期刊網址：tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=56

袁媛、王淑芬、陳國龍（2016）。
國小二年級學生在數值線段上的數字估計能力與數學學習成就之相關研究。
臺灣數學教育期刊，**3**（1），1-18。
doi: 10.6278/tjme.20160323.001

國小二年級學生在數值線段上的數字估計能力與數學學習成就之相關研究

袁媛[1]　王淑芬[2]　陳國龍[3]

[1]中原大學教育研究所

[2]桃園市楊心國小

[3]新竹教育大學特殊教育學系

本研究的目的在了解國小二年級學生在數值線段上的數字估計能力，並探討其與數學學習成就的相關性。研究樣本為桃園市某國小二年級學生 137 人，並以「數字估計任務」及「學齡階段數學能力測驗」收集研究資料，其中數字估計任務分為數字對位置任務（NP task）及位置對數字任務（PN task）。研究結果發現：（1）二年級學生在數值線段上估計 0-100 的數量表徵已達到線性表徵，且學生在 PN task 的表現優於在 NP task 的表現；（2）二年級學生的數字估計能力與數學學習成就具有顯著的相關性；（3）數字估計能力中的 NP task 表現能預測數學學習成就 13%的解釋力，且解釋力達統計意義，顯示 NP task 表現能有效的預測二年級學生的數學學習成就測驗成績。

關鍵詞：位置對數字任務、相關研究、數字對位置任務、數學學習成就

通訊作者：袁媛，e-mail：yuan@cycu.edu.tw
收稿：2015 年 9 月 9 日；
接受刊登：2016 年 3 月 23 日。

Journal homepage: tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=56

Yuan, Y., Wang, S. F., & Chen, K. L. (2016).
Relationship between number-line estimation ability and mathematics achievement of second graders in elementary.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *3*(1), 1-18.
doi: 10.6278/tjme.20160323.001

Relationship between Number-Line Estimation Ability and Mathematics Achievement of Second Graders in Elementary School

Yuan Yuan[1] Sue-Feng Wang[2] Kuo-Long Chen[3]

[1] Graduate School of Education, Chung Yuan Christian University

[2] Yang-Hsin Elementary School

[3] Department of Special Education, National Hsinchu University of Education

The purposes of this study were to investigate second graders' number-line estimation ability as well as to explore the relationship between their number-line estimation ability and mathematical achievement. The participants in this study were 137 second graders of an elementary school in Taoyuan City, Taiwan, and a number-line estimation task (including number-to-position and position-to-number tasks) and a mathematical achievement test were used as examining tools. The results of this study are as follows. First, on a 0-100 number line, the second graders' estimates fit the linear model. Significant differences were observed between the number-to-position and position-to-number task results. The students' estimation ability in the position-to-number task was superior to that in the number-to-position task. Second, significantly positive correlations between number-line estimation ability and mathematical achievement were observed. Finally, the ability to complete a number-to-position task explained 13% of the variance in the students' mathematical achievement; thus, it can predict students' mathematical achievement.

Keywords: position-to-number task, relation study, number-to-position task, mathematical achievement

Corresponding author：Yuan Yuan，e-mail：yuan@cycu.edu.tw
Received：9 September 2015;
Accepted：23 March 2016.

壹、緒論

一、研究背景與動機

近年來，數感（number sense）在數學教育中逐漸被重視，國內外教育學者也一致肯定數感能力的重要性，認為數感對學生的數學概念發展十分重要，因此各國均致力於將數感列為兒童數學能力發展的核心及數學教育的重要目標。而估計是數感的五個能力之一（Jordan, Kaplan, Oláh, & Locuniak, 2006），但在國小數學課程中，估計（estimation）的教與學並未受到太大的注意（支毅君，1996；李量，2011）。學者一般將估計能力區分為數字估計、測量估計和計算估計（Hogan & Brezinski, 2003），其中的測量估計和計算估計通常是需要運用其他概念以完成，例如估計臺北市到臺中市的距離，就需要有相關的地理知識，也要知道測量的長度單位；計算估計則必須對運算意義有所了解。而數字估計可不涉及數以外的知識，只對數進行純粹的測量，因此可以針對較小的兒童進行研究。

Dehaene（1997）指出數感是能快速了解、估計和操弄數量的能力，過去有許多研究者支持兒童在一條給定數值線段上進行數字估計任務的表現是測量較小兒童數感的有效工具（Berch, 2005; Jordan et al., 2006; Schneider et al., 2008; Siegler & Opfer, 2003）。因此，兒童在數值線段上去估計數字的正確位置應是數感中的一個核心能力（Laski & Siegler, 2007; Van de Walle,1998；潘星宇、俞清怡、蘇彥捷，2009）。過去有關兒童在數值線段上的數字估計能力研究，研究者所使用的評估任務，大致可分為（1）數字對位置任務（number-to-position task，簡稱 NP task）：其評估方式是在一條 25 公分，左為 0，右為 100 或 1000 的數值線段上，請兒童標出一個數（例如：42）的位置；及（2）位置對數字任務（position-to-number task, 簡稱 PN task）：其評估方式為受試者須說出數值線段上指定位置的數字，如：施測者指著數值線段上標識的位置，請兒童說出其位置相對應的數字。目前所見的大多數研究，多只用 NP task 來找出學童在不同數字範圍中的數字估計表現（Booth & Siegler ,2006; Laski & Siegler, 2007; Siegler & Opfer, 2003），只有李曉芹（2008）以山東省的二、四、六年級學生為研究對象，進行 PN task 與 NP task 表現的比較，她發現不同年級的學生在 PN task 的表現都比在 NP task 表現好，即在 PN task 中，學生數估計的準確性比在 NP task 更高。由於針對 NP task 及 PN task 表現的比較研究較少，李曉芹的研究結果可能需要更多實證結果的支持，因此本研究欲以臺灣學生為研究對象，進行 NP task 及 PN task 表現的比較探討。

過去，研究者除了聚焦在兒童的數字估計能力的評估與發展外，有許多研究者也對兒童的數字估計能力與其他數學能力的關係感到興趣，特別是研究顯示兒童的數字估計表現和其他基本數概念及複雜的算術能力間存在著系統性的關係。例如：Laski 與 Siegler（2007）研究發現，

從幼稚園到國小二年級的兒童，若其在數值線段上找到指定數字位置的發展為線性模式時，就顯示兒童在數字估計的能力表現和基本數能力（如數歸類及數的大小比較）有很高的正相關存在。另一個以幼稚園至國小三年級的學生為對象所做的研究，也發現兒童的數字估計能力表現愈精確，其在數學標準成就測驗的分數就愈高（Booth & Siegler, 2006），這樣的研究發現也出現在數字估計表現較差的數學學習障礙兒童身上，例如：Geary、Hoard、Nugent 與 Bailey（2012）發現數學學習障礙兒童在數字估計的表現也特別弱一些，許多研究也都發現數字估計能力表現與後來算術能力表現的因果關係，且發現兒童在數字估計任務的表現上愈精準，其在數及算術的表現上也愈好（Booth & Siegler, 2008; Fischer, Moeller, Bientzle, Cress, & Nuerk, 2011; Link, Moeller, Huber, Fischer, & Nuerk, 2013; Ramani & Siegler, 2008; Whyte & Bull, 2008）。以大陸的學童及台灣的學童所做的研究，也都發現國小低年級兒童的數字估計能力與其數學學習成就的表現有相關（李曉芹，2008；林寶玲，2012）。因此，兒童在數值線段上的數字估計能力應與其數學學習成就的表現有相關，但有別於過去只用單一任務表現探討兒童數字估計能力與數學學習表現的關係，本研究欲進一步以 NP task 與 PN task 表現作為指標，探討其與數學學習成就表現的關係。

二、研究目的與問題

根據前述研究動機與背景說明，本研究擬探討國小二年級學生在數值線段上的數字估計能力發展模式，並了解其與數學學習成就之間的相關性。具體的研究問題有四：

（一）國小二年級學生的數字估計能力發展模式為何？

（二）國小二年級學生在 NP task 與 PN task 兩者之間的表現是否有顯著的差異？

（三）國小二年級學生在 NP task 表現、PN task 表現與數學學習成就的相關性為何？

（四）國小二年級學生在 NP task 表現及 PN task 表現對數學學習成就的預測力為何？

貳、文獻探討

一、兒童在數值線段上的數字估計能力發展

有關兒童在數值線段上數字估計能力的發展，根據 Dehaene（1997）提出的假設是由對數模式逐漸發展為線性模式。所謂對數模式是指較小的兒童在估計 100 以內正整數在線段上的位置時，如以由小至大描繪（要求的估計數字，實際表現數字）的點於座標平面上，會出現如對數函數圖形的樣子，即他在較小的數字（通常 30 以內）會出現比較大的誤差，而在較大的數字的誤差反而較小。而線性模式是指較大的兒童，則在各個不同數字的估計誤差是一致的，也就是不再出現在較小的數字的估計誤差較大的現象。所以年齡較小的兒童（如：幼稚園、國小一年級），他們對數的估計（estimated magnitude, EM）和數的實際值（actual magnitude, AM）是呈

