷第三分冊**（頁 1-10）。鄭州：河南教育。

Berlinghoff, W. P., & Gouvea, F. Q.（2008）。**溫柔數學史：從古埃及到超級電腦**（洪萬生、英家銘暨 HPM 團隊譯）。臺北：博雅書屋。（原作出版於 2004 年）

Mayer, R. E.（1997）。**教育心理學－認知取向**（林清山譯）。臺北：遠流。（原作出版於 1987 年）

Allington, R. L. (2006). *What really matters for struggling readers: Designing research-based programs* (2nd ed.). Boston, MA: Allyn & Bacon.

Balacheff, N. (1990). Towards a Problématique for Research on Mathematics Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(4), 258-272. doi: 10.2307/749524

Borasi, R., Siegel, M., Fonzi, J. & Smith, C. F. (1998). Using transactional reading theory to support sense-making and discussion in mathematics classrooms: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(3), 275-305. doi: 10.2307/749791

Budiansky, S. (2001). The trouble with the text books. *Prism, 10*(6), 24-27.

Carter, T. A., & Dean, E. O. (2006). Mathematics intervention for grades 5-11: Teaching mathematics, reading, or both? *Reading Psychology*, *27*(2-3), 127-146. doi: 10.1080/02702710600640248

Dematte, A. & Furinghetti, F. (2011). History, figures and narratives in mathematics teaching. In V. Katz & C. Tzanakis (Eds.), *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education* (pp. 103-112). Washington, DC: MAA. doi: 10.5948/UPO9781614443001.011

Fasanelli, F. (2000). The political context. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 1-38). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47220-1_1

Fey, J. T. (Ed.). (1984). *Computing and mathematics: The impact on secondary school curricula*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Fuentes, P. (1998). Reading comprehension in mathematics. *The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas*, *72*(2), 81-88. doi: 10.1007/0-306-47220-1_1

Herber, H. (1978). *Teaching reading in the content areas* (2nd ed.). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

McKenna, M. C., & Robinson, R. D. (2002). *Teaching through text: Reading and writing in the content area.* New York, NY: Pearson.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Muth, K. D. (1984). Solving arithmetic word problems: Role of reading and computational skills. *Journal of Educational Psychology*, *76*(2), 205-210. doi: 10.1037//0022-0663.76.2.205

OECD (2010). *PISA 2009 Assessment framework: Key competencies in reading, mathematics and science*. Paris, France: OECD Publishing. doi: 10.1787/9789264062658-en

Ostler, E. (1997). The effect of learning mathematical reading strategies on secondary students' homework grades. *The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas, 71*(1), 37-40. doi: 10.1080/00098659709599320

Palinscar, A. S., & Brown, A. L. (1984). Reciprocal teaching of comprehension-fostering and comprehension-monitoring activities. *Cognition and instruction*, *1*(2), 117-175. doi: 10.1207/s1532690xci0102_1

Pengelley, D. (2011).Teaching with primary historical sources: Should it go mainstream? Can it? In V. Katz & C. Tzanakis (Eds.), *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education* (pp. 1-8). Washington, DC: MAA. doi: 10.5948/UPO9781614443001.002

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Richardson, J. S., Morgan, R. F., & Fleener, C. E. (2011). *Reading to learn in the content areas* (8th ed.). Belmont, CA: Wadsworth.

Schumm, J. S., & Mangrum, C. T. (1991). FLIP: A framework for content area reading. *Journal of Reading*, *35*(2), 120-124.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(1), 4-36. doi: 10.2307/30034698

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher*, *78*(6), 448-456.

Singer, H., & Donlan, D. (1985). *Reading and learning from text*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Vaughan, J. L., & Estes, T. H. (1986). *Reading and reasoning beyond the primary grades*. Boston, MA: Allyn & Bacon.

Vygotsky, L. (1978). Interaction between learning and development. In M. Gauvain & M. Cole (Eds.), *Readings on the development of children* (pp. 34-40). New York, NY: Scientific American Books.

Woodward, A. & Elliott, D. L. (1990). Textbooks: Consensus and controversy. In D. L. Elliott & A. Woodward (Eds.), *Textbooks and schooling in the United States* (Yearbook of the National Society for the Study of Education) (Vol. 89, pp.146-161). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Yang, K. L. (2012). Structures of cognitive and metacognitive reading strategy use for reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(3), 307-326. doi: 10.1007/s10649-011-9350-1

Yang, K. L., & Lin, F. L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(1), 59-76. doi: 10.1007/s10649-007-9080-6

Yang, K. L., & Lin, F. L. (2012). Effects of reading-oriented tasks on students' reading comprehension of geometry proof. *Mathematics Education Research Journal*, *24*(2), 215-238. doi: 10.1007/s13394-012-0039-2

附錄一

平行與截線性質文本

請問：什麼是平行？請利用日常生活中的例子來說明平行的意義。

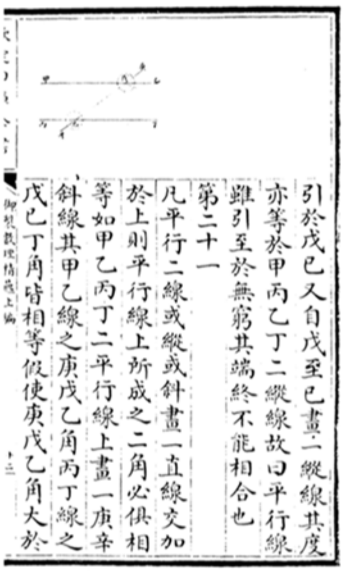
一、《幾何原本》的平行公設

歐幾里得（Euclid，公元前 300 年前後）的《幾何原本》是幾何史上第一本有系統地討論幾何的著作。雖然本書裏面的結果大多數都是前人已知的，但它所採用的公理方法卻被數學家沿用至今。精心選出來的 5 條公理、5 條設準，充份顯示出歐幾里得的天才及驚人的洞察力。特別是第五設準的引入，吸引了無數一流的數學家嘗試去證明，這導致非歐幾何的出現，讓我們對歐氏幾何有更深入的了解。

平行設準：如果一條線段與兩條直線相交，在某一側的內角和小於兩直角，那麼這兩條直線在不斷延伸後，會在內角和小於兩直角的一側相交。

二、在《數理精蘊》中關於平行線的部分

清朝康熙皇帝時期的一本關於數學的書籍《御製數理精蘊》，簡稱《數理精蘊》，是一部介紹包括西方數學知識在內的數學百科全書。全書分上下兩編及附錄。上編五卷專講數理，立綱明體，是全書的基本理論部分。卷二至卷四為《幾何原本》，是根據張誠、白晉的法文譯本修訂的，共 12 章，分別講述了三角形、四邊形、圓及內接外切多邊形、立體幾何、比例、相似形、勾股定理、圓錐体及球與橢圓体的表面積和體積、幾何作圖法等內容。以下是在《數理精蘊》中關於平行線的部分（http://archive.org/stream/06076284.cn#page/n76/mode/2up）


引於戊巳又自戊至巳畫二縱線其度
亦等於甲丙乙丁二縱線故曰平行線
雖引至於無窮其端終不能相合也
第二十一
凡平行二線或縱或斜畫一直線交加
於上則平行線上所成之二角必俱相
等如甲乙丙丁二平行線上畫一庚辛
斜線其甲乙線之庚戊乙角丙丁線之
戊巳丁角皆相等假使庚戊乙角大於


二線為相距度分也如甲乙丙丁二線
平行自上線甲乙二處至下線丙丁二
處畫二縱線則此二線為相等線其度
必等然則甲乙丙丁相對之間其相距
之遠近不已見耶
第二十
平行二線雖引至於無窮其端必不能
相合蓋二線相離之度各處遠近俱為
相等故也如甲乙丙丁平行二線隨意


平行線
圜界四分之一者為直角故如其為直角也若過九十度者
為丁乙丙鈍角不足九十度者為丙乙
戊銳角觀此三角之度其餘可類推矣
第十八
凡二線之間寬狹相離之分俱等則此
二線謂之平行線也
第十九
欲求平行線之間相距幾何則自上一
線不拘何處至下一線畫二縱線則此

主題一：平行

觀察學校運動場的直線跑道，各跑道之間的分隔線是否互相平行不會相交？起跑線是否與各分隔線都垂直？在日常生活中，常用「平行」來描述同一平面上兩條永不相交的直線，但是只靠延長直線去檢查兩條直線有沒有相交是很困難的。

平行線的意義：

（1）在同一平面上，兩直線同時垂直於另一直線，則稱此兩直線互相平行。

（2）當兩條直線平行時，若有一條直線與其中另一條平行直線垂直，則此直線必與另一條平行直線垂直。

（3）　兩平行線間的距離處處相等。平行線間的距離指的是做垂直線段的長度。

例 1.如圖 1，若直線 L_1 與直線 L_2 同時垂直 L 於 A、B 兩點，則 L_1 與 L_2 會相交嗎？

L

L_1　A

C

L_2　B

圖 1

說明**:** 設 L_1、L_2 交於一點 C，如下圖，則 A、B、C 三點可形成一個三角形。

在$\triangle ABC$ 中，$\because \angle CAB$、$\angle CBA$ 都是直角，$\therefore \angle CAB + \angle CBA + \angle C > 180°$，但已知三角形的內角和為 180°，不可能超過 180°，所以我們的假設是錯誤的，因此當 L_1 與 L_2 同時垂直於 L 時，L_1 與 L_2 不會相交

在一平面上，兩直線如果可以找到一條共同的垂直線，我們就稱這兩直線互相平行，如圖 2，L_1 與 L_2 同時垂直於直線 L，所以它們互相平行，記作「$\boldsymbol{L_1 // L_2}$」，讀作「L_1 **平行**於 L_2」。

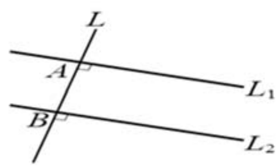


圖 2

例 2.如圖 3，在一平面上有相異三直線 L_1、L_2、L_3，若 $L_1 // L_2$，$L_2 // L_3$，則 L_1 與 L_3有什麼關係？

說明：若 $L_1 // L_2$，則會有一條直線 M 同時垂直於 L_1、L_2，又 $L_2 // L_3$ 時，M 也會垂直於 L_3，$\therefore M$ 同時垂直於 L_1、L_3，因此 $L_1 // L_3$。

也就是說，平面上的相異三直線 L_1、L_2、L_3，若 $L_1 // L_2$，$L_2 // L_3$，則 $L_1 // L_3$。

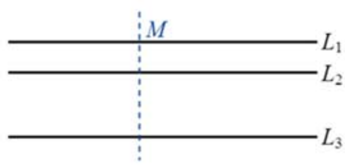


圖 3

主題二：截線與截角

在一平面上如圖 4，若直線 L 同時與另兩條直線 L1、L2 交於不同的兩點，如圖 3，我們稱直線 L 為 L1、L2 的截線。

而截線 L 與 L1、L2 形成八個交角，即圖中的∠1、∠2、……、∠7、∠8，這些角都稱為截角。

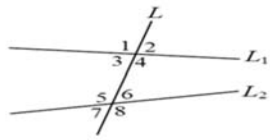


圖 4

截角與截角之間，隨著彼此的位置關係，會有不同的名稱。

同位角：∠1 與∠5 分別在 L1 與 L2 的上方，且都在截線 L 的左方，像這樣**位置對應相同的一組角稱為同位角**。同樣的，∠2 與∠6、∠3 與∠7、∠4 與∠8 也是同位角。

內錯角：∠4 與∠5 在 L1 與 L2 的內側，且交錯在截線 L 的**兩側**，像這樣的一組角稱為內錯角。同樣的，∠3 與∠6 也是內錯角。

同側內角：∠3 與∠5 在 L1 與 L2 的內側，且都在截線 L 的**同側**，像這樣的一組角稱為同側內角。同樣的，∠4 與∠6 也是同側內角。

例 3.如圖 5，直線 L 為 L_1、L_2 的截線，則：

(1)∠2 的同位角是_______。　(2)∠3 的內錯角是_______。

(3)∠4 的同側內角是_____。

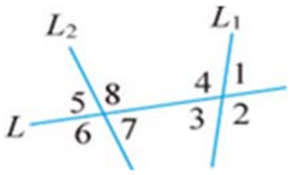


圖 5

主題三：平行線的截線與應用

兩平行線被一直線所截的同位角相等、內錯角相等、同側內角互補。

當兩條平行線被另一條線所截時，截出來的同側內角、內錯角、同位角有什麼性質呢？我們來看下面的說明。

☆如圖 6，$L_1 // L_2$，**若截線 L 與 L_1 垂直**，則 L 也必與 L_2 垂直，此時∠1、∠2、……、∠7、∠8 八個截角都是直角。

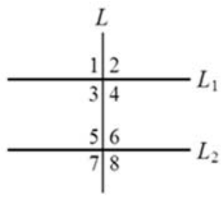


圖 6

☆但是如果截線與平行線不垂直呢？如圖 7，$L_1 // L_2$，L 是截線，而且 **L 與 L_1、L_2 不垂直**。

我們先來看**同位角**，如圖 7 中的∠2 與∠6。

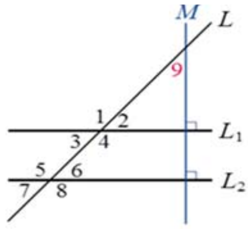


圖 7

∵$L_1 // L_2$，因此可找到一條垂直線 M 同時與 L_1、L_2 垂直。
由圖 7 可知 $\angle 2+\angle 9+90°=180°$，$\angle 6+\angle 9+90°=180°$，
因此 $\angle 2+\angle 9+90°=\angle 6+\angle 9+90°$，∴ $\angle 2=\angle 6$。
由上可知，**兩平行線被一直線所截的同位角相等**。

接下來，我們來看兩平行線的**內錯角**，如圖 7 中的 $\angle 3$ 與 $\angle 6$。
當 $L_1 // L_2$ 時，同位角 $\angle 2=\angle 6$，又 $\angle 3=\angle 2$ (對頂角相等)，
∴ $\angle 3=\angle 6$。同樣的，另一組內錯角 $\angle 4=\angle 5$。
因此，**兩平行線被一直線所截的內錯角相等。**

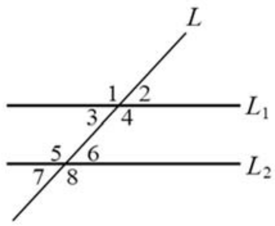


圖 8

最後來看**同側內角**，如圖 8 中的 $\angle 4$ 與 $\angle 6$。
當 L1 // L2 時，同位角 $\angle 2=\angle 6$，又 $\angle 2+\angle 4=180°$，
∴ $\angle 4+\angle 6=180°$。同樣的，另一組同側內角 $\angle 3+\angle 5=180°$。
因此，**兩平行線被一直線所截的同側內角互補。**

例 4. 如圖 9，$L_1//L_2$，L 是 L_1 與 L_2 的截線，若 $\angle 1=50°$，則：

(1) $\angle 1$ 的同位角是______，它是______度。
(2) $\angle 3$ 的同位角是______，它是______度。
(3) $\angle 4$ 的內錯角是______，它是______度。
(4) $\angle 3$ 的同側內角是____，它是______度。

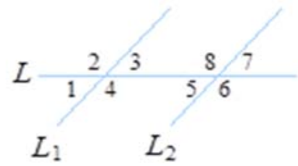


圖 9

解：∵ $\angle 1$ 是 $\angle 3$ 的對頂角 ∴ $\angle 1=\angle 3=50°$，$\angle 2$ 和 $\angle 4$ 都是 $\angle 1$ 的補角，
∴ $\angle 4=\angle 2=180°-\angle 3=130°$。∵平行線所截的同位角相等 ∴ $\angle 5=\angle 1=50°$，
$\angle 6=\angle 4=130°$，$\angle 7=\angle 3=50°$，$\angle 8=\angle 2=130°$。
由上可知，$\angle 1=\angle 5=\angle 3=\angle 7=50°$；$\angle 2=\angle 8=\angle 4=\angle =130°$。

例 5. 如圖 10，$L_1 // L_2$，M、N 都是 L_1 與 L_2 的截線，
其中 $N \perp L_2$。根據圖上所標示的度數，
求 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ 和 $\angle 4$ 的度數。

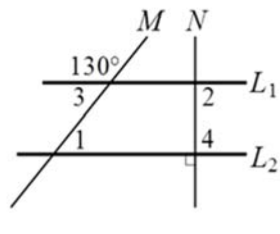


圖 10

例 6.如圖 11，$L_1 // L_2$，$M_1 // M_2$，求 $\angle 1$、$\angle 2$ 的度數。
解: ∵ $M_1 // M_2$，∴ $\angle 1=68°$ (同位角相等)；
∵ $L_1 // L_2$，∴ $\angle 2=\angle 1=68°$ (同位角相等)。

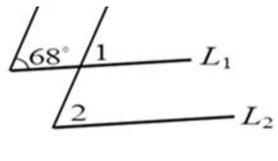


圖 11

例 7.如圖 12，L_1 // L_2，已知∠1＝50°，∠2＝60°，求∠ABC 的度數。

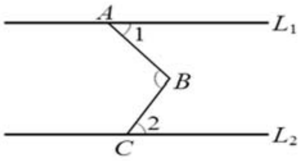


圖 12

如圖 13，∵L1 // L2，∴∠ADC＝∠2＝60° (內錯角相等)，
∵∠ABC 是△ABD 的外角，
∴∠ABC＝∠1＋∠ADC＝50°＋60°＝110°。

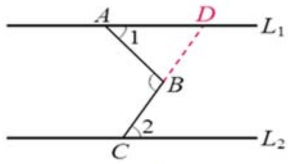


圖 13

如圖 14，過 B 點作 L_3 // L_1　∵L_1 // L_2，∴L_3 // L_2。
∵L_1 // L_3，∴∠3＝∠1＝50° (內錯角相等)，
∵L_2 // L_3，∴∠4＝∠2＝60° (內錯角相等)，
因此∠ABC＝∠3＋∠4＝50°＋60°＝110°。

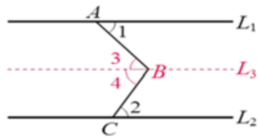


圖 14

附錄二

平行與截線性質學習工作單

班級：____ 座號：____ 姓名：__________

1.在一平面上有相異三直線 L_1、L_2、L_3，若 $L_1 \perp L_2$，$L_2 \perp L_3$，則 L_1 與 L_3 有什麼關係？

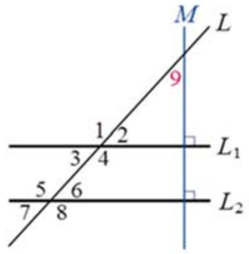


圖 1

2.如圖 1，$L_1 // L_2$，那麼同位角∠**1** 與∠**5**、∠**3** 與∠**7**、∠**4** 與∠**8** 的度數相等嗎？

3.如圖 2，∠**3**＝**80°**，求其他七個截角的度數。

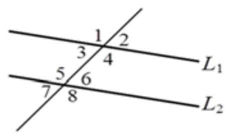


圖 2

4.如圖 3，$L_1 // L_2$，M、N 都是 L_1 與 L_2 的截線，∠**2**＝**108°**、∠**4**＝**81°**，求∠**1**、∠**3** 和∠**5** 的度數。

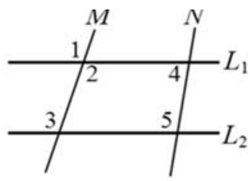
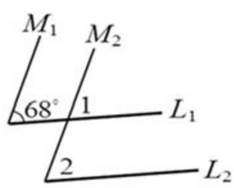


圖 3

5.如圖 4，$L_1 // L_2$，$M_1 // M_2$，求∠**1**、∠**2** 的度數。



6.若∠**A** 與∠**B** 角的兩邊互相平行，∠**A**＝**70°**，則∠**B**＝______。

7.如圖 5，$L_1 // L_2$，已知∠**1**＝**135°**，∠**2**＝**55°**，求∠ABC 的度數。

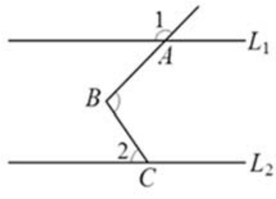


圖 5

秦爾聰、劉致演、張克旭、段曉林（2015）。
數學臆測探究教學對商職學生數學學習成就與動機之影響。
臺灣數學教育期刊，2（2），53-83。
doi: 10.6278/tjme.20151001.003

數學臆測探究教學對商職學生數學學習成就與動機之影響

秦爾聰[1]　劉致演[1]　張克旭[2]　段曉林[1]
[1]國立彰化師範大學科學教育研究所
[2]國立臺中高級家事商業職業學校

本研究旨於探討數學臆測探究教學策略對於商職二年級學生數學學習動機及學習成就的影響。研究設計採準實驗研究之不等組前後測設計；資料收集及分析採量為主質為輔的方式進行。兩個案班級各 39 人，隸屬同一任課教師，為中部某公立家商二年級學生。實驗組採臆測探究教學，控制組則維持傳統講述式教學；研究時程共歷經一整個學年。評量學生數學學習動機工具為數學學習動機問卷，檢驗學生學習成效工具為六次段考成績。研究結果發現，臆測探究教學組學生動機提升與傳統教學組學生間存在顯著差異，學習成就雖未存在顯著差異卻呈現穩定成長的態勢。顯示在臆測探究教學環境脈絡下，學生願意主動參與學習、採用不同策略解決問題、重視數學學習價值，在精熟目標導向引導下期許自己是高自我效能的學習者，進而在學習成就上呈現穩定成長的狀態。

關鍵詞：探究教學、數學臆測、學習成就、學習動機

通訊作者：劉致演，e-mail：unique.cs@msa.hinet.net
收稿：2015 年 4 月 1 日；
接受刊登：2015 年 10 月 1 日。

Journal homepage: tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=56

Chin, E. T., Liu, C. Y., Chang, K. H., & Tuan, H. L. (2015).
Influences of conjecturing-Inquiry teaching on commercial vocational high school students' achievements and motivation towards mathematics Learning
Taiwan Journal of Mathematics Education, *2*(2), 53-83.
doi: 10.6278/tjme.20151001.003

Influences of Conjecturing-Inquiry Teaching on Commercial Vocational High School Students' Achievements and Motivation towards Mathematics Learning

Erh-Tsung Chin[1] Chih-Yen Liu[1] Ke-Hsu Chang[2] Hsiao-Lin Tuan[1]
[1]Graduate Institute of Science Education, National Chunghua University of Education
[2]Taichung Home Economics and Commercial High School

This study aims to investigate the influences of conjecturing-inquiry teaching on commercial vocational high school students' achievements and motivation toward mathematics learning. The quasi-experimental research with nonequivalent pretest-posttest control group design is adopted. There are thirty-nine students of each of the two groups, which are grade ten and taught by the same mathematics teacher from a public vocational high school in the middle of Taiwan. The conjecturing-inquiry teaching has been adopted in the experimental group for a whole academic year, while the traditional expository teaching in the control group. The instrument for examining students' motivation toward mathematics learning is the "Students' Motivation toward Mathematics Learning Questionnaire", and for assessing students' learning achievements the six school sectional examinations. The research results indicate that the students of the experimental group show significantly higher motivation toward mathematics learning than those of the control group. Although there is no significant difference between their learning achievements, the students of the experimental group have made steady progress in the six school sectional examinations during the whole academic year. Therefore, it seems to reveal that, under the conjecturing-inquiry teaching environment, students are more willing to get involved in their learning actively, to try different strategies to solve mathematics problems, to value the importance of mathematics learning, and to consider themselves as a learner of high self-efficacy under the goal of mastery. Besides, they are able to make steady progress in their mathematics learning as well.

Keywords: inquiry teaching, mathematical conjecturing, learning achievement, learning motivation

Corresponding author：Chih-Yen Liu，e-mail：unique.cs@msa.hinet.net
Received：1 April 2015;
Accepted：1 October 2015.