現對數函數關係，即 EM = a · ln（AM）+ b。之所以會有這樣的現象，Dehaene 是藉由心理學的「距離效果」（distance effect, DE）來解釋。所謂的 DE，就是兒童在判斷兩個距離較遠數字的大小時，其正確率較高，所需的反應時間較短；而相對的對兩個距離較近數字的大小判斷，其正確率較低，且所需的反應時間較長。所以，Dehaene 認為兒童對於較小數字的距離估計會出現放大的現象，而對較大數字的距離會有低估現象。後續有許多研究者（Moeller, Pixner, Kaufmann, & Nuerk, 2009; Nuerk, Kaufmann, Zoppoth, & Willmes, 2004; Siegler & Booth, 2004；周廣東、莫雷、溫紅博，2009）紛紛探討 Dehaene 的「對數模式到線性模式」的發展是否正確。

Siegler 與 Booth（2004）設計數值線段上的數字估計實驗測試幼稚園、國小一、二年級的兒童，他們的研究結果支持 Dehaene 的假設，即兒童在數值線段上進行數字估計能力的發展是從對數模式發展成線性模式。幼稚園和國小一年級兒童的數字估計值和數字實際值呈現對數關係，但到了國小二年級，就呈現線性關係。周廣東等人（2009）以中國的幼稚園、國小一、二年級的兒童為對象，一樣探究兒童在 0 到 100 範圍內的數字估計表現，也發現中國兒童和美國兒童一樣是由不精確的對數表徵逐步發展至精確的線性表徵，但中國兒童的精確數字估計表現出現早於美國兒童，即美國兒童要到二年級才會發展出線性模式，而中國兒童在一年級時即多已發展出線性模式。

然而，有些學者認為兒童在數值線段上的數字估計能力發展應該是線性關係，也就是數的估計值會隨著數的實際值的增加而增加，所以數字的估計誤差和它的數字大小並沒有關係。例如：Nuerk 等人（2004）也參考 Siegler 的數字估計實驗，要幼稚園、國小一、二年級學生在 10cm 的線段上做 100 以內的數的估計，結果發現學生在數字的估計值和實際值的關係，並非呈現對數關係，而是線性關係。Moeller 等人（2009）對歐洲奧地利的國小學生實施數值線段上的數字估計能力測驗，研究結果也發現，小學一年級學生在數值線段上的數字估計能力並未出現對數模式，而是線性模式，只是在 10 以內的數字是斜率較大的直線，而在 10 到 100 的數字是斜率較小的直線。

綜而言之，目前有關兒童在數值線段上的數字估計能力發展模式存在著兩個主要的研究論點，一是兒童隨著年齡的增加，其在數值線段上的數字估計能力的發展模式是由不成熟的對數模式發展至線性模式（Siegler & Booth, 2004；周廣東等人，2009）；另一則是以認為兒童在數值線段上的數字估計能力發展為直線模式，只是在不同的數字範圍可能出現不同的斜率，即在兒童熟悉的數字範圍為斜率較大的直線，而在兒童不熟悉的數字範圍為斜率較小的直線（Moeller et al., 2009; Nuerk et al., 2004）。因此，兒童在數值線段上的數字估計能力發展模式仍是一個值得關注的主題。

二、兒童在數值線段上數字估計能力的測量

過去有關兒童在數值線段上數字估計能力的研究，主要著重在兒童所表現的發展模式，且絕大部分的研究廣泛運用有界數值線段為施測工具（數值線段上標有最小值與最大值），這些豐富的研究成果的確也促成研究者對兒童在數值線段上進行數字估計表現的了解。綜觀過去研究者在這個主題的研究所使設計的任務，大致可分為數字對位置任務（即 NP task），見圖 1；另一種是位置對數字任務（即 PN task），見圖 2。

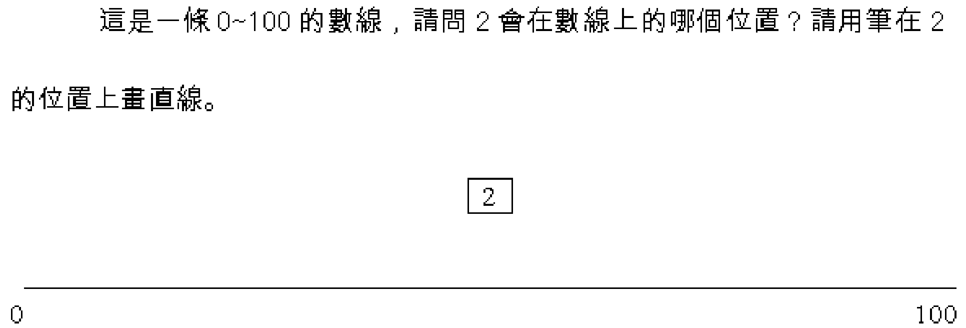


圖 1　NP task 示例

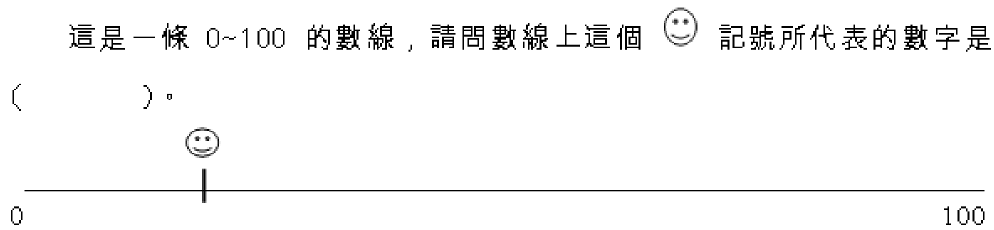


圖 2　PN task 示例

目前所見的大多數研究，多只用 NP task 來找出學童在不同數字範圍中的數字估計表現（周廣東等人，2009），可能因為 PN 任務較易使兒童採用比例判斷策略進行解題，因此多數研究仍以 NP task 作為評估兒童在數值線段上數字估計能力的方式。由於至目前為止，少有研究從不同的估數任務表現去探討兒童數字估計能力的發展和比較，只有李曉芹（2008）以山東省的二、四、六年級學生為研究對象，進行 PN task 與 NP task 表現的比較，她發現不同年級的學生在 PN task 的表現都比在 NP task 表現好，即在 PN task 中，學生數字估計的準確性比在 NP task 更高。由於李曉芹以前少有研究探討學生在此兩種任務表現的差異，單一研究結果需更多實證研究的驗證，因此本研究將再以臺灣兒童在 PN task 和 NP task 的表現探討其數字估計能力的發展，並比較兒童在此兩種任務表現上的差異。

參、研究方法

一、研究對象

本研究採便利取樣，選取研究者之一所任教之桃園市楊梅區某國小二年級學生為研究對象。該校學生身份以一般生居多，二年級學生中原住民、新住民、弱勢家庭及隔代教養在一個班的比例約為 10%左右。目前二年級有六個班，每班學生 28 或 29 人，全二年級計有男生 82 人、女生 89 人，共 171 人。研究者於施測前，發下施測同意書徵得家長同意後，再進行研究資料的蒐集。經調查後，同意施測的男生 71 人，女生 69 人，共 140 人。因有 3 位學生在數字估計能力部分做答不完全，故該三份資料當作廢卷，最後以 137 名學生（男生 71 人，女生 66 人）測驗資料進行分析。

二、研究工具

本研究有關學生能力表現的資料分為三個測驗蒐集，第一個測驗是數字估計任務中的 NP task，第二個測驗是數字估計任務中的 PN task，第三個測驗是學齡階段數學能力測驗的初級題本，以下說明各測驗的內容及施測程序。

（一）NP task

本研究為了與李曉芹的研究結果做比較，因此線段長度的設計與之相同，即每張 A4 紙的中間有一條長 25 公分的數值線段，左端標記為 0，右端標記為 100，被估計的數字位於 25 公分線段中間上方約 2 公分處。被估計的數字也與李曉芹的研究相同，為 2、3、4、6、18、25、42、67、71 和 86 共 10 個，且以隨機方式出現這 10 個數字出現的順序。測驗本的第 1 頁至第 10 頁為一頁一題的 NP task，測量方式為量出學生在 NP task，每一題從 0 到畫記的公分長度後，以 Opfer（2003）計算方式將公分轉換為學生估計的數值，以要求畫記 2 為例：若學生從 0 到畫記的長度為 0.7 公分，0.7 ÷ 25 × 100＝ 2.8，則代表該名學生估計 2 的位置落在 2.8 的地方，再以 Siegler 與 Booth（2004）所提出的絕對誤差率（percentage of absolute error, 簡稱 PE），來計算學生在 NP 任務中每一題的絕對誤差率。其計算公式為：

$$\text{絕對誤差率(PE)} = \left|\frac{\text{估計值} - \text{實際值}}{\text{被估計的數值範圍}}\right|$$

因此，該學生在這題的絕對誤差率為：

$$\left|\frac{2.8-2}{100}\right| = 0.8\%$$

（二）PN task

NP task 的 10 個問題之後，接著是第 11 頁至第 20 頁且為一頁一題的 PN task，被估計的位置用與 25 公分數值線段垂直的一條直線表示，直線上方有一笑臉記號，請學生估計線段上這個 ☺ 記號所代表的數字為何。被估計的位置也與李曉芹的研究相同，為 2、3、4、6、18、25、42、67、71 和 86 共 10 個，且以隨機方式出現這 10 個數字出現的順序。得出 PN task 的估計值之後，再計算學生在每一題的 PE。例如：要求指出 2 所在位置的數字，若學生回答為 5，則學生在這題的絕對誤差率為：

$$\left|\frac{5-2}{100}\right| = 3\%$$

（三）學齡階段數學能力測驗

本研究以林寶貴、李如鵬與黃玉枝（2009）共同編製的學齡階段數學能力測驗之初級為測驗工具，國小二年級學生在此測驗所得的分數即為該生的數學學習成就。原本編製學齡階段數學能力測驗的目的是提供給國小二年級至國中三年級的聽障學生使用，因同時建有國小二年級至國中三年級的一般學生常模，所以也能提供一般學生使用。經過各縣市聽障生、聽常生之抽樣樣本的兩次預試、修訂後，正式的學齡階段數學能力測驗之初級題本，其項目分析結果難易度平均為.43，鑑別度為.70。

測驗內容涵蓋「數與計算」、「量與實測」、「圖形空間」、「統計圖表」、「數量關係」，題型包含概念 23 題、計算 18 題及應用 9 題等共 50 題選擇題。每一題有四個選項，只有一個答案是對的，每答對一題給 1 分，滿分 50 分。此測驗以庫李 20 公式計算內部一致性信度係數，三種題型的內部一致性信度係數介於.77 至.87 之間，全測驗的內部一致性信度係數為.85。

三、施測方式

所有測驗施測方式以班級為單位，採團體施測。研究者請二年級老師於早自習時間協助進行「數字估計任務」的施測，並於測驗開始前向學生說明：「現在做的這份測驗，不會計入你的學習成績。現在請看布幕上的範例（將範例製成 ppt 檔案，用投影機顯示於布幕），在這條 0-100 的數線中，你覺得框框裡的數字在這條數線的哪個位置，就請你在那裡畫一直線。測驗時間為 5 分鐘，聽到老師說測驗開始，再作答。」NP task 結束後，請學生看布幕上 PN task 的範例，老師說明：「在這條 0-100 的數線中，有一個笑臉記號，你覺得這個笑臉記號的位置是數字幾，請把數字寫在括號裡面。測驗時間為 5 分鐘，聽到老師說測驗開始，再作答。」為統一示範及避免暗示作用，本研究以數字 50 為例進行兩個數字估計任務的示範例。數字估計任務施測結束後三天，六個班級學生同時於第一節課的時間進行學齡階段數學能力測驗，研究者並請二年級導師依照此測驗的實施說明，協助進行施測。施測地點皆在班級教室裡進行，不同意施測的學生則在座位安靜閱讀。

肆、研究結果與討論

一、學生在 NP task 與 PN task 的表現結果

本研究將二年級學生在 NP task 每一題從 0 到畫記處的長度（公分），轉換為估計值，再將每一題的 NP task 與 PN task 表現資料輸入軟體，算出每一題的估計值平均數、估計值平均數與實際值的比、標準差、中位數及絕對誤差率（PE），學生在 NP task 與 PN task 之實際值與估計值結果摘要如表 1。

根據表 1，在一位數的 NP task 中，2 的估計值平均數為 5.76，估計值平均數為實際值 2 的 2.88 倍；3 的估計值平均數為 9.16，估計值平均數為實際值 3 的 3.02 倍；4 的估計值平均數為 10.40，估計值平均數為實際值 4 的 2.6 倍；6 的估計值平均數為 18.30，估計值平均數為實際值 6 的 3.05 倍。但在一位數的 PN task 中，2 的估計值平均數為 1.54，估計值平均數為實際值 2 的 0.77 倍；3 的估計值平均數為 2.39，估計值平均數為實際值 3 的 0.80 倍；4 的估計值平均數為 3.29，估計值平均數為實際值 4 的 0.82 倍；6 的估計值平均數為 4.77，估計值平均數為實際值 6 的 0.80 倍。可以看出在一位數的數字估計任務中，學生的 NP task 估計平均值結果比實際值大，而 PN task 估計平均值結果比實際值小。

在十至五十的 18、25 和 42 這三個數的 NP task 中，18 的估計值平均數為 33.08，估計值平均數為實際值 18 的 1.83 倍；25 的估計值平均數為 33.02，估計值平均數為實際值 25 的 1.32 倍；42 的估計值平均數為 49.01，估計值平均數為實際值 42 的 1.16 倍。但這三個數在 PN 任務中，18 的估計值平均數為 9.94，估計值平均數為實際值 18 的 0.55 倍；25 的估計值平均數為 16.09，估計值平均數為實際值 25 的 0.64 倍；42 的估計值平均數為 38.23，估計值平均數為實際值 42 的 0.91 倍。由估計值平均數的表現，可以看出在十至五十的數字估計任務中，學生在 NP task 中會高估該實際數的位置，而在 PN task 中，學生會低估該實際數的位置。

在五十以上的 67、71 和 86 這三個數的 NP task 中，67 的估計值平均數為 61.85，估計值平均數為實際值 67 的 0.92 倍；71 的估計值平均數為 70.82，估計值平均數為實際值 71 的 0.99 倍；86 的估計值平均數為 78.64，估計值平均數為實際值 86 的 0.91 倍。但這三個數在 PN task 中，67 的估計值平均數為 67.12，估計值平均數為實際值 67 的 1.00 倍；71 的估計值平均數為 73.63，估計值平均數為實際值 71 的 1.03 倍；86 的估計值平均數為 86.19，估計值平均數為實際值 86 的 1.00 倍。可以看出在 NP task 與 PN task 中，學生對 67、71 和 86 這三個數的估計平均數都很接近實際值。

綜合以上的敘述，五十以下的數，學生在 NP task 的估計結果多為高估，在 PN task 的估計結果多為低估。五十以上的數，學生在 NP task 和 PN task 的估計結果，估計值平均數都很接近實際值。不過，由於估計值的平均數是反應所有作答者的平均表現結果，即使受試者的離散反應大（即變異數大）也可能產生估計結果趨向平均數的情形。為避免平均數無法有效代表學生表現之數值，且中位數也能表現數量的集中趨勢，因此本研究在判斷受試者的數量表徵發展上，分別以估計值平均數和中位數為依變項，以實際值為自變項去進行簡單迴歸分析。以下就本研究的資料，說明迴歸分析的結果。

表1

NP task與PN task之實際值與估計值結果摘要表

	實際值 / 估計值	2	3	4	6	18	25	42	67	71	86
NP TASK	平均數	5.76	9.16	10.40	18.30	33.08	33.02	49.01	61.85	70.82	78.64
	平均數÷實際值	2.88	3.02	2.60	3.05	1.83	1.32	1.16	0.92	0.99	0.91
	標準差	4.17	6.84	6.15	10.57	14.67	12.57	13.93	9.74	9.02	8.04
	中位數	5.00	8.00	8.00	16.00	30.00	30.50	44.00	62.00	71.80	79.00
	PE (%)	3.80	6.27	6.55	12.49	16.08	10.91	10.39	7.96	6.79	8.67
PN TASK	平均數	1.54	2.39	3.29	4.77	9.94	16.09	38.23	67.12	73.63	86.19
	平均數÷實際值	0.77	0.80	0.82	0.80	0.55	0.64	0.91	1.00	1.03	1.00
	標準差	.92	1.21	1.63	2.22	6.19	8.81	14.04	19.40	16.63	15.37
	中位數	1	2	3	4	8	14	44	71	76	90
	PE (%)	0.85	1.10	1.43	2.13	9.44	10.94	10.77	13.91	11.75	8.35

由表 1 的 NP task 之表現結果做迴歸分析：若以實際值為自變項，估計值的平均數為依變項做迴歸分析，得 $R^2 = .97$，$\beta = .99$，估計值 = 10.21＋0.83× 實際值；若以實際值為自變項，以估計值的中位數為依變項做迴歸分析，得 $R^2 = .98$，$\beta = .99$，估計值 = 7.70＋0.86× 實際值。