壹、緒論

根據教育部統計 100 學年度就讀高中職學生人數共計 768,407 人，其中 47.7%的學生選擇就讀高職、41.4%的學生選擇就讀高中，另有 10.9%的學生就讀綜合高中（教育部，2012），顯示台灣學生在升學的進路選擇上，約有半數選擇職業學校就讀，主要的考量是能同時擁有「學力」及「學歷」。然由於高職教育學科分流過早，課程過於重視職業知識與技能的培養，造成高職學生基礎學科能力培養不足，使得高職學生自我學習的能力薄弱（鄭如雯，2009），此外，高職學生具有中等程度以上的數學學習困擾，個人因素是最主要的困擾原因，考試方面是最主要的困擾表徵，且其數學學習困擾因數學科學期總成績而有差異，並且學習困擾與學習態度呈現負相關（余鴻穎，2006）；事實上，學生在數學學習上的成就表現深刻影響其動機態度的形成，此外，數學學習動機具有早發性、穩定性，並且深受教師的教學及態度所影響（Middleton & Spanias, 1999）。

由於目前普遍的高職數學教學仍以傳統講述的方式進行，雖然表面上是較為有效率的教學方式，但此種教學方式多半仍以教師為中心的學習型態，知識單向傳遞的過程中，學生多半只能達到機械式理解（instrumental understanding）難以達到因果式理解（relational understanding）（Skemp, 1976）。由於“理解”是學習的重要旨趣（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000），因此，如何建置一個幫助學生達成數學理解的環境，則是當前數學教師的關鍵任務。近來興起的「翻轉教室」（flipped classroom）風潮，旨於將學習責任還給學生，教師則應專注於建構主動學習的課室環境。Franke、Kazemi 與 Battey（2007）以整體觀點來看待數學教學，他們認為數學教學旨於建構一個數學學習環境，在此環境中教師應致力於協助學生主動發現數學知識獨有的表徵，能夠激發學生做數學，並且能夠詮釋學生的想法。

「數學探究」即服膺這樣的理念，因為「數學探究」所要強調的就是學習者自發性的「做數學」（doing mathematics），在過程中尋找問題本質的樣式、提出猜想並解由反駁加以修正，與他人溝通與論述，將結果加以歸納，最終將解題過程加以一般化（Baroody, 1993; Mason, Burton, & Stacey, 2010; NCTM, 1989, 1991, 2000; National Research Council [NRC], 1989; Peirce, 1955）。事實上，「做數學」即是數學解題（problem solving）（Baroody, 1993; NCTM, 2000），而一般化、特殊化及類比等數學臆測思維數學臆測（conjecturing）是解題中重要脈絡之一（Polya, 1954; Mason, et al., 2010），故數學臆測與探究是一交織的整體（Cañadas, Deulofew, Figuerias, Reid, & Yevdokimov, 2007）。相關研究亦發現數學探究與臆測教學足以提升學生數學學習的理解（Cañadas, et al., 2007; Lin, 2006），同時亦能強化學生的創造力與問題解決能力（Kwon, Park, & Park, 2006）。

研究顯示非數學高成就學生其學習成就與動機呈現顯著相關（Hannula, 2006; Ma & Xu, 2004），惟雖有實徵性研究（紀雅芳、溫嬙純，2008）以探究教學提升國中生數學學習動機之例證，然卻未能同時提升學生學習成就。有鑑於此，本研究擬嘗試於高職的數學課室中，協助教師以數學臆測探究教學策略進行教學改變，探討該教學改變對於高職學生數學學習成就與動機之影響。

貳、文獻探討

一、數學臆測探究教學

數學臆測是數學探究的核心，兩者在諸多面向上是交織的（Cañadas et al., 2007），因此本研究將此兩者從新定義為臆測探究。數學探究的本質是數學家為解決數學上的困惑與異例，藉由一般化（generalization），將錯綜複雜的片段關係，加以整合成和諧而可理解的整體（Kent, 1997; Peirce, 1955）。此外，數學探究活動的核心是針對欲探討現象設置及建立假說或猜想（Meyer, 2010），但這些假說與猜想必須經過驗證，驗證的方法是透過假設－演繹（hypothetic-deductive）的系統化過程（Lakatos, 1976）。簡言之，數學探究所要強調的就是學習者自發性的「做數學」（doing mathematics），在過程中尋找問題本質的樣式、提出猜想並解由反駁加以修正，與他人溝通與論述，將結果加以歸納，最終將解題過程加以一般化（Baroody, 1993; Mason et al., 2010; NCTM, 1989, 1991, 2000; NRC, 1989; Peirce, 1955）。

在數學學習的過程中，做數學即是解題的過程，然而，「數學家很少直接解決問題，通常他們會先將問題特殊化、提出猜想，然後不斷的修正直到問題能解決」（Mason et al., 2010, p.141），而數學臆測即是解題者在一般化與特殊化的上升與下降來回間，尋找可以否定原先假設的原因並尋找替代的可能性（Polya, 1954）。此外數學臆測理論基礎借鑒於擬經驗（quasi-empirical）主義，主張數學知識具有動態可駁（refute）的特質，並且數學知識的發現即是數學臆測的歷程，藉由形成猜想、檢驗猜想、尋找反駁例證，從定理的證明中發現新的引理或概念等過程（Davis, Hersh & Marchisotto, 1995; Lakatos, 1976）。

Mason 等人（2010）認為數學臆測思維源自於一般化的創造，並根據 Lakatos（1976）啟發式數學臆測（conjecturing）模式的四個階段定義臆測循環模式：（1）描述猜想（conjecture）：在形成的過程中相信它；（2）驗證猜想：遍佈所有已知的例證；（3）反駁猜想：嘗試用困難的情況或反例來否定原猜想，並用將之利用於形成新的猜想，並且能夠被檢驗；（4）獲得新知：辯證為何猜想是對的或者如何修改它，將之應用於新的例子。此外，一般化及特殊化等數學臆測思維亦為數學解題活動中的重要歷程，因此從形成猜想直至獲得新知的過程中，數學探究總伴隨數學臆測思維。綜合前述，我們得以理解數學臆測與數學探究本質上是交織的。數學探究與臆測

之哲學基礎是建構取向的，主張問題研究應與經驗連（Dewey, 1938），並且知識的真實建立於主體際性（inter-subjectivity），是由認知主體與重要他人彼此協商並主動建構（Kilpatrick, 1987）。此外，Richards（1991）認為「學生不會意外地成為主動的學習者，除非經由計畫性的設計，始能讓學生進行結構性的探索與探究」（p.38）。此計畫性的設置，即數學臆測探究教學的旨趣，本研究將數學臆測探究教學定義為：教師由佈題起始，引導學生在發現數學及建構數學新知的過程中，探索數學想法及其關係，形成猜想、尋找可能的反例進行反駁，藉由一般化、特殊化建立及評估論述以論證猜想或形成一般式，最後教師引導全班討論小組發表結果並加以歸納及精緻化（Broasi, 1992; Ernest, 1991; Fernandez & Yoshida, 2004; Franke et al., 2007; Jaworski, 1994; Kilpatrick, 1987）。

Siegel、Borasi 與 Fonzi（1998）提出具有四個遞迴階段的數學探究教學模式：（1）設置及聚焦探究（setting the stage and focusing the inquiry）；（2）執行探究（carrying out the inquiry）；（3）綜合與溝通探究的結果（synthesizing/communication results from the inquiry）；（4）回顧與展望（taking stock and looking ahead）。此數學探究教學模式符應 Dewey（1938）的主張，即問題研究應與學生的經驗產生連結，在“做中學”的過程中致力於尋找解決問題的策略與方法。此外，“問題”是該探究教學模式的核心，因此教師的首要任務是提供學生歷經模糊、異例及矛盾以至於能夠形成問題、猜想及進一步的探索的經驗，幫助學生在計畫性的設置下，進行結構性的探索與探究並成為主動的學習者。因此本研究採 Siegel 等人所主張的數學探究教階段，作為臆測探究教學的核心架構：（1）準備與聚焦探究（setting the stage and focusing the inquiry）：此階段是探究的暖身階段，教師主要工作為介紹活動，喚起學生的初始想法與欲探究主題之知識，並且挑戰學生的原始想法聚焦在值得討論的議題上；（2）執行探究（carrying out the inquiry）：在階段（1）決定出問題與探究的方向後，教師鼓勵學生開始進行臆測、分析、推理與試驗，並經討論後，獲得初步的結果；（3）綜合和溝通來自探究的結果（synthesizing/communication results from the inquiry）：此階段是教師主要工作為：協助學生進行討論，藉由相互辨證、論證的過程，獲致最後結果；學生必須學習如何闡述自己的想法（如運用表格、圖形、證明等）與回應他人的意見；適時引導或幫助學生作結論；（4）評估與延伸（taking stock and looking ahead）：教師於此階段聚焦於統整及歸納學生的數學發現，包括引入「如果-不是（what-if-not）」的提問策略，藉以發現另有且更系統化探究問題的方法。

在臆測探究教學架構中，教師可斟酌學生參與活動的學習目標定義導向、學習活動及假設性學習過程組成假設性學習軌線（hypothetical learning trajectory [HLT]）（Simon, 1995），此軌線包含引導學生針對猜想進行檢驗的特殊化布題及引導學生形成一般式猜想的系統性特殊化過程，最後引導學生進行辯證最後歸納學生的數學發現。其中，數學臆測思維主要成分為猜測

（conjecture）、檢驗、反駁、相信、特殊化、一般化等：（1）猜測：學生能面對問題時，能提出一個合理的敘述，在未經實證之前即為猜測（Yerushalmy, 1993）；（2）檢驗：學生能利用自己的先備知識，針對自己或他人的猜測進行辨證；（3）反駁：指學生反對自己或他人所提出的猜測、證明或論述；（4）相信：指學生接受自己或他人所提出的猜測、證明或論述；（5）特殊化：特殊化是將問題轉換成為簡易的範例，尋找在一般情形下具有較特殊性的性質藉以瞭解原問題（Mason et al., 2010）；一般化：學生有系統地將特殊化後的結果歸納成一般性的規則或樣式（patterns）（Stacey, 1989）。此外依據數學臆測認知發展類型，又可進一步細分為：（1）從有限數量下的離散案例中作經驗性的歸納；（2）從動態案例作經驗性的歸納；（3）類比；溯因（abduction）；（5）基於感知的猜想（Cañadas et al., 2007）。此五種臆測認知發展類型可進一步作為數學任務與布題情境設計之參考。

二、數學學習動機與學習成就

學生的動機為預測學生學習成就的重要組成，跨理論導向的發現學生對於數學成功經驗的覺察，對於其動機的形成有高度的影響（Middleton & Spanias, 1999; Reynolds & Walberg, 1992）。有鑑於此，美國全國教師協會（NCTM, 1989）將「學習重視數學」及「自信於自己的數學能力」此兩動機領域作為學生最重要的數學學習目標。簡言之，動機是個體在特定情境裡具有特定表現的原因，並足以決定個體是否參與給定的情境（Ames, 1992）。同時另有研究指出，學生學習成就得以促進學習態度及動機之形成(Cheung, 1988; Köller, Baumert, & Schnabel, 2001)，並且學生做數學(doing mathematics)的品質攸關於其數學學習動機，更足以預測學習能力水平（Schiefele & Csikszentmihalyi, 1995）。追根究底，學生對於數學的學習態度及投入學習的時間是影響其學習成就的主要因素（Singh, Granville, & Dika, 2002）。至於學習動機，學術上將動機區分為兩種相關的類型：內在動機及外在動機（Ryan & Deci, 2000）。內在動機是驅使或致使學生參與學習是「為了自己」，持有內在動機的學生享受學習所帶來的喜悅，也同時欣然接受任務所帶來的挑戰，亦是激勵個體學習及獲致更佳表現的動力（Lepper, 1988; Middleton, 1995），他們的學習動機傾向聚焦於學習目標，如數學概念的理解或程序的精熟（Dweck, 1986）。持有外在學習動機的學生，參與學習任務主要是為了獲得報償或避免懲罰，此類學生的學習動機是以表現目標為中心（Ames, 1992; Dweck, 1986）。在內在動機及外在動機的兩個極端間似乎存在更多變項足以影響學生的學習成就（Lin, McKeachie & Kim, 2001）；針對學習與動機的實徵性研究結果顯示（Brophy, 1998; Pintrich & Schunk, 2002），自我效能、個人的任務目標、任務價值及學習環境等是支配學生學習動機的重要組成。自我效能是學生對其完成任務能力的覺察（Bandura, 1997），當學生持有高自我效能時，不論任務困難與否，他們相信自己有能力完成任務。動機在學習的認知基礎上，是以目標導向來區分學習者的動機類型，其中尤以精熟目標（mastery goal）

（Duda & Nicholls, 1992）最為重要，當學習者持有精熟目標時，會重視特定領域知識及技能的提升，相信成功仰賴於努力，嘗試以理解的方式學習並與他人合作。

相較於傳統數學課室，探究取向教學的數學課室更能培養學生的精熟目標導向，在此課室裡的學生傾向於相信成功的定義是對於數學的理解並能夠向他人解釋自己的想法；如此的態度有助於提升學生在面對非例行性的任務的概念理解及表現，並在缺乏指引的情況下能堅持完成任務（Cobb et al.,1991; Cobb, Wood, Yackel, & Perlwitz, 1992）。學生的對於數學成功經驗的覺察，適切影響其動機態度的形成（Middleton & Spanias, 1999），並且，學生的學習目標是激勵學生根據其學習價值及學習策略進行建構知識的主要原因（Duda & Nicholls, 1992; Morrone, Harkness, D'Ambrosio, & Caulfield, 2004），特別是學生的數學精熟目標，有助於數學高階思考的發展（Morrone et al., 2004），數學臆測探究即屬於高階思考的類型之一。至於學習環境，學習環境包含教師的教學策略、課室活動、師生互動等皆足以影響個體的學習動機（Brophy, 1998; Pintrich & Schunk, 2002），數學教學的實徵研究亦實證了這樣的論點（王雅玲、秦爾聰，2008；紀雅芳、溫嫩純，2008），並且，建構取向的數學課室環境更有助於學生的數學理解（Pirie & Kieren, 1992）。

Tuan、Chin 與 Shieh（2005）以 Brophy（1998）和 Pintrich 與 Schunk（2002）的研究為基礎並整合建構主義、動機理論，藉由發展科學學習動機（Students' Motivation towards Science Learning, SMTSL）問卷的過程，在因素負荷、問卷內部一致性、皮爾森相關等統計分析結果中，確認學生之科學學習動機是由自我效能（self-efficacy）、主動學習策略（active learning strategies）、科學學習價值（science learning value）、表現目標（performance goal）、成就目標（achievement goal）及學習環境刺激（learning environment stimulation）等六個向度所組成，其中：（一）自我效能：是指學生相信自己有能力能夠在科學學習任務中表現良好；（二）主動學習策略：是指學生根據先前的理解主動透過不同的策略建構新知；（三）科學學習價值：是足以令學生獲得解題能力、經驗探究活動、刺激學生思考及發現日常生活中的科學關係的價值觀；（四）表現目標：學生的科學表現目標是與其他同學競爭並希望獲得老師的關注；（五）成就目標：學生在科學學習期間對於其能力及成就之提昇感到滿足；（六）學習環境刺激：包含課程、教師教學及同儕互動等足以影響學生科學學習動機之環境組成。透過此問卷的六個向度，我們可以出理解學生的學習動機的組成，並且可以在各個向度上檢驗學生學習動機的變化。

參、研究方法

一、研究設計

本研究採準實驗研究之不等組前後測設計，量化為主、質化為輔，以臆測探究教學策略為自變項，學生學習動機與成就為依變項，探討臆測探究教學策略對於學生學習成就及學習動機之影響。實驗組採以學生為學習中心之數學臆測探究教策略，對照組則以學生往常所習慣的以教師為中心、知識傳遞為目的之傳統講述方式進行教學，即教師在台上講述觀念或解題技巧，學生則在台下聽講。本研究時程為期一學年，研究計畫執行期間配合學校課程，研究者與教學者共同設計並施行九個臆測探究教學教案。另本研究藉由「多元資料來源」和「多位分析參與者」進行資料分析之三角校正；多元資料來源指的是前述之量化及質性資料；多位分析者參與則是由三位研究人員針對多元資料所做的現象觀察進行討論磋商，直到形成共識後才作成研究結論。

二、研究參與者

（一）教學者

本研究實施探究教學教師為師範體系的數學系本科畢業，已有八年的教學資歷，過去一直以傳統講述的方式授課。因為進修的關係，加入了一個由在職與職前數學教師所組成的教師專業成長團體而接觸到數學臆測探究教學，再加上服務學校鼓勵教師採取創新教學與多元評量，因此激勵了該教師從事教學改變。

（二）個案班級

研究對象採用方便取樣的方式選取，臆測探究教學組與對照組為作者之一所任教中部地區某公立家商二年級學生，兩班各有 39 位女同學。兩班科別不同但同屬商業類科，學習本質相仿，惟傳統教學組班級入學成績略高於臆測探究教學組。研究對象中為了解學生動機變化的實際情形，依實驗組班學生數學學習動機問卷前測的施測結果配合研究者觀察，以動機量表總分前 25%選出 2 人為高學習動機個案學生，而動機量表總分後 25%選出 2 人為低學習動機個案學生，另外 50%的學生中選取 2 人做為中動機個案學生，在編組時將此 6 人編在同一組中，以便研究者方便及深入觀察學習動機之改變情形，至於小組討論則採異質性分組，依照上學期數學成績將全班分高、中、低三群，並從每一群中抽出 2 至 3 位學生組成小組，總計分為 6 組、每組 6 至 7 人。

（三）研究者

研究者與教學者同屬同一教師專業成長團體，除提供教學者探究教學理論與實務上的建議外，並協助教學活動設計、研究工具之效化、資料蒐集與分析及撰寫研究報告。

三、研究工具

（一）臆測探究教學活動設計

本研究以 Siegel 等人（1998）四階段數學探究教學融入數學臆測思維做為數學臆測探究教學策略。研究者與教學者依照課本之教學目標、教學理念、學生特質，以臆測探究教學策略做為活動設計主要架構，在每次活動設計完成後，研究者與教學者會於專業成長團體中提出並進行討論，修正教學活動設計，並於每一單元課程教學實施後，研究者與教學者會再次於專業成長團體中共同進行檢討與修正，作為下一個單元活動設計參考。研究者與教學者設計教案原則為配合學校課程內容，並參考數學臆測認知發展脈絡的五種類型（Cañadas et al., 2007）進行數學臆測探究學習活動教案設計，研究計畫施行期間，研究者與教學者根據教材單元的類型與難易度，以及教材前後相關性或連貫性，設計出符合學生發展臆測認知類型的活動，如「數列級數」、「排列與組合」、「機率與期望值」等單元內容希望學生藉由特殊化、有系統的特殊化進而推論一般式，發現數列樣式，因此類屬第一類型的數學臆測認知發展脈絡，即透過對有限數量下的離散案例覺察一致性的樣式（pattern），此類臆測通常發生於與數字有關的問題，在某些情況下，一旦一般性規則被發現時，通常能藉由數學歸納法來證明猜想，在本研究中研究者與教學者為此類型活動共設計了蜜蜂的族譜（數列級數）、青蛙黑白跳（數列級數—數列一般式）、羅馬競技場（數列級數—等差數列）、遺失的項鍊（數列級數—等差級數）、小丸子遊高雄（不盡相異物排列） 、華山論劍（不重複組合、重覆組合、重覆排列）、新年發發發（機率、期望值）等共七個教案。另外，在「相異物直線排列」單元，研究者與教學者以詞句從新排列的方式如「什麼都不能跟人家比誰像你一樣沒有用啊」、「沒有誰能像你一樣啊不用什麼都跟人家比」作為臆測探究數學任務的類比。此外，在「二項式定理」單元，研究者與教學者為協助學生透過巴斯三角形的探索瞭解二項式定理的由來，設計了「巴斯卡的秘密」活動，希望學生根據觀察到的事實追溯事實發生的原因（Meyer, 2010），此一活動屬於臆測發展認知歷程的中的溯因（abduction）類型，即根據已知的事實推論現象背後所蘊含的數學原理（Peirce, 1955）。茲以本研究中「小丸子遊高雄」為例說明本研究數學臆測探究教學進行方式：

1.準備與聚焦探究

在此階段以引起學生學習動機為主，在學習單一開始給予與學生生活相關之問題情境，提昇學生參與感，如：「擁有現代大都市樣貌的高雄市，以東帝士八五大樓、夢時代購物中心的高

雄之眼摩天輪、高雄小巨蛋為都會風格代表地標；自然景觀方面，擁有柴山、愛河、旗津、西子灣、蓮池潭…等景點，高雄不僅天然地理條件優越，且因受海洋氣候調節，全年陽光普照、氣候宜人，再加上近幾年產業急速發展、經濟繁榮，舉辦世界性競賽活動受全球矚目，逐漸展露出國際大都會之氣勢與格局。」

2.執行探究

本活動希望讓學生學習不盡相異物排列的概念並與學生日常生活連結，因此以高雄市的棋盤式道路做為題目設計基礎，並在起始問題中引出學生的「加法概念」的舊經驗，如：「小丸子嚮往探訪高雄市很久了，因此利用暑假搭飛機抵達小港機場，展開夢寐以求的高雄旅遊，若小丸子欲抵達風光明媚的蓮池潭賞景，但又不想多繞遠路，試問有幾種走法呢？（參考圖 1）」。

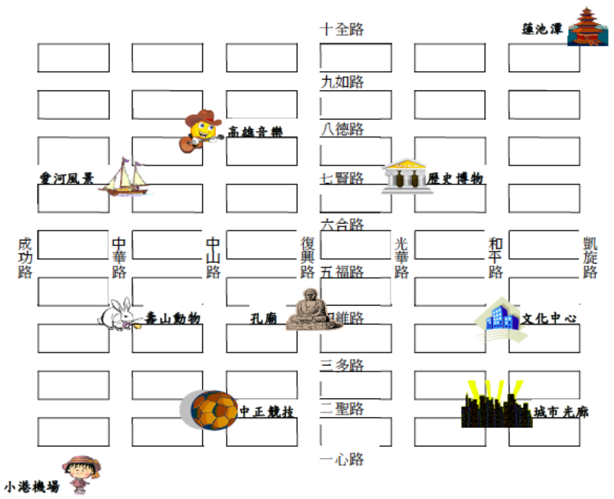


圖 1　小丸子遊高雄之探索地圖

為協助學生起始探索問題，教師將問題加以特殊化如：「若小丸子想先抵達中正競技場，一樣不想繞遠路，試問小丸子有幾種走法呢？又若小丸子想先抵達壽山動物園，一樣不想繞遠路，試問小丸子又有幾種走法呢？」。此時，學生透過特殊化例證，進行猜測、檢驗、反駁與相信的數學臆測思維歷程，並為形成一般化推論做暖身，為協助學生形成一般式的猜想，教師進行建設性的提問，如：「你現在可以知道小丸子到蓮池潭有幾種走法了嗎？」當學生有了初步的一般化推論的結果，則再透過特殊化的檢驗過程，來驗證是否存在反例來反駁其猜測，如：「根據你的猜測，若小丸子抵達孔廟，一樣不想繞遠路，試檢驗答案是否正確？」當學生有了個人的一般化臆測結果，教師則引導學生綜合和溝通來自探究的結果。