若以迴歸分析中的曲線估計檢驗，以 NP task 的實際值為 X 軸，估計值為 Y 軸。如圖 3 的左圖是以估計值平均數為依變項，右圖是以估計值中位數為依變項，本研究所收集的資料分析結果，不論用估計值的平均數或中位數為依變項，其圖形都符合線性函數。由此得知，本研究中的國小二年級學生在 0-100 的數字估計能力，從 NP task 這部份的資料分析來看，學生在 0-100 的數量表徵發展已達線性表徵。

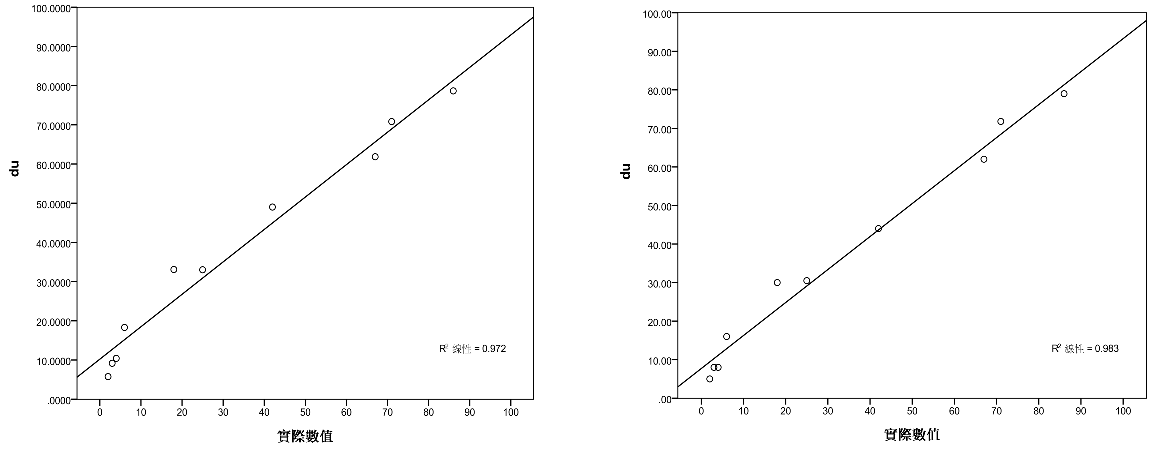


圖 3　NP task 實際值與估計值的曲線圖

從表 1 的 PN task 之表現結果做迴歸分析：若以實際值為自變項，估計值的平均數為依變項做迴歸分析，得 $R^2 = .99$，β = .99，估計值 ＝-3.30＋1.04× 實際值；若以實際值為自變項，以估計值的中位數為依變項做迴歸分析，得 $R^2 = .98$，β = .99，估計值 ＝-4.38＋1.10× 實際值。

同樣以迴歸分析中的曲線估計檢驗，以 PN task 的實際值為 X 軸，估計值為 Y 軸。如圖 4 的左圖是以估計值平均數為依變項，右圖是以估計值中位數為依變項，本研究所收集的資料分析結果，不論用估計值的平均數或中位數為依變項，其圖形都符合線性函數。

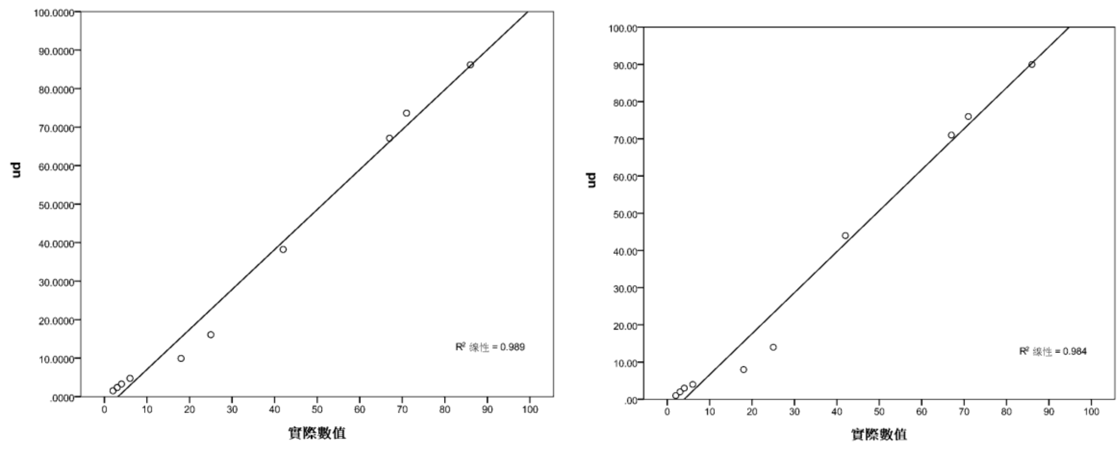


圖 4　PN task 實際值與估計值的曲線圖

綜合上述結果，不論用估計值的平均數或中位數進行迴歸分析，所得的結果都顯示二年級學生在 0-100 的 NP task 與 PN task 是符合線性表徵的，即本研究中的國小二年級學生在 0-100 的數字估計能力發展已達到線性表徵，此結果與 Siegler 與 Booth（2004）、李曉芹（2008）、周

廣東等人（2009）和林寶玲（2012）的研究結果一致，即本研究二年級兒童在各個不同數字的估計誤差是一致的，也就是不再出現在較小的數字的估計誤差較大的現象，呈現比對數表徵較為精確的線性表徵。

二、學生在 NP task 與 PN task 的差異性考驗

為了解二年級學生在 NP task 及 PN task 的表現差異，本研究以 PE 作為數字估計表現結果，進行「相依樣本 t 檢定」以考驗學生在 NP task 與 PN task 的表現差異性。二年級學生在 NP task 的絕對誤差率平均值為 9.00，PN task 的絕對誤差率平均值為 7.07，兩者的差異值為 1.93，差異值考驗的 $t\,(272) = 5.53$，兩者的相關係數 $r = .67$，$p < .001$，即二年級學生在 NP task 與 PN task 的表現之間有顯著差異存在。李曉芹的研究結果是 NP task 的絕對誤差率為 8.0，PN task 的絕對誤差率平均值為 6.28。本研究結果與李曉芹（2008）的研究結果一致，即學生在 PN task 的表現顯著優於 NP task 的表現。

探討二年級學生在 PN task 的表現優於 NP task 之原因，可能是 NP task 要學生在一條兩端標有 0 和 100 的空白數值線段上做記號，而 PN task 是要學生判斷，在一條兩端標有 0 和 100 的數值線段上，與之垂直的一直線所代表的數字為何。相較於 NP task 數值線段上無任何記號，PN task 數值線段上的一直線如同一個線索、直尺上的刻度、參考點等，讓學生在判斷時可以直觀的或憑感覺寫出數字。

以絕對誤差率的平均來看，NP task 的絕對誤差率高於 PN task 的絕對誤差率，但並不表示 10 個實際值的 NP task 絕對誤差率都高於 PN task 的絕對誤差率。從表 1 發現實際值 25、42、67 和 71 的 NP task 絕對誤差率都低於 PN task 絕對誤差率，顯示學生在 25、42、67 和 71 的 NP task 這部份的準確度比 PN task 還高，尤其以 67 的 NP task 與 PN task 絕對誤差率差距最大，為 5.95，其次是 71 的 4.96。

為了進一步了解學生在 2、3、4、6、18、25、42、67、71 和 86 這 10 個實際值的估計情形，將 10 個實際值由小到大畫分成三個區域，以前段、中段和後段進行相依樣本單因子變異數分析，前段為 2、3、4、6 四個一位數，中段為 18、25、42 三個十至五十的數，後段為 67、71、86 三個五十以上的數。

在 NP task 的部份，前段誤差率（7.30%），中段誤差率（12.46%），後段誤差率（7.81%），變異數分析處理效果的 $F(2, 408) = 29.05$，$p < .001$，達到顯著水準，即在 NP task 的三個數字區域中，學生的估計能力表現有顯著的不同，中段與前段、後段皆有顯著差異，前段與後段則未達顯著差異（$p = .397 > .05$）。在 PN task 的部份，前段誤差率（1.39%），中段誤差率（10.39%），後段誤差率（11.34%），變異數分析處理效果的 $F(2, 408) = 108.93$，$p < .001$，達到顯著水準，即在 PN task 的三個數字區域中，學生的估計能力表現有顯著的不同，前段與中段、後段皆有顯