3.綜合和溝通來自探究的結果

「小組討論及檢驗」即進此階段，透過如「和其他成員比較，你的答案有幾種？大家的答

案一樣嗎？」的問題，學生能在討論前先紀錄與比對小組間的答案，透過小組溝通與論述，再重新檢驗個人初步猜測的合理性，教師則歸納整合小組發表的結果並加以精緻化做為後續全班溝通討論的內容。如提問學生：「如果讓你重新再猜一次，你的答案會不會改變？改變的理由是？」，藉由小組討論後的結果，根據結果決定是否，重新修正自己的猜測，主要目的是記錄個人及小組數學概念的理解情形。研究者期待在這問題後，不管個人或是小組，在經過猜測、個人及小組檢驗、局部修正或全局反駁後，能夠暫時的針對任務有共同的答案，進行全班的溝通分享，透過各小組的發表討論及辯證，為學生進行評估階段做暖身。如提問學生：「看看其他組的想法！（可自行切割以記錄多組答案），你覺得你贊同他們的看法嗎？」而後針對小組報告之後的結果，再度進行臆測歷程的相信、修正或反駁階段，將之前所做的一般化猜想進行確認，並寫出確認的原因或理由，以便讓猜測獲得更精煉的過程。在此階段教師須營造一個能使學生討論及相互合作的學習環境，透過彼此分享，尊重他人想法並給予回饋，以建構個人的理解。

4. 延伸與評估

此階段延伸的目的旨於幫助學生將前述一般化後的數學結論應用在類似的數學情境中，讓學生能夠將其所習得的新概念加以整理並延伸發展，。由於一般化、特殊化和類比往往偕同解決數學問題（Polya, 1954），一般化是從對象的一個給定集合進而考慮到包含這個給定集合的更大集合，特殊化是從對向的一個給定集合，轉而考慮那包含在這集合內的較小集合，而類比是某種類型的相似性，是一種夠確定的和更概念的相似，此外 Polya（1954）強調透過類比的臆測在數學學習中的價值，誠如數學家使用類比用於發現新概念或是解題方法，Lakatos（1976）認為藉由類比所進行的臆測有助於數學探究（mathematical discovery）。因此在本階段中，教師的教學任務旨於協助學生將先前階段中所產生的數學發現即結論透過類比的方式應用於新的數學情境中，如提問學生：「小丸子出發前不幸帕瑪颱風來襲，突然的降雨導致某些區域淹大水無法通過（如圖 1 壽山動物園至歷史博物館對角線所成的矩形面積），請問小丸子有幾種走法（注意：一樣走最近的路喔）」，透過類比的問題幫助學生藉由演繹推理精緻化前面所建構的數學知識，或透過統整及調適建構新的心智基模。

此階段中評估的任務主要協助學生評估他們對知識的理解程度，讓學生能夠注意到其想法的改變以及其學習歷程，並能反思其想法改變的程度，教師的任務旨於協助學生回顧整個臆測探究教學過程，針對學生有問題的地方做概念澄清，引導學生反思整個活動歷程，並針對學生的回饋進行教學策略的改進依據。如本活動提出兩個數學問題協助學生檢驗其學習成效：「如圖 2（左），從 A 走至 B 採捷徑走法，共有幾種方法？」、「如圖 2（右），自 A 走到 B 繞過障礙物採捷徑走法，方法共有幾種？」

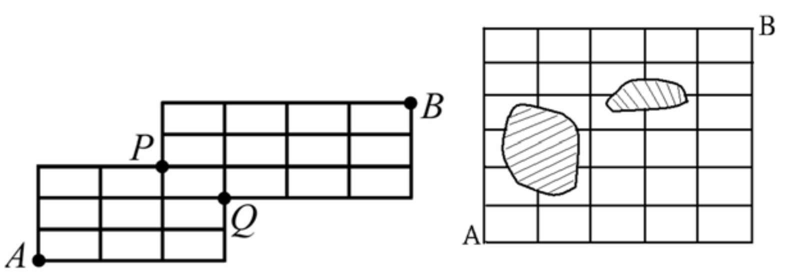


圖 2　小丸子遊高雄之延伸問題

（二）數學學習動機量表

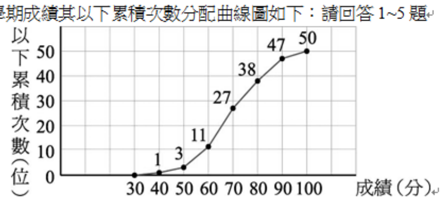
本研究採用修改並效化過之科學學習動機問卷（Tuan et al., 2005），用以量度學生數學學習動機變化。此量表根據 Brophy（1998）和 Pintrich 與 Schunk（2002）的學習與動機實徵性研究結果，進一步確立科學學習動機之六個子向度：（1）自我效能：是指學生相信自己有能力能夠在科學學習任務中表現良好；（2）主動學習策略：是指學生根據先前的理解主動透過不同的策略建構新知；（3）科學學習價值：是足以令學生獲得解題能力、經驗探究活動、刺激學生思考及發現日常生活中的科學關係的價值觀；（4）表現目標：學生的科學表現目標是與其他同學競爭並希望獲得老師的關注；（5）成就目標：學生在科學學習期間對於其能力及成就之提昇感到滿足；（6）學習環境刺激：包含課程、教師教學及同儕互動等足以影響學生科學學習動機之環境組成。該量表採李克特五等尺度，計分方式為非常同意 5 分，同意 4 分，沒意見 3 分，不同意 2 分，非常不同意 1 分，共有自我效能、主動學習策略、科學學習價值、表現目標、成就目標與學習環境刺激等六個子量表；其中第 2、4、5、6、7、21、22、23 與 24 題為負向題。考量商職學校學生之動機屬性，並確認該動機量表用於檢驗學生數學動機之信度，本研究將該試卷各問題中之科學學科改成數學，經由專家效度的檢驗後，委請授課教師班級以外之高一 10 個班級、高二 12 個班級及高三 7 個班級，共 29 個班級 1099 位學生協助問卷施測，施測結果共回收 1082 份有效問卷，以 SPSS 17.0 統計軟體進行信度考驗分析，結果顯示數學動機學習量表總 Cronbach's α 係數為 .74，六個子量表各 Cronbach's α 係數分別為自我效能（self-efficacy）.72、主動學習策略（active learning strategies） .71、數學學習價值（mathematics learning value）.72、表現目標（performance goal）.77、成就目標（achievement goal）.74、學習環境刺激（learning environment stimulation）.73，顯示該問卷具有良好的信度係數。

（三）學習成就評量

由於評量的目的是為協助學生了解對於學習的理解以及維繫學習運行（keeping learning on track）（Wiliam, 2007），並且本研究所設計之臆測探究教學活動皆以課本內容為主，此外，由於職業科類別學生對於學科的學習強調應用，因此學習成就測驗目標主要聚焦於了解學生對於課

本內容是否達到概念理解（conceptual understanding）與程序流暢（procedural fluency）（NRC, 2001），因而試題內容設計聚焦於學生對於數學定義、定理的理解與應用（參考圖 3 段考試題示例）。有鑑於此，本研究採用段考試題作為評量學生學習成就工具，藉以觀察數學臆測探究教學策略介入對學生學習成就的影響。

某班 50 位學生學期成績其以下累積次數分配曲線圖如下：請回答 1~5 題



(D)1. 該班學生學期成績的全距為 (A) 40 (B) 50 (C) 60 (D) 70 分。

(C)2. 試問該班學生學期成績低於 60 分的有幾人？ (A) 3 (B) 8 (C)11 (D)16 人。

(A)3. 試問該班學生學期成績介於 60~80 分之間的有幾人？ (A)27 (B)38 (C)16 (D)11 人。

(D)4. 該班學生學期成績的算術平均數為 (A) 69.3 (B) 69.4 (C) 69.5 (D) 69.6 分。

(C)5. 已知蕃薯考 80 分，則他在班上的百分等級 PR 值=(A) 38 (B) 64 (C) 76 (D) 80。

圖 3 段考試題示例

四、研究工具

本研究資料蒐集共計有：（1）數學學習動機問卷：問卷實際施測時，共計針對實驗及對照組施測三次，在學生剛升上高二一個月時進行前測，於實施臆測探究教學二個月後進行中測，並於教學實驗結束後進行後測。（2）段考成績：為貼近觀察數學臆測探究教學對實驗組學生學習成就影響，本研究收集數學臆測探究教學組及傳統教學組全學年度上、下學期共六次段考成績，並輔以晤談以協助分析。（3）晤談紀錄：在每個單元結束後針對 6 名個案研究對象進行晤談，並對對照組學生做不定期晤談，內容包括特殊的臆測解題思維模式及對教學活動的感受，並以錄音及錄影的方式進行紀錄後加以轉錄文本並編碼分類。（4）教師反思日誌：教師在每次課後詳細記錄教學情形及學生的學習行為，作為往後教學改進之用。（5）學生學習日誌：學生針對所進行之探究活動所作的回饋與反思。

五、資料分析

（一）量化資料分析

1.數學學習動機問卷

在分析前將負向題分數進行轉換，非常同意改為 1 分，同意改為 2 分，不同意改為 4 分，非常不同意改為 5 分，表現目標的分數經轉換後分數則代表非表現目標（non-performance goal）。分析時以 SPSS 17.0 統計分析軟體進行臆測探究教學組與對照組之前、中、後測敘述性統計分析

及以前測數據做為共變項，進行中、前測與前、後測單因子共變數分析（ANCOVA）、重複量數分析與 Scheffe 法，呈現各向度分數之平均值變化量以及相關性分析。

2.學習成就評量

本研究將整學年六次段考依數學學習動機問卷施測日程，將第一次段考作為段考成績分析前測，第二、三次段考成績平均數作為段考中測成績，第四、五、六次段考成績平均數作為段考後測成績。前測部分以獨立樣本 t 檢定，分析兩組學生在段考成績前測上是否存在顯著差異，中測及後測部分則以前測作為共變量進行變異數分析，以分析兩組學生在段考成績中、後測上是否存在統計分析上之顯著差異。另為了解兩組學生段考成績集中趨勢量數之變化，考量每次段考難易度的差異，六次段考的成績均換算為 T 分數後再進行分析。

（二）質化資料分析

本研究所收集之質性資料用於提供臆測探究教學如何影響學生學習動機的證據，質性資料分析架構主要參考 Strauss 與 Corbin（1990）依現象觀察結果加以有系統性的歸納。首先，我們將訪談轉成逐字稿，並與其他質性資料進行統整，針對研究對象之高動機、中動機、低動機個案學生的學習表現作細部探討，將不同的資料進行個別檢視和綜合比較，並與動機量表施測的結果做交叉分析，以歸納分析出支持研究對象在動機量表六個向度中表現的質性證據。

肆、研究發現

一、學生學習動機變化情形

（一）數學學習動機量表前測、前中測、前後測差異分析

本研究之臆測探究教學組及對照組兩個研究個案班級，高一期間數學科教師皆隸屬同一位屆退老師，在該位教師退休後由本研究之教學者接替教學，臆測探究教學組探究教學實施約兩學期，期間傳統教學組仍維持傳統講述教學策略。為了解兩組個案學生之數學學習動機變化，本研究針對學習動機問卷量表之前、中、後測之六個向度進行分析探討。表 1 為臆測探究教學組與傳統教學組前、中、後測學習動機各向度描述統計結果。根據數學學習動機問卷前測獨立樣本 t 檢定分析結果，發現臆測探究教學組與傳統教學組在前測中自我效能、主動學習策略、數學學習價值、非表現目標、成就目標、學習環境刺激及總分各向度 T 值分別為-.99、-.67、-.89、-.64、.34、.52、-.23，p 值分別為.33、.51、.38、.52、.74、.60、.82，顯示兩組在數學學習動機問卷各向度間不存在顯著差異，但在自我效能、主動學習策略、非表現目標及總分等，臆測探究教學組的得分低於傳統教學組。

表1

臆測探究教學組與傳統教學組數學學習動機前、中、後測平均數及標準差

	臆測探究（$N = 39$）						傳統教學（$N = 39$）					
	前測		中測		後測		前測		中測		後測	
向度	*M*	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
自我效能	22.23	4.19	23.56	4.13	24.36	2.80	23.23	4.72	22.64	4.63	23.15	3.82
主動學習策略	29.79	3.08	31.59	2.71	31.87	2.30	30.31	3.66	30.59	2.94	30.51	3.68
數學學習價值	17.69	3.11	18.21	2.47	19.26	2.10	17.05	3.24	17.08	2.99	17.08	2.86
非表現目標	14.64	2.47	14.08	2.60	14.64	2.42	15.03	2.80	14.72	2.66	14.85	2.93
成就目標	19.74	2.70	20.9	2.25	21.18	2.26	19.54/	2.63	20.36	2.25	20.00	2.82
學習環境刺激	18.95	3.43	22.33	2.87	22.74	3.04	18.54	3.50	19.46	3.07	20.33	2.78
總分	123.05	10.71	130.67	9.85	134.05	8.16	123.69	14.23	124.85	11.16	125.92	11.97

另以動機前測為共變量（排除動機前測差異），分析兩組動機中測各向度及總分之共變數分析結果顯示，臆測探究教學組在自我效能（$F(1,75) = 9.24$，$p < .01$）、主動學習策略（$F(1,75) = 5.75$，$p < .05$）、學習環境誘因（$F(1,75) = 19.77$，$p < .001$）及總分（$F(1,75) = 13.01$，$p < .001$）上明顯優於傳統教學組，並且存在顯著差異，但數學學習價值（$F(1,75) = 2.74$，$p = .102$）、非表現目標（$F(1,75) = .75$，$p = .391$）、成就目標（$F(1,75) = 1.26$，$p = .266$）等向度上則未有顯著差異。另根據後測共變數分析結果顯示，臆測探究教學組在自我效能（$F(1,75) = 8.01$，$p < .01$）、主動學習策略（$F(1,75) = 5.61$，$p < .05$）、數學學習價值（$F(1,75) = 17.97$，$p < .001$）、成就目標（$F(1,75) = 5.37$，$p < .05$）、學習環境誘因（$F(1,75) = 12.97$，$p < .01$）及總分（$F(1,75) = 19.14$，$p < .001$）與傳統教學組間存在顯著差異，但在非表現目標（$F(1,75) = .00$，$p = .992$）上則未具有顯著差異。

（二）數學學習動機量表各向度之差異分析

1. 自我效能

根據統計分析結果，兩組學生在自我效能向度上，中測及後測均達到顯著差異，且傳統教學組的中測與後測分數均低於前測，顯示臆測探究教學組的教學策略介入對於學生自我效能的提升有別於傳統教學組。經質性資料分析後，發現可能的因素是學生在合作學習的脈絡中提升了自我效能，臆測探究教學活動建構在合作學習的脈絡上，學生在解題、討論、發表與論述中發展數學概念的理解，並在理解中提升數學學習的自信、降低對於數學任務困難的預期（可能反映在問卷自我效能向度上之「不論數學內容簡單或困難，我都有把握能學會」、「我有信心在數學的考試中取得好的成績」）。

R　：你覺得跟一年級相比，你學習數學的信心有變化嗎？

S13：比較有信心，這樣一起討論的上課方式我很喜歡。

R　：為什麼這樣的方式你會喜歡?

S13：除了最直接的對數學添加了更多的樂趣，提升大家的學習動機外，還有同儕間互相激勵、互相合作。

R　：所以你也變得有信心了?

S13：有！因為這樣，會讓我更懂得運用邏輯思考，遇到題目也不會畏懼退縮，會想要把它解出來。

（晤談 990329-S13）

2. 主動學習策略

臆測探究教學組學生在主動學習策略向度的中測及後測皆上升，綜合資料分析結果發現，學生主動學習策略提升的可能原因如下：

（1）主動解決問題

傳統教學方式（展示及講述）下，學生為學習活動中心，學生被動接收知識，缺乏主動探索的能力，而在臆測探究活動中學生經驗數學知識再發現歷程，開始主動解決問題。此點可能反映在問卷中「8.我在學習數學新知識時，會企圖理解它」。

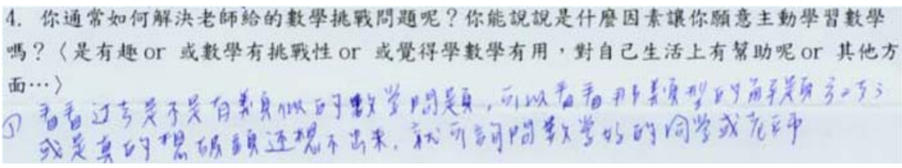
R　：你現在的學習方式如何？

S15：先自己思考，盡力去猜、去嘗試，如果真的不行再跟同學們討論，還是不行就再問老師。

R　：跟以前有什麼改變？

S15：以前不會這樣想，現在一方面是想要讓自己的數學有所進步，另一方面則是因為對數學開始產生興趣，願意主動去碰、去想、去解決問題。

（晤談 981130-S15）


4. 你通常如何解決老師給的數學挑戰問題呢？你能說說是什麼因素讓你願意主動學習數學嗎？〈是有趣 or 或數學有挑戰性 or 或覺得學數學有用，對自己生活上有幫助呢 or 其他方面…〉

① 看看過去是不是有類似的數學問題，可以看看那類型的題目怎麼解
或是真的想破頭還想不出來，就可詢問數學好的同學或老師

（學習日誌 990115-S02）

（2）嘗試不同學習策略

教學者以往採取傳統教學時，面對學生不會的問題就重複講解。現在透過臆測探究教學活動，除了提供學生主動學習的機會之外，也會在探究活動的過程中不斷地引導學生，讓學生嘗試運用不同的學習策略。個案 S13 是被動學習的學生，以往遇到不會的問題就是放棄，然而慢慢有了轉變。此點可能反映在問卷中「11.當有一些數學觀念不懂時，我會找人（老師或同學）討論來幫助理解」

R　：你現在遇到不會的問題會怎麼辦？

S13：我會翻講義，看有沒有類似的問題，或是翻考卷，再找不到我會問同學或是問老師。

R　： 跟以前有不一樣嗎？

S13： 以前我大概都直接跳過。

（晤談 980330-S13）

另外學生會在解題論證的過程中，討論不同解題策略的成效，藉由思考實驗來實證特殊化策略的可行性，並驗證原先的猜想。

S13：如果這邊積水不能過，那就用加（指加法原理）的就好了啊！

S20：可是馬路太多條了啦！用加的加不完，會有問題...

S15：還是用反面作法吧。

S13：什麼意思？

S15：嗯...就全部扣掉通過這點，再扣掉通過這點的就好。

S20：那是不是要加回通過這兩點的。

S15：嗯...應該是吧！

S13：這樣太麻煩了吧！還是用加的比較快。

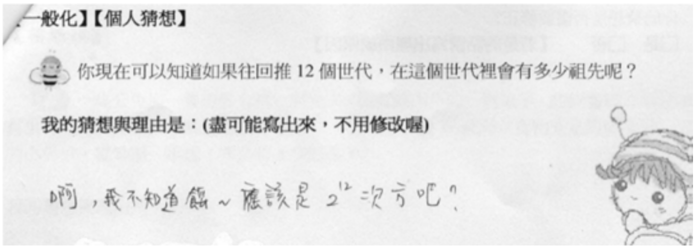
S20：可是用加的反而比較慢吧！

（課室錄影 990114）

（3）反駁與檢驗

驗證臆測與反駁猜想是數學臆測思維的主要歷程 Lakatos（1976）；教學者在引導學生時，常會問「針對同學的報告，有沒有人要提出質疑？」、「那你的理由是什麼？」，如此能幫助學生

主動思考、驗證自己或他人的想法後提出反駁，並在社會脈絡下建構客觀新知（Ernest, 1991）。此點可能反映在動機問卷中「13.當我寫錯數學答案時，我會努力了解寫錯的原因，我會努力了解寫錯的原因」以及「14.當數學課中所學的觀念與我以前所了解的觀念有差別時，我會試著弄懂兩者間的差異」。



（學習單 981023-S13）

如進行直線排列單元時，學生在挑戰問題「濕婆神的第一隻手不能夠拿弓，第二隻手不能拿繩子，第三隻手不能拿盾牌」有幾種方法時，學生會透過舉反例的方式來檢驗猜想，並進一步提出反駁猜想的依據。

S20：這題應該也是用反面作法，所以等於全部扣掉第一隻手拿弓、扣掉第二隻手拿繩子、扣掉第三隻手拿盾牌，再加回第一隻手拿弓、扣掉第二隻手拿繩子、扣掉第三隻手的方法數，所以是 $10! - 9! - 9! - 9! + 7!$。

T ：你們覺得 S20 的答案是正確的嗎？若是的話為什麼？若不是可不可以舉個反例。

S5：怎麼舉反例?

T ：不在 S20 計算的範圍內，但是又不符合題意。

S13：第一隻手拿弓、第二隻手拿繩子、第三隻手拿鼓，在第一隻手拿弓扣掉一次，第二隻手拿繩子也扣掉一次，但是並沒有加回來。S15：嗯！我覺得這樣的反例很多，她的算式應該不對。

（課室錄影 990105）

3. 數學學習價值

根據統計分析結果，臆測探究教學組在中測及後測皆呈現穩定成長的態勢，而傳統教學組則持平，傳統講述的教學方式使得學生對於「生活中可用到」、「可刺激思考」、「學習解決問題的方法」、「參與數學探究」、「滿足對自然的好奇心」等問題無法產生數學價值的認同感，反而

學置身於數學臆測探究教學脈絡中，在這幾個問題表現上都呈現穩定上升的情形，特別是「16.我認為學數學很重要，因為在日常生活中可以用得到」、「19.我認為數學領域中參與數學探究活動是很重要的」，可以推論數學臆測探究教學策略可以提升學生對於數學價值的認同。綜合分析結果發現，學生「數學學習價值」提升的可能原因有：

（1）教學活動與學生生活經驗連結

透過將數學與生活連結的數學臆測探究活動，學生能將數學概念與連結生活經驗連結，此點符應「做中學」的理念，即問題研究應與學生的經驗產生連結（Dewey, 1938）。

R　：你在日常生活中有沒有用到課堂上所學到的數學知識？
S05：有啊，像是費波那契數列；還有期望值，我以後一定不會去賭博。

（晤談 0423-S05）

問題：與以前上課比較，本單元有什麼不一樣？
答：讓期望值活起來了，不再是背公式而已，藉由賭博、樂透等生活化的活動，使我們能加深對機率與期望值的印象。

（學習日誌 0421-S18）

（2）主動思考

學生在解決數學問題時，會由尋求單一解法逐漸轉變為多元性的探索，如會提出「還可以怎樣想？」這類的問題，因此學生能意識到一個數學問題並不一定只有一種解法，甚至會與舊經驗產生連結，主動思考解題的各種可能。此點展現了學生內在動機提升的可能（Middleton, 1995），因學生在數學臆測探究教學脈絡下，透過與生活經驗的連結，已培養出對於數學價值的正面理及主動思考的心智習性。

今天在講重複組合單元時，提到了至少得一件東西的做法要採取正面做法，沒想到學生會拿來跟重複排列時做比較，主動詢問兩者的差異，這是教學多年來不曾有人主動詢問的問題，以往教學時學生只會將做法記憶起來，不會去想到跟先前經驗有沒有衝突的問題，因此感受到學生主動思考能力增加了，推理能力也變好了，好奇心也增加了。

（教師反思日誌 0310）

T ：你對於這次的活動有何感想?

S20：比較難！一開始都想不出來，超沒信心的，本來有的信心都不見了。

T ：應該是任務比較難，你看不是很多組都想不出來嗎?

S20：不過我知道答案後覺得還好啊!我應該可以想得出來的。

T ：沒有人是每次都想得出來的啊!

S20：我知道，可是我就是想把它想出來，沒想出來我就超嘔的。

（晤談 990316-S20）

4. 非表現目標

相較於前測，傳統教學組學生在中測及後測的表現持平，臆測探究教學組的學生則是呈現先下降後回升的 U 型反折，兩組在以前測為共變量的共變數分析結果中皆未有顯著差異。教學者在臆測探究教學策略施行初期，為期許學生能夠漸次將外在動機轉化為內在動機，參酌多位教師的教學實務經驗，採取「獎勵」、「加分策略」及「小組競賽積分」等策略，使學生感覺有別於傳統講述課室的低迷氛圍，進而激勵學生參與數學活動。然而此外在動機的誘因介入，使得學生在中測時非表現目標的表現反而下降了，但反而促使學生開始思考活動的本質與目的。從晤談中可以發現中成就低動機的學生 S13 仍置身於考試與成績表現的制約中，外在動激勵策略對該學生而言是有效的，但他也開始思考挑戰所賦予活動的數學價值。

R ：你認為為什麼要學習數學呢？

S13：我的話是為了得到好成績！

R ：那如果不考試了呢？

S13：那可能會不太想學了吧！

R ：是喔！你覺得現在的上課方式如何?