著差異，中段與後段未達顯著差異（$p = .215 > .05$）。

綜合上述結果，在 NP task 的部份，以數值線段兩端的準確度優於中段，中段數字估計的絕對誤差最高，估計較不準確。在 PN task 的部份，以前段數字估計表現較佳。不論在 NP task 或 PN task，前段的絕對誤差率均低於中段和後段，表示學生在 0-100 的數字估計上，對於一位數 2、3、4、6 的估計準確度都比兩位數的準確度高。學生在前段和中段的 PN task 之估計準確度高於 NP task，即在五十以內的數 2、3、4、6、18、25、42 等七個，學生從位置判斷數字的估計能力優於給數字畫出位置的估計能力。不過，在後段卻出現相反的現象，後段 NP task 的絕對誤差率平均值為 7.81，PN task 的絕對誤差率平均值為 11.34，即學生在 67、71、86 這三個五十以上的數，給數字畫出位置的估計能力優於從位置判斷數字的估計能力。因此，兒童在進行 NP task 和 PN task 時可能出現不同的解題策略，且數字可能是一個影響兒童在這些任務表現的影響因素。

三、數字估計能力對數學學習成就的預測力分析

為了解學生的數字估計能力對數學學習成就的預測力，本研究先以「積差相關」進行 NP task 絕對誤差率、PN task 絕對誤差率與數學學習成就的相關性分析。NP task 絕對誤差率與數學學習成就的相關係數為 $r = -.36$，$p <.001$，顯示 NP task 絕對誤差率與數學學習成就達顯著的負相關。在林寶玲（2012）的研究中，她以國小二年級兩次段考成績平均為數學學習成就，其與 NP task 絕對誤差率的相關為中度負相關 $r = -.58$。李曉芹（2008）的研究中，以國小二年級數學期中考試的成績為數學學習成就，其與 NP task 絕對誤差率的相關為顯著負相關 $r = -.69$。因此，本研究相關顯著性結果與林寶玲及李曉芹之結果一致，即學生在 NP task 的表現愈好，則數學學習成就表現愈高，唯在相關係數上均低於兩人的研究，可能的差異為數學學習成就的評量方式不同。而 PN task 絕對誤差率與數學學習成就的相關係數為 $r = -.24$，$p = .006 < .05$，顯示 PN task 絕對誤差率與數學學習成就達顯著的負相關，即學生在 PN task 的表現愈好，則數學學習成就表現愈高。

因為 NP task 絕對誤差率及 PN task 絕對誤差率的相關值為.67，且為顯著相關，再經由線性重合的檢定結果，發現 NP task 絕對誤差率與 PN task 絕對誤差率之間有線性重合的問題，所以進行多元迴歸分析時，PN task 絕對誤差率未被選入為自變項。因此，本研究將相關較高的 NP task 絕對誤差率投入模式中，經迴歸分析得 NP task 誤差率與數學學習成就之多元相關係數為 $r = -.36$，$R^2 = .13$，顯示 NP task 誤差率對數學學習成就有 13%（$F(1, 135) = 20.25$，$p < .001$），達到顯著水準的解釋變異量，且具有統計意義，即 NP task 絕對誤差率對數學學習成就有 13%的預測力。根據迴歸分析結果，可得 NP task 絕對誤差率預測數學學習成就之迴歸方程式如下：

$$數學學習成就 = 40.59 - 41.69 \times \text{NP task 絕對誤差率}$$

因此，學生在 NP task 表現能有效的預測二年級學生的數學學習成就測驗成績。

伍、結論與建議

一、結論

（一）二年級學生在數值線段上做 0-100 的數字估計能力已達線性表徵，且在 PN task 的表現優於 NP task 表現

在本研究中探討的數字估計能力包含 NP task 與 PN task 兩種，測驗方式皆是請學生在 25 公分的數值線段上進行 0-100 之間數字的估計，被估計的數為 2、3、4、6、18、25、42、67、71 和 86 共 10 個數字。不論在 NP task 或 PN task 中，本研究以估計值的平均數或中位數做迴歸分析，均發現國小二年級學生在 0-100 的數量表徵形式已達到線性表徵。以學生在數字估計任務的絕對誤差率（PE）做為分析資料，進行 NP task 與 PN task 的差異性考驗，發現兩者有顯著差異存在，二年級學生在 NP task 的絕對誤差率表現比 PN task 高（分別為 9.00 及 7.07），即學生在 PN task 的數字估計表現優於 NP task。

（二）數字估計能力與數學學習成就為正相關

本研究以積差相關進行估數任務絕對誤差率與數學學習成就分數的相關性分析，其中 NP task 絕對誤差與數學學習成就分數的相關為 $r = -.36$（$p < .001$），PN task 的絕對誤差率與數學學習成就分數的相關為 $r = -.24$（$p = .006$），均達顯著的負相關。由於學生在數字估計任務的絕對誤差率愈低，表示他對數字或位置的估計愈接近實際值，因此，本研究發現學生的數字估計能力愈高，其數學學習成就也愈高。

（三）數字估計能力中的 NP task 表現能預測數學學習成就 13%的變異量且達統計顯著性，顯示 NP task 能力能有效預測學生的數學學習成就

因 NP task 與 PN task 之間有線性重合的問題，所以進行多元迴歸分析時，PN task 未被選入，只以相關係數較高的 NP task 表現投入迴歸模式中。因此，數字估計能力中的 NP task 表現能預測數學學習成就 13%的解釋力，且解釋力達統計意義，顯示 NP task 表現能有效的預測二年級學生的數學學習成就測驗成績。

二、建議

（一）國小數學課程宜重視給定數值線段進行數字估計的教學，以培養學生具有數值線段上數字估計的能力

雖然本研究結果顯示國小二年級學生在數字估計能力已發展出較精熟的線性表徵，但從表 1 可以發現學生在 NP task 的表現變異數較大（4.17～14.67），顯見學生表現的差異性仍大。另一方面，本研究結果發現 NP task 的絕對誤差率、PN task 的絕對誤差率與數學學習成就皆有顯著的負相關，且學生在線段上的數字估計能力對其數學學習成就表現的解釋力達 13%，因此，

在數值線段上數字估計能力的重要性，不容忽視。現行國小數學課程中，數的認識通常只是著重數學符號的認知及了解，強調的是符號、圖形及口語表徵的連結及數字的大小比較，在線段上進行數字估計的內容並不多見。Dehaene、Bossini 與 Giraux（1993）認為數字信息在人類腦中呈現的方式是以數字在空間中對應到數量的表徵型態，線段上數字估計任務即著重在數值轉換到空間對應的處理歷程，學生在這方面的能力應該被加強。因此針對較小的兒童剛開始學習認識數的同時，可以適度融入數值線段上數字估計的相關教學活動，以加強學生的數字估計能力。例如：Van de Walle（1998）建議可以設計一個“Who Am I?”的學習活動（p. 177）。老師設計一個要學生猜測的數字，並在 0 到 100 的數值線段上畫記問號，每當學生猜測之後即在數值線段上標記學生猜測數字的位置，一直持續至學生猜對老師心中的數字為止。

（二）建議未來可進一步探討學生所使用的數字估計策略

本研究發現學生在 NP task 部份，對數值線段兩端數字估計的準確度高於中段，在 PN task 部分，則是數值線段前段數字估計的準確度高於中及後段，有可能學生在解決這兩個任務問題是採用不同的解題策略。而本研究為了與李曉芹的研究結果做比較，在數字估計測驗的十個實際值皆與之相同，所以五十以上的數只有 67、71 和 86，並未有九十以上的數。因此，未來可將九十以上接近 100 的數列入測驗中，並進行學生估數策略的探討，以了解學生在不同任務及不同數值解題表現的差異。例如：Barth 與 Paladino（2011）研究發現受試者會利用知覺比例判斷原則（proportion judgment）作為估計的策略，考量實際值在數值線段上所占的比例為多少，再推估其所在的位置。施測當天研究者和五位導師也觀察到班級裡有少部份學生在做 NP task 測驗時，會在數值線段上做點數的動作，如同莫雷、周廣東與溫紅博（2010）在研究中的發現，學生對低端數字有個對應的長度，亦即心理長度，在估計其它數字時，並以此為單位做疊加的動作。而研究者也發現，從測驗題本的擦拭痕跡判斷，學生面臨較大的數字（如 25 以上）時，可能在點數完後發現到位置似乎不合理，因而採取別的策略，重新對該數字進行估計。是什麼原因造成學生使用這樣的策略，又數字的大小是否影響解題策略的使用，都值得未來再進一步的探究。

（三）建議未來針對研究對象進行縱貫性的發展探究，以了解其與數感能力發展的關係

本研究的施測時間點是在二年級下學期的期末實施，學生已接接觸了較大數字的認識及加減基本運算意義，這些學習內容是否對其估計數字任務的表現造成影響。且相對於目前多數以三年級以上的兒童才能進行數感能力的評估探究，數字估計任務是否能成為評估較小兒童的數感評估工具，值得未來研究之關注。因此，建議未來可以一年級學生為對象，並進行持續性的縱貫性資料收集，以了解較小兒童在數值線段上進行數字估計能力的發展，並了解其是否能有效地預測未來數感能力的發展。