S13：還不錯，不會死板板的。

R ：加分會影響你的學習意願嗎！

S13：會啊。

R ：還有沒有什麼會影響你的學習意願？

S13：能夠激盪腦力的題目也不錯，我會想挑戰它。

（晤談 981019-S13）

雖然整體而言兩組學生在非表現目標這個向度上並無顯著差異，然臆測探究教學組學生的外在動機顯然有別於傳統教學組，因著外在動機的驅使，加上教學者在中測後逐漸退去激勵措施，仍然能看到學生內在動機的養成，因此，學生非表現目標的提升需要時間及環境的支持。

問：你認為老師哪一種教學方式能提高你對數學的學習動機？
哪種會降低你學習數學的動機？
答：俗話說人比人氣死人，每個人的專長都不同，數學是拿來運用，不是死命地爭取分數，因此，若是為了分數來學數學，那才會降低我的學習動機。

（學習日誌 990116-S30）

5. 成就目標

臆測探究教學組學生的「成就目標」向度在中測及後測皆呈現上升的趨勢，而傳統教學組學生在則呈現先微幅進步再微幅退步的趨勢，兩組學生在中測時未達到顯著差異，但在後測則呈現顯著差異，顯示臆測探究教學策略介入，對於學生對於成就目標表現的影響，已具顯著成效（可能反映在問卷「27.在學習數學時，我覺得最有成就感的時候是，當我解決一個難題時」）。對動機領域而言，成就感與自信心是改變學校數學學習動機本質的兩大指標（NCTM, 1989），S05 是兼具低動機及低成就的學生，或許大部分的人對 S05 可能在工作逃避（work avoidance）的刻板印象，然在教學研究結束前我們可以發現 S05 在晤談中體現了探究取向教學的數學課室能培養學生的精熟目標導向的理想（Cobb et al, 1991; Cobb et al., 1992），同時亦實證臆測探究教學策略能提升學生內在學習動機，使學生在精熟目標的引領下提升自我效能。

R　：學習數學時，你覺得最有成就感是什麼時候？
S05：對我來說，數學是我最害怕的科目。儘管自己有十足的把握，但考出來還是不盡理想，但當我絞盡腦汁終於想出如何解題目時，這是莫大的成就啊！雖然一開始很挫折，塗塗寫寫的，但當答案解出來時，比考 100 分還開心，因為是靠自己的能力，因為這証明我還是可以辦得到的，這是給自己最大的肯定。

（晤談 990330-S05）

6. 學習環境刺激

學習環境包含課程、教師教學及同儕互動等，根據統計分析結果發現臆測探究教學組在此向度在中測時大幅上升、後測時小幅上升，傳統教學組亦在中測及後測相較於前測呈現微幅成長的態勢，兩組在以前測為共變量之共變數分析結果在中測及後測上皆呈現顯著差異。綜合資料分析結果歸納出臆測探究教學組在「學習環境誘因」有別於傳統教學組的可能原因是，數學臆測探究教學創造了讓學生樂學的環境，提升學生主動參與數學課室活動的意願。數學臆測探究教學策略最重要的基礎是實際上是建構在社會性脈絡上，不論是高成就高動機的學生 S25 在研究期初，或是低成就低動機的學生 S05 在研究末期，都表示出主動參與數學活動的意願，並且願意主動思考參與解題任務（可能反映在問卷「32.我願意參與數學課，因為老師沒有給我壓力」、「35.我願意參與數學課，因為同學能互相討論」)，此結果符應了 Franke 等人（2007）對於數學教學的期待，他們的主張指出數學教學旨於建構一個數學學習環境，協助學生主動發現學科知識獨有的表徵並激勵學生做數學。

R　：你覺得這樣的上課方式如何？

S25：很特別，很少會有老師上課讓學生玩數學遊戲，不僅可以讓學生刺激腦力還可以讓學生以互相討論

R　：跟以前有何不同？

S25：以往的老師都會怕課趕不完，不會有如此的方式，這樣反而會讓學生的學習意願不高， 因為有趣、生動、活潑的方式，會刺激我學習；無聊、一成不變或只有老師一直說，都不會學生互動，會讓我覺得不想學習。

（晤談 981019-25）

至於傳統教學組中測及後測相較於前測呈現微幅成長的態勢的部分，研究者分析可能的原因是兩組學生高一期間數學科教師皆隸屬同一位屆退老師，在該位教師退休後由本研究之教學者接替教學，雖然傳統教學組學生採用傳統講述教學策略，然而個人特質與先前教師給予學生的感受不同，因此傳統教學組學生在，第 32 題：「我願意參與，因為老師沒有給我壓力」的表現大幅度的進步，在其他題目也約略提升。

R　：你覺得升上高二後，你有比較喜歡上課嗎？

S07：有啊。

R　：為什麼？

S07：老師你比較好笑！上課比較不會無聊。

R ：跟之前的老師差很多嗎?

S07：光是老師對學生的態度就差很多了！上一個老師好像不太喜歡我們問簡單又基本的問題，但他給我的感覺就是這樣用分數去評定一個人的好壞。老師你比較好，不會給我們壓力，也都會仔細的講解。

（晤談 990315-S07）

二、學生學習成就探討與分析

（一）兩組學生六次段考統計分析

為探討兩組學生平均趨勢量數的變化，研究者另將六次段考成績之平均數、標準差及兩班學校排名另行整理如表 2，實驗組除了第二次段考的成績退步到全年級最後一名外，之後皆呈現穩定進步的狀態，尤其是下學期三次段考班級排名皆優於傳統教學組。傳統教學組基本上與其他高二同樣接受傳統講述式教學的班級相仿，一整個學年的段考成績呈現持平的表現。兩組學習成就相較之下，長時間接受臆測探究教學的洗禮的實驗組學生，雖未與對照組學存在統計分析上之顯著性差異，卻存在穩定成長的態勢。

表 2

六次段考成績 **T** 分數描述統計與校排名

	臆測探究教學組（N = 39）			傳統教學組（N = 39）		
	M	SD	排名	M	SD	排名
上-1	49.058	11.666	9	49.787	15.095	8
上-2	44.999	12.649	13	47.146	14.083	9
上-3	50.210	12.788	8	51.218	13.574	6
下-1	49.898	11.586	8	49.268	14.294	10
下-2	51.931	9.734	5	48.308	15.649	10
下-3	51.825	9.624	5	49.285	15.434	9

（二）學習成就前、中、後測分析

段考成績前、中、後測分析方式配合數學學習動機問卷施測日程，以第一次段考作為學習成就分析前測，第二、三次段考成績平均數作為學習成就中測成績，第四、五、六次段考成績平均數作為學習成就後測成績（各次成績皆以原始分數進行分析）。表 3 為臆測探究教學組與傳統教學組前、中、後測學習成就描述性統計結果，根據前測獨立樣本 t 檢定分析，兩組學生並不存

在顯著差異（T = .31，p = .757）。另外，以前測作為共變量進行中測與後測的共變異數分析結果顯示，兩組學生於中測（$F(1,75) = 2.24$，p = .138）及後測（$F(1,75) = .01$，p = .908）段考成績亦未存在顯著差異。

表3

臆測探究教學組與傳統教學組數學學習成就前、中、後測平均數及標準差

	臆測探究（N = 39）						傳統教學（N = 39）					
	前測		中測		後測		前測		中測		後測	
	M	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
段考成績	73.82	11.82	56.46	11.75	58.64	8.02	75.00	20.36	60.18	12.31	59.26	13.67

（三）學生學習成就綜合分析

臆測探究教學組於上學期第二次段考年級排名退步至最後一名，推論可能原因為實驗組學生面臨學習策略的調整，尤其在完成工作單所賦予非例行性任務及撰寫反思上皆增加不少工作負擔及認知負荷，需要時間來適應。另分析兩組學生段考成績的標準差變化，實驗組學生呈現先升後降，而控制組的部分則為先降後升，顯示數學臆測教學相較於傳統講述教學更能縮短班級成就表現之差異性，使學生平均表現呈現穩定的成長。整體而言，實驗組學生在數學臆測探究策略的介入下，在不影響學習成就的基礎下，除能有效提升學生學習動機外，更能協助學生學習成就穩定成長。

數學探究的本質是數學家為解決數學上的困惑與異例，藉由一般化（generalization），將錯綜複雜的片段關係，加以整合成和諧而可理解的整體（Kent, 1997; Peirce, 1955），因此，教師在建置協助學生達成數學理解的學習環境中，首要提供學生歷經模糊、異例及矛盾以至於能夠形成問題、猜想及進一步的探索的經驗，協助學生藉由一般化、特殊化、類比的數學臆測思維，形成猜想、檢驗猜想並進而建構數學新知。本研究中，個案教師會經常性的提出讓學生產生認知衝突的情境問題，幫助學生在異例及矛盾中形成問題及猜想，並提出合理的解釋。下列情境是探討重複排列問題：「將 4 個相異獎品分給 5 人，求甲至少一件的方法數有多少種？請依正面及反面作法說明之！」，教師在黑板上臚列正面解法與反面解法：「正面做法先給甲 1 個 $C_1^4 \cdot 5^3 = 600$；反面做法全部-甲沒拿到半件 $5^4 - 4^4 = 369$」，讓學生在矛盾與困惑中形成數學猜想，並進而提出檢驗猜想的可行解。由以下對話可發現，學生在論述、辯證的過程中，除提升學習成就外，更培養出帶得走的數學能力。

T：你們都有發現兩種做法的不同嗎?

S：有！

T：那到底是哪裡有錯誤？

S：應該是正面做法有問題！

T：同學同意嗎？

S：同意...

T：那到底是哪裡有問題？如何改進？

S：先給的話好像會有問題，可能會重複，比如說你先給他 A 再給他 B，與先給他 B 再給他 A，結果會一樣，所以重複算了。

（課室錄影 990312）

伍、結論與建議

本研究結果顯示在歷經一個學年的臆測探究教學策略施行後，雖然對於學習成就沒有顯著影響，然而臆測探究教學組學生的動機得到提升並與傳統教學組學生間存在顯著差異，進而學習成就呈現穩定成長的趨勢。這樣的結果不只呼應了紀雅芳與溫嬓純（2008）對於探究教學能提昇數學學習動機的實徵研究結果，更以長達一整學年的研究期程提供了實徵的證據，證明臆測探究教學能協助學生的學習成效呈現穩定成長，特別是低成就學生。根據質性質料分析結果，在臆測探究教學的環境脈絡下，學生願意主動參與學習、採用不同策略解決問題、與同儕互動進行反駁與辯證，此點更符應了 Franke 等人（2007）主張教師應建構一個協助學生主動發現數學知識學習環境的預期。顯示在臆測探究教學環境脈絡下，學生除學習動機提升外更願意主動參與學習、採用不同策略解決問題、重視數學學習價值，並在精熟目標導向引導下期許自己是高自我效能的學習者。

研究者觀察發現小組臆測探究合作效能建構在學生自發性遵守的常規上，因此建議未來嘗試實施數學臆測探究教學之教師，在建置學習環境前能夠先行建立學習常規，尤其是社會性數學常規（socio-mathematical norms）（Yackel & Cobb, 1996）。特別是，數學探究的本質是數學家為解決數學上的困惑與異例，藉由一般化策略將錯綜複雜的片段關係加以整合成和諧而可理解的整體，因此在臆測探究教學架構中，教師應能為學生的學習目標及可能遭遇的教學情境先行擬定假設性學習軌線，並在軌線中適時的將問題加以特殊化並引導學生在形成猜想、檢驗猜想直至形成一般化的過程中建構數學新知。另外，研究者於教學者所隸屬的教師社群中，了解到有些教師雖有改變傳統教學意願，但卻無所適從，誠如 Gravemeijer（1997）所言，探究教學取向與傳統教學間存在不可調和的張力。為協助教師克服教學取向轉變所造成的兩難，研究者建議教師可在教學策略中搭建社會性鷹架（social scaffolding）如「幫助學生如何與他人合作的協