參考文獻

支毅君（1996）。我國國小學生估算概念之研究。**臺東師院學報**，**7**，1-51。【Chih, I-Chun (1996). A study on computational estimation of R.O.C. students at elementary school level. *Journal of National Taitung Teachers College*, *7*, 1-51. (in Chinese)】

李量（2011）。低段估算教學存在的問題及應對策略。**寧波教育學院學報**，**13**（6），130-133。【Li, Liang (2011). Problems and countermeasures to estimate teaching in primary school. *Journal of Ningbo Institute of Education*, *13*(6), 130-133. (in Chinese)】

李曉芹（2008）。**小學兒童數字線估計的發展研究**（未出版之碩士論文）。曲阜師範大學，曲阜，中國。【Li, Hsiao-Chin (2008). *Research on the development of the digital line estimation of primary school children* (Unpublished master's thesis). Qufu Normal University, China. (in Chinese)】

周廣東、莫雷、溫紅博（2009）。兒童數字估計的表徵模式與發展。**心理發展與教育**，**25**（4），21-29。【Chou, Kuang-Tung, Mo, Lei, & Wen, Hung-Po (2009). The representation model and development of children's numerical estimation. *Psychological Development and Education*, *25*(4), 21-29. (in Chinese)】

林寶玲（2012）。**正負數量表徵的心理數線發展**（未出版之碩士論文）。國立中央大學，桃園。【Lin, Pao-Ling (2012). *The development of the mental number line in the representation of positive and negative numbers* (Unpublished master's thesis). National Central University, Taoyuan. (in Chinese)】

林寶貴、李如鵬、黃玉枝（2009）。**學齡階段數學能力測驗指導手冊**。臺北：教育部。【Lin, Pao-Kuei, Li, Ju-Peng, & Huang, Yu-Chih (2009). *Instructional manual of Chinese literacy ability test for the school-aged*. Taipei: Ministry of Education. (in Chinese)】

莫雷、周廣東、溫紅博（2010）。兒童數字估計中的心理長度。**心理學報**，**42**（5），569-580。【Mo, Lei, Chou, Kuang-Tung, & Wen, Hung-Po (2010). Mental distance in children's numerical estimation. *Acta Psychologica Sinica*, *42*(5), 569-580. (in Chinese)】

潘星宇、俞清怡、蘇彥捷（2009）。從數感看兒童數表徵的發展。**華東師範大學學報**，**27**（4），30-41。【Pan, Hsing-Yu, Yu, Ching-I, & Su, Yen-Chieh (2009). The development of numerical representation: from the view of number sense. *Journal of East China Normal University*, *27*(4), 30-41. (in Chinese)】

Barth, H. C., & Paladino, A. M. (2011). The development of numerical estimation: Evidence against a representational shift. *Developmental Science*, *14*(1), 125-135. doi: 10.1111/j.1467-7687.2010.00962.x

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *38*(4), 333-339. doi: 10.1177/00222194050380040901

Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, *42*(1), 189-201. doi: 10.1037/0012-1649.41.6.189

Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child Development*, *79*, 1016-1031. doi: 10.1111/j.1467-8624.2008.01173.x

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York, NY: Oxford University Press.

Dehaene, S., Bossini, S., & Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and numerical magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General, 122*(3), 371-369. doi: 10.1037//0096-3445.122.3.371

Fischer, U., Moeller, K., Bientzle, M., Cress, U., & Nuerk, H. C. (2011). Sensori-motor spatial training of number magnitude representation. *Psychonomic Bulletin & Review*, *18*(1), 177-183. doi: 10.3758/s13423-010-0031-3

Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Bailey, D. H. (2012). Mathematical cognition deficits in children with learning disabilities and persistent low achievement: A five-year prospective study. *Journal of Educational Psychology*, *104*(1), 206-223. doi: 10.1037/a0025398

Hogan, T. P., & Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(4), 259-280. doi: 10.1207/S15327833MTL0504_02

Jordan, N. C., Kaplan, D., Oláh, L. N., & Locuniak, M. N. (2006). Number sense growth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematical difficulties. *Child Development*, *77*(1), 153-175. doi: 10.1111/j.1467-8624.2006.00862.x

Laski, E. V., & Siegler, R. S (2007). Is 27 a big number? Correlational and causal connections among numerical categorization, number line estimation, and numerical magnitude comparison. *Child Development, 78*(6), 1723-1743. doi: 10.1111/j.1467-8624.2007.01087.x

Link, T., Moeller, K., Huber, S., Fischer, U., & Nuerk, H. C. (2013). Walk the number line - An embodied training of numerical concepts. *Trends in Neuroscience and Education*, *2*(2), 74-84. doi: 10.1016/j.tine.2013.06.005

Moeller, K., Pixner, S., Kaufmann, L., & Nuerk, H. (2009). Children’s early mental number line: Logarithmic or decomposed linear? *Journal of Experimental Child Psychology*, *103*(4), 503-515. doi: 10.1016/j.jecp.2009.02.006

Nuerk, H., Kaufmann, L., Zoppoth, S., & Willmes, K. (2004). On the development of the mental number line: More, less, or never holistic with increasing age? *Developmental Psychology*, *40*(6), 1199-1211. doi: 10.1037/0012-1649.40.6.1199

Opfer, J. E. (2003). Analyzing the number-line task: A tutorial. Retrieved from http://www.psy.cmu.edu/~siegler/SiegOpfer03Tut.pdf

Ramani, G. B., & Siegler, R. S. (2008). Promoting broad and stable improvements in low-income children’s numerical knowledge through playing number board games. *Child Development*, *79*(2), 375-394. doi: 10.1111/j.1467-8624.2007.01131.x

Schneider, M., Heine, A., Thaler, V., Torbeyns, J., De Smedt, B., Verschaffel, L., Stem, E. (2008). A validation of eye movements as a measure of elementary school children’s developing number sense. *Cognitive Development*, *23*(3), 409-422. doi: 10.1016/j.cogdev.2008.07.002

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development, 75*(2), 428-444. doi: 10.1111/j.1467-8624.2004.00684.x

Siegler, R. S., & Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations. *Psychological Science, 14*(3), 237-243. doi: 10.1111/1467-9280.02438

Van de Walle, J. A. (1998). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (3rd ed.). New York, NY: Longman.

Whyte, J. C., & Bull, R. (2008). Number games, magnitude representation, and basic number skill in preschoolers. *Developmental Psychology*, *44*(2), 588-596. doi: 10.1037/0012-1649.44.2.588

王毓婕、陳光勳（2016）。
運用幾何軟體 Cabri 3D 與實體積木教具教學對國小二年級學童學習空間旋轉概念之影響。
臺灣數學教育期刊，3（1），19-54。
doi: 10.6278/tjme.20160323.002

運用幾何軟體 Cabri 3D 與實體積木教具教學對國小二年級學童學習空間旋轉概念之影響

王毓婕[1]　　陳光勳[2]
[1]桃園大業國民小學
[2]國立台北教育大學數學暨資訊教育學系

本研究旨在探討二年級學生以 Cabri 3D 幾何軟體與實體積木融入空間旋轉概念教學之後，學生的學習成效以及解題策略和錯誤類型。研究法係採用準實驗不等組前後測研究設計，以六十一位二年級學童為研究對象。實驗組進行 Cabri 3D 幾何軟體搭配實體積木操作進行教學，而控制組僅以實體積木操作進行教學。研究發現結果如下：一、兩組學童在空間旋轉能力測驗的後測成績均有進步，顯示空間旋轉能力的教學對二年級學童是有效的。二、接受不同教學模式之兩組學童其學習成效並沒有顯著差異。於延後測後以訪談的方式探究二年級學童在空間旋轉能力的解題策略及錯誤類型，進行質性研究的分析。結果發現多數學生先以直觀方式做選項的判斷，先找出整體結構類似的立方塊，接下來欲確認答案的方式則大多會使用心像旋轉的解題策略，並再以整體或是切割立方連塊、進行分析比對來做確認。也有部分學生以直觀方式做形體的判別後，並未做旋轉而是直接選擇答案，此類學生容易出現鏡射形體迷思。最後綜合上述研究結果，分別從教學與未來研究等，提出具體建議。

關鍵詞：Cabri 3D 幾何軟體、空間能力、空間旋轉能力

通訊作者：陳光勳，e-mail：kachen@tea.ntue.edu.tw
收稿：2015 年 5 月 25 日；
接受刊登：2016 年 3 月 23 日。

Wang, Y. J., & Chen, K. H. (2016).
Based on Cabri 3D and physical manipulatives to study the effect of learning on the spatial rotation concept for second graders.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *3*(1), 19-54.
doi: 10.6278/tjme.20160323.002

Based on Cabri 3D and Physical Manipulatives to Study the Effect of Learning on the Spatial Rotation Concept for Second Graders

Yu-Jie Wang[1] Kaung-Hsung Chen[2]

[1] Dayes Elementary School, Ta Yuan City

[2] Department of Mathematics and Information Education, National Taipei University of Education

For teaching spatial rotation concepts, this study investigated the learning effectiveness, problem-solving strategies, and error types produced by different teaching methods that used physical manipulatives with and without Cabri 3D geometry software. The study adopted a quasiexperimental, nonequivalent group design, and 61 second graders participated. The experimental group comprised 31 students who used physical manipulatives with Cabri 3D geometry software. The control group comprised 30 students who used only physical manipulatives without the software. The research revealed the following findings: Both the experimental and the control group exhibited considerable improvement following the posttest and showed that these methods of teaching spatial rotation concepts were effective for second graders; however, there was no significant difference in learning effectiveness between the groups. In addition, qualitative analysis was performed on interviews conducted after a relay test. The results indicated the following problem-solving strategies and error types: Most students first used intuition to make spatial judgements, before finding overall similarities between objects, checking for possible alternatives, and confirming their spatial judgement by using mental rotation strategies that employed all or part of the objects. After using their intuition, some students directly chose without rotating the objects; these second graders were apt to make an error involving a mirror misconception. Finally, some suggestions for future research and teacher development are offered as a reference to researchers and teachers, respectively.

Keywords: Cabri 3D, spatial ability, spatial rotation concept

Corresponding author：Kaung-Hsung Chen，e-mail：kachen@tea.ntue.edu.tw
Received：25 May 2015;
Accepted：23 March 2016.

壹、緒論

一、研究動機

在孩童的日常生活中，有許多情境與其空間能力有關，但是九年一貫數學課程中，國小幾何課程裡有關立體空間的課程明顯比其他主題來得少，尤其低年級幾何課程也較多著重在平面圖形。莊月嬌與張英傑（2006）針對九年一貫課程小學的幾何教材分析，認為應加強空間視覺化之教材，以提升學童之空間能力。在 TIMSS 2003 與 TIMSS 2007 的測驗結果中，學生在空間能力相關概念平均答題正確率偏低，發現在國小數學教材中未處理這些概念。而「易混淆圖形的旋轉與平移」也是我國學生在 TIMSS 2003 與 TIMSS 2007 中，答題上常出現的錯誤類型（孫嘉德，2010）。可見在我們小學階段對於空間能力之教材較薄弱，相對的學生的學習表現亦較差。

根據 Piaget 的認知發展論，二年級的學童正處於具體運思操作期，也就是他們的學習需要透過動手操作來建立學習經驗。此階段的學生在 Van Hiele 幾何思考的發展模式中是屬於視覺層次（劉好，1994），經由視覺觀察具體物，而達到學習。但是，在立體圖形的學習上，從學生課本乃至紙筆評量時，都是將立體圖以平面視圖呈現。因此有關幾何課程的學習，除了具體操作外，學生必須能由二維的平面圖像辨識三維的立體圖形。

目前資訊科技融入教學是教育趨勢，Cabri 3D、GeoGebra 等動態幾何軟體，在處理立體圖時，都有許多效果的展現，例如圖形翻轉、透視、堆疊、旋轉…等。虛擬教具乃是利用電腦軟體或某種電腦語言所設計出來的半具體物件，透過滑鼠操弄如同具體教具被手操作，對老師的數學教學與學生的抽象概念學習有很大的幫助。王智弘（2006）在多方塊虛擬教具的開發與教學研究中也發現多方塊數學電子軟體教學時，促使學生有更多時間思考與討論，產生新的數學思維，軟體的使用也方便學生比對檢驗重複圖形，在解題策略上有所成長。Bouck 與 Flanagan（2010）曾說虛擬教具確實能提升學生的學習興趣。Baki、Kosa 與 Guven（2011）利用 Cabri 3D 軟體和實物教具針對職前數學教師空間視覺化技能的比較研究中，其結果發現使用 Cabri 3D 動態軟體能輔助學習者在空間視覺能力的提升。又現今有關「空間旋轉能力」的研究，鮮少針對國小低年級的研究。陳毓梅（2011）針對不同教具教學環境對國小一年級學生學習立方體積木堆疊計數的影響研究中，發現學生對於幾何形體凹處造成錯視、以積木與其他積木接觸面為隱藏積木、2D 紙上幾何形體方位錯視認知等都是學童無法正確計數立方體積木數，造成學習困難的主要原因。鄭美玲與陳光勳（2015）研究也發現國小高年級學生對於二維紙上的幾何形體辨別不容易掌握；幾何形體隱藏處也容易造成錯視，因此對於低年級學生在幾何形體辨別不容易掌握之下，以資訊科技融入空間旋轉能力的教學，藉由滑鼠操控旋轉立方塊，來辨識被隱藏的立方塊，並以不同視角觀察立方塊，促使學生發展將三維的立體圖形辨識成二維平面圖像之能

力，進而提升學童幾何學習的效益。

目前已有許多研究證實動態幾何軟體對幾何學習上有正向的影響，但以往的研究大多是針對國、高中，或是國小高年級，並且在實驗組的處置都是單純以動態幾何軟體介入學習，控制組則為傳統教學模式。因此以此設計的研究不多，而陳毓梅（2011）有初探，陳毓梅於老師授課時以投影設備將虛擬教具融入教學的的方式進行立方體積木堆疊計數，並沒有實際讓學生以電腦軟體操作進行虛擬物件旋轉，而本研究則從空間旋轉的面向去做探討，並讓學生以電腦軟體操作進行虛擬物件的旋轉！不同其他研究，於本研究除了是針對國小二年級學生外，在實驗組的處置是以動態幾何軟體介入並且搭配實體教具的操作學習。當二年級的孩童在同樣的教學時間與學習目標下，同時擁有兩種工具：Cabri 3D 軟體和實體教具的實驗組在學習上是否能將兩種工具使用得宜而達到有效學習？值得探究。

二、研究目的

基於上述研究動機，本研究目的有：

（一）探討以不同教學模式的教學活動後，國小二年級學童在學習空間旋轉能力之成效。

（二）探討二年級學童在空間旋轉測驗的解題策略以及錯誤類型。

三、名詞釋義

以下就本研究相關之名詞作解釋或界定：

（一）立即教學成效

空間旋轉能力立即教學成效係指學生在「空間旋轉能力測驗」的後測成績表現。在實驗課程結束後，兩組學生進行空間旋轉能力後測，並與教學前的前測比較，作為學生立即教學成效的分析。

（二）保留成效

空間旋轉能力保留成效係指學生在「空間旋轉能力測驗」的延後測成績表現。在實驗課程結束三週後，兩組學生進行空間旋轉能力延後測，並與後測成績比較，作為學生保留成效的分析。

（三）延宕教學成效

空間旋轉能力延宕教學成效係指學生在「空間旋轉能力測驗」的前測與延後測成績表現情形，作為學生延宕教學成效的分析。

貳、文獻探討

以下就有關空間能力、空間旋轉能力的相關研究、國內外空間旋轉的課程分析、資訊融入幾何課程的相關研究，進行文獻探討。

一、空間能力的相關研究

（一）空間能力的定義與分類

提到空間能力，大多數人往往會聯想到有關智力測驗當中的題目。近一世紀有關空間能力的研究也愈來愈多，McGee（1979）指出，Kelly 在 1928 年確認了空間因素，並且描述它是對於形狀的一種心理操控。本文歸納整理有關空間能力之定義與分類，並探討空間能力與學童在數學學習的關係。

早期心理學家以因素分析的技術發現了所謂「空間能力」是為人類心智能力之一，此後便有學者陸續提出數種不同的空間能力因素（張碧芝、吳昭容，2009）。整理有關空間能力的定義與分類之相關文獻後，發現每位學者對於空間能力各持有不同的定義而有不同的詮釋，這與學者們所持的觀點以及分析層面之不同而異。McGee（1979）將過去有關空間能力之研究做進一步的統整與歸納，他認為過去對於空間能力的探討，主要都可以歸類為以下兩大類：一是空間視覺化（spatial visualization），二是空間定位（spatial orientation）。空間視覺化指的是在心理旋轉、操縱和扭轉二維和三維的物件。而空間定位則是指在一個空間結構其改變方向而不被混淆的能力和相對於一個人的身體能判斷的空間方向。Linn 與 Petersen（1985）認為空間能力可以表示、轉化、生成和回憶符號的非語言信息。並將空間能力分為有：空間知覺（spatial perception）、心理旋轉（mental rotation）、空間視覺化（spatial visualization）。

學者們對於空間能力的定義大多都圍繞在同一個指標，即都表明空間能力是個體進行一種心理活動的形式，無論是在二維的圖形或是在三維的物件上，對於目標物進行一連串的心理活動，擁有對目標物進行操控的能力，像是位移、旋轉、翻轉，甚至是重新再組織、定位。因此研究者認為空間能力指的是，個體能在心理或腦海中對於包含在二維或三維空間中的形體進行觀察、辨識，並進行不同方位位移、旋轉、翻轉的操弄，以達成轉換或類化心像的一種能力。