助，並提供論述的環境為數學理解的發展立下良好基礎」及分析性鷹架（analytic scaffolding）如「以實體操作、模型、隱喻、表徵、舉例或論證，協助學生理解數學任務並發展解題策略」（Baxter & Williams, 2010），協助探究取向教學之進行。最後，由於學校段考成績僅能表現出學生學習成就變化，未能充分展現數學臆測探究教學之優勢或正向成效，建議未來研究探究教學取向對於學生學習成就影響的後進，在選擇評量工具上可以考慮輔以質化研究的方式觀察學生數學素養的展現情形（秦爾聰、劉致演、尤昭奇，2015）。

參考文獻

王雅玲、秦爾聰（2008）。實施探究教學對學生數學焦慮的影響。**台灣數學教師電子期刊，15**，41-57。

余鴻穎（2006）。**高職學生數學學習困擾與學習態度之研究**（未出版碩士論文）。臺北科技大學技術及職業教育研究所，臺北市。

紀雅芳、溫嫰純（2008）。5E 學習環融入數學探究教學對國中生學習動機之影響。**台灣數學教師電子期刊，13**，1-12。

秦爾聰、劉致演、尤昭奇（2015）。探討七年級學生在以臆測為中心的數學探究教學脈絡下其數學素養展現情形。**臺灣數學教師，36**（1），1-16。

教育部（2012）。**「找對方向-技職不可限量」技職教育政策與發展**。臺北：作者。

鄭如雯（2009）。芬蘭與台灣高職教育之比較。**學校行政，59**，216-232。

Ames, C. (1992). Classrooms: Goals, structures, and student motivation. *Journal of Educational Psychology*, *84*(3), 261-271. doi:10.1037/0022-0663.84.3.261

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control.* New York, NY: W.H. Freeman.

Baroody, A. J. (1993). *Problem solving, reasoning, and communication, K-8: Help children think mathematically*. New York, NY: Macmillan.

Baxter, J. A., & Williams, S. (2010). Social and analytic scaffolding in middle school mathematics: Managing the dilemma of telling. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*, 7-26. doi: 10.1007/s10857-009-9121-4

Broasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth, NJ: Heinemann.

Brophy, J. (1998). *Motivating students to learn.* Madison, WI: McGraw-Hill.

Cañadas, M. C., Deulofew, J., Figuerias, L, Reid, D., & Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning*, *5*(1), 55-72.

Cheung, K. C. (1988). Outcomes of schooling: Mathematics achievement and attitudes towards mathematics learning in Hong Kong. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(2), 209-219. doi: 10.1007/BF00751233

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B., & Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(1), 3-29. doi: 10.2307/749551

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & Perlwitz, M. (1992). A follow-up assessment of a second-grade problem-centered mathematics project. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(5), 483-504. doi: 10.1007/BF00571469

Davis, P. J., Hersh, R., & Marchisotto, E. A. (1995). *The mathematical experience.* Boston, MA: Birkhäuser.

Dewey, J. (1938). *Experience and education*. New York, NY: Macmillan.

Duda, J. L., & Nicholls, J. G. (1992). Dimensions of achievement motivation in schoolwork and sport. *Journal of Educational Psychology*, *84*(3), 290-299. doi:10.1037/0022-0663.84.3.290

Dweck, C. S. (1986). Motivational processes affecting learning. *American Psychologists*, *41*(10), 1040-1048. doi:10.1037/0003-066X.41.10.1040

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education.* Basingstoke, UK: Falmer Press.

Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 225-256). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Gravemeijer, K. (1997). Commentary solving word problems: A case of modelling? *Learrning and Instruction*, *7*(4), 389-397. doi: 10.1016/S0959-4752(97)00011-X

Hannula, M. S. (2006). Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions. *Educational studies in mathematics*, *63*(2), 165-178. doi: 10.1007/s10649-005-9019-8

Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry*. London, UK: Falmer Press. doi: 10.4324/9780203454213

Kent, B. (1997). The interconnectedness of Peirce's diagrammatic thought. In N. Houser, D. D. Roberts, & J. Van Evra (Eds.), *Studies in the logic of Charles Sanders Peirce* (pp. 445-459). Indianapolis, IN: Indiana University Press.

Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics education. In J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the eleventh conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-27). Montreal, Canada: PME.

Köller, O., Baumert, J., & Schnabel, K. (2001). Does interest matter? The relationship between academic interest and achievement in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(5), 448-470. doi: 10.2307/749801

Kwon, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Educational Review*, *7*(1), 51–61. doi: 10.1007/BF03036784

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171472

Lepper, M. R. (1988). Motivational considerations in the study of instruction. *Cognition and Instruction*, *5*(4), 289-309. doi: 10.1207/s1532690xci0504_3

Lin, F. L. (2006, December). *Designing mathematics conjecturing activities to foster thinking and constructing actively*. Keynote speech presented at the Progress report of the APEC project: Collaborative Studies on Innovations for Teaching and Learning Mathematics in Different Cultures (II)- Lesson Study focusing on Mathematical Thinking, Tsububa, Japan.

Lin, Y. G., McKeachie, W. J., & Kim, Y. C. (2001). College student intrinsic and/or extrinsic motivation and learning. *Learning and Individual Differences*, *13*(3), 251-258. doi: 10.1016/S1041-6080(02)00092-4

Ma, X., & Xu, J. (2004). Determining the causal ordering between attitude toward mathematics and achievement. *American Journal of Education*, *110*(3), 256-280. doi: 10.1086/383074

Mason, J., Burton L., & Stacey K. (Eds.). (2010). *Thinking mathematically* (2nd ed.). Harlow, England: Pearson Education Limited.

Meyer, M. (2010). Abduction—A logical view of investigation and initiating processes of discovering mathematical coherences. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(2), 185-205. doi: 10.1007/s10649-010-9233-x

Middleton, J. A. (1995). A study of intrinsic motivation in the mathematics classroom: A personal constructs approach. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(3), 254-279. doi: 10.2307/749130

Middleton, J. A., & Spanias, P. A. (1999). Motivation for achievement in mathematics: Findings, generalizations, and criticisms of the research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(1), 65-88. doi: 10.2307/749630

Morrone, A. S., Harkness, S. S., D'Ambrosio, B., & Caulfield, R. (2004). Patterns of instructional discourse that promote the perception of mastery goals in a social constructivist mathematics course. *Educational Studies in Mathematics*, *56*(1), 19-38. doi:10.1023/B:EDUC.0000028401.51537.a5

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for teaching* mathematics. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Research Council (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of matheamtics education*. Washington, DC: National Academy Press.

Peirce, C. S. (1955). The nature of mathematics. In J. Buchler (Ed.), *Philosophical writings of Peirce* (pp. 135-149). New York, NY: Dover.

Pintrich, P. R., & Schunk, D. H. (2002). *Motivation in education: Theory, research and applications* (2nd ed.). Englewood Cliffs, NJ: Merrill.

Pirie, S., & Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(5), 505-528. doi: 10.1007/BF00571470

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning, Volume 1: Induction and analogy in mathematics.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Reynolds, A. J., & Walberg, H. J. (1992). A structural model of science achievement and attitude: An extension to high school. *Journal of Educational Psychology*, *84*(3), 371-382. doi: 10.1037/0022-0663.84.3.371

Richards, J. (1991). Mathematical discussion. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 13-51). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. doi: 10.1007/0-306-47201-5_2

Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). When rewards compete with nature: The undermining of intrinsic motivation and self-regulation. In C. Sansone & J. M. Harackiewicz (Eds.), *Intrinsic and extrinsic motivation: The search for optimal motivation and performance* (pp. 13-54). New York, NY: Academic Press. doi:10.1016/B978-012619070-0/50024-6

Schiefele, U., & Csikszentmihalyi, M. (1995). Motivation and ability as factors in mathematics experience and achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 163-181. doi: 10.2307/749208

Siegel, J., Borasi, R., & Fonzi, J. (1998). Supporting students' mathematical inquiries through reading. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(4), 378-413. doi: 10.2307/749857

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145. doi: 10.2307/749205

Singh, K., Granville, M., & Dika, S. (2002). Mathematics and science achievement: Effects of motivation, interest, and academic engagement. *The Journal of Educational Research*, *95*(6), 323-332. doi: 10.1080/00220670209596607

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20–26.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164. doi: 10.1007/BF00579460

Strauss, A., & Corbin, J. M. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques*. Newbury Park, CA: Sage.

Tuan, H. L., Chin, C. C., & Shieh, S. H. (2005).The development of a questionnaire to measure students' motivation towards science learning. *International Journal of Science Education*, *27*(6), 639-654. doi: 10.1080/0950069042000323737

Wiliam, D. (2007). Keeping learning on track: Classroom assessment and regulation of learning. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 1053-1098). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477. doi: 10.2307/749877

Yerushalmy, M. (1993). Generalizations in geometry. In J. L. Schwartz, M. Yerushalmy, & B. Wilson (Eds.), *The geometric supposer: What it is a case of?* (pp. 57-84). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

附錄：數學學習動機問卷

A.自我效能（self-efficacy）

1. 不論數學內容簡單或困難，我都有把握能學會。

2. 我對較難的數學觀念沒有把握學會。

3. 我有信心在數學的考試中取得好的成績。

4. 不管我多努力也沒有把握學好數學。

5. 數學課中所進行的活動(或寫作業)時，有點難時，我不是放棄就是只做簡單的部分。

6. 在進行數學活動(或寫作業)時，我喜歡直接問別人而不是自己想出答案。

7. 對於較難的數學內容，我會跳過不碰它。

B.主動學習策略（active learning strategies）

8. 我在學習數學新知識時，會企圖理解它。

9. 我在學數學新知識時，會試著與自己以前的經驗做聯結。

10. 當有一些數學觀念不懂時，我會找相關資料來幫助理解。

11. 當有一些數學觀念不懂時，我會找人（老師或同學）討論來幫助理解。

12. 在學習數學過程中，我會企圖瞭解所學到的知識之間的關聯性。

13. 當我寫錯數學答案時，我會努力了解寫錯的原因。

14. 當我有一些數學觀念不懂時，我會再去弄懂此觀念。

15. 當數學課中所學的觀念，與我以前所了解的觀念有差別時，我會試著弄懂兩者間的差異。

C.數學學習價值（mathematics learning value）

16. 我認為學數學很重要，因為在日常生活可用到。

17. 我認為學數學很重要，因為可以刺激我的思考。

18. 我認為在數學課中學習解決問題的方法是很重要。

19. 我認為在數學課中參與數學探究活動是很重要的。

20. 我認為學數學滿足自己的好奇心是很重要的。

D.表現目標（performance goal）

21. 我參與數學課的活動主要是為了得到好成績。

22. 我參與數學課的活動主要是為了表現比同學好。

23. 我參與數學課的活動是為了能讓同學認為我很聰明。

24. 我參與數學課的活動是希望老師重視我。

E.成就目標（achievement goal）

25. 在學習數學時，我覺得最有成就感的時候是，當我考得很好。

26. 在學習數學時，我覺得最有成就感的時候是，當我對數學的課程或題目練習越做越有自信。

27. 在學習數學時，我覺得最有成就感的時候是，當我解決一個難題時。

28. 在學習數學時，我覺得最有成就感的時候是，當我的想法被老師接受。

29. 在學習數學時，我覺得最有成就感的時候是，當我的想法被同學認可。

F.學習環境刺激（learning environment stimulation）

30. 我願意參與數學課，因為數學課本內容生動。

31. 我願意參與數學課，因為老師教學有變化。

32. 我願意參與數學課，因為老師沒有給我壓力。

33. 我願意參與數學課，因為老師重視我。

34. 我願意參與數學課，因為課程的挑戰性高。

35. 我願意參與數學課，因為同學能互相討論。