（二）空間能力與數學學習

雖然少數文獻曾報告，有些學生其數學不好，但在空間能力發展特好，但絕對多數文獻認為空間能力和孩童的學業成績是密切相關的。Fennema 與 Sherman（1977）認為個人空間視覺化能力關係著其個人數學幾何的學習。Hegarty 與 Waller（2005）更提出數學思維通常是被認為需要具備有視覺感知以及空間能力相關的能力（引自 Pittalis & Christou, 2010）。

Cheng 與 Mix（2014）針對在 6 至 8 歲的孩子進行有關是否心理旋轉的培訓能提高學童的

數學成績，在這個研究結果支持心理旋轉能力與數學成績呈正相關。Weckbacher 與 Okamoto（2014）整理過去的許多相關研究（例：Battista, 1990; Battist, Wheatley, & Talsma, 1982; Casey, Nuttall, & Pezaris, 1997; Casey, Nuttall, Pezaris, & Benbow, 1995; Delgado & Prieto, 2004; McGee, 1979），一致認為心理旋轉已經常常被視為成功解決問題表現之重要因素，尤其是在數學學習的幾何方面，心理旋轉的能力關係著其數學的解題能力。

由以上的研究顯示，學童在數學學習的表現情形如何和學童本身的空間能力情形是正相關的。而且，空間能力與數學的相關不僅在數學幾何方面，也有研究文獻證實在數學計算上也與個體的空間能力呈正相關。這表示當一位孩童其空間能力較佳時，能幫助他數學的學習，他在學習數學的課程內容會遭遇的困難就比較少，相對的其數學成就的表現也會比較高，尤其更多的證據明顯反映於幾何課程當中。這也意味著當孩童在數學學習遭遇困難，尤其是在幾何領域的學習遇挫折時，欲協助解決孩童的困難，教學者應能從培養孩童的空間能力來著手而加以改善。

二、空間旋轉能力的相關研究

（一）空間旋轉能力的教學

從國外學者的研究中，充分顯示空間能力經過適當教學引導，是能促進能力的提升與進步的。例如，Wheatley 與 Wheatley（1979）針對一群 14 歲的孩童進行有關空間處理的實驗，發現兒童可以從被設計的空間教學的活動中受益，他們的空間能力測驗也反映出有明顯的進步。而 Cheng 與 Mix（2014）針對六到八歲孩子進行空間心理旋轉培訓，以訓練孩童的空間旋轉能力。Baki（2011）針對大學生一年級職前數學教師，以動態幾何軟體融入於與旋轉能力有關的空間視覺化教學研究中，研究結果表明了不論是使用動態軟體或是實體教具的操作，都比傳統教學更有效的培養學生的空間視覺化技能。也就是空間視覺能力是可以經由培訓、適當的教導而加以改善的。對於空間旋轉能力透過教學活動、適當的訓練多數是能協助學童提升其空間旋轉能力的表現。因此，需要更多的研究來探討空間旋轉能力的學習問題，不論是以融入電腦軟體的教學，或是透過積木方塊的操作，如何以最適當教學策略、教學方式來進行空間能力的教與學，以作為實際教學上的應用。

（二）空間旋轉能力的測驗

為了測量學童學習成效，空間旋轉試題編製更顯重要。茲整理有關國內外學者進行空間立體旋轉能力測驗時，所使用的測驗工具：Pittalis 與 Christou（2010）在研究 3D 幾何思維的推理類型與空間能力的關係中，針對十一至十五歲的男女學童進行有關空間能力測驗，當中關於 spatial relations（SR）向度測驗，其試題示例如圖 1，讓測驗者在透過心理旋轉後，找出不是該積木旋轉過後的圖像。

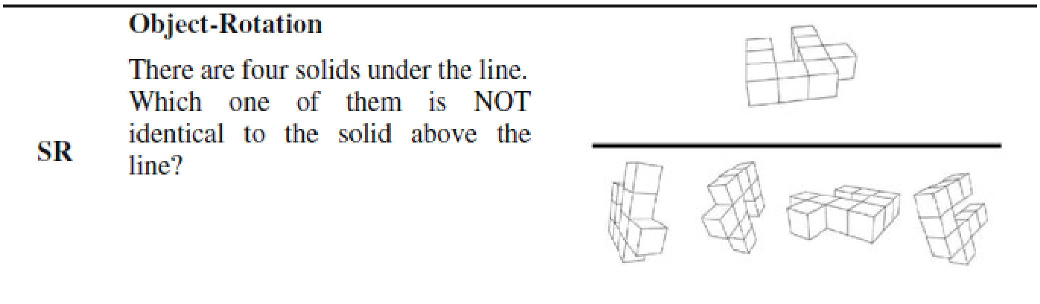


圖 1　Pittalis 與 Christou（2010）SR 向度測驗例題。引自“Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability,” by M. Pittalis and C. Christou, 2010, *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), p. 199.

Plath 與 Ruwisch（2012）在研究有關兒童在空間能力任務的解決策略中，對四年級學童所進行的心理旋轉任務這一項目，所使用的任務型態如圖 2：給定兩個立方連塊圖像，問學童這兩個圖是否是相同的。

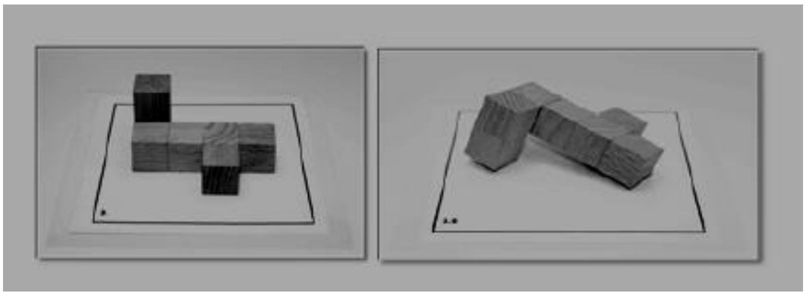


圖 2　Plath 與 Ruwisch（2012）心理旋轉測驗例題。引自“Elementary school children solve spatial tasks a variety of strategies,” by M. Plath and S. Ruwisch, 2012, In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference* (Vol.3, p. 309.) Taipei, Taiwan: PME.

國內的研究學者針對空間旋轉能力所進行的測驗中，也都會選擇以積木方塊堆疊的刺激物做為測驗的題目。例如黃惠薇（2008）進行六年級學童之空間旋轉能力研究的測驗，其中針對三維物件的旋轉試題是以立體堆疊的積木作試題編製。其所設計在至少拐兩個彎的正方體連塊下，學童進行心理旋轉後，找出相同的連方塊積木。而其測驗的題目為正方體六連塊、七連塊以及八連塊。示範例題如圖 3。

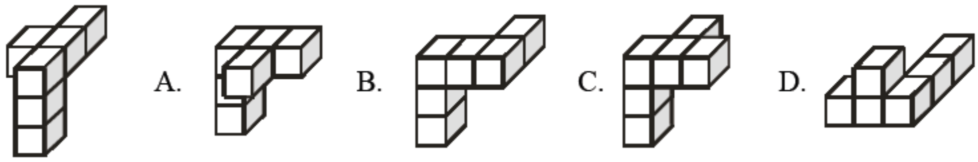


圖 3　黃惠薇（2008）立體積木旋轉例題。引自「**資訊科技融入教學對國小六年級學童在空間旋轉能力之研究**」（未出版之碩士論文）（頁 40），黃惠薇，2008，國立臺北教育大學，臺北。

由於使用立方塊進行三維空間物體的建構，能促使、提升學生發展其空間能力（Izard, 1990），整理相關空間旋轉測驗的文獻裡，發現多數學者使用的實驗刺激物大多為立方連塊，並且根據研究對象年紀的不同，立方塊所堆疊的高度、複雜度也會有不同的變化。當進行空間旋轉能力測驗時，在立體旋轉的項度下，立方塊是很常被使用的刺激物。立方塊可以透過堆疊而發展出更多的形體，也藉由數量的擇定、拐彎的情況，增加其複雜度，故在進行空間能力測驗時，積木立體旋轉將會是一種很方便使用的工具。

（三）空間旋轉測驗錯誤類型

關於學生在空間旋轉測驗中出現的錯誤類型，陳師潔（2011）針對國小二年級兒童以觸覺辨識正方體連塊的解題活動研究中，利用自編測驗進行紙本版（視覺表現）及實物版（觸覺表現）的團體調查，再從中選擇兩名個案透過晤談法來收集兒童解決正方體連塊的解題活動，得到以下結果：在視覺表現中，以鏡射類型的因素錯誤率最高，其次依序為基底形狀相似的因素、與桌面關係的因素，最後是徑長個數差異的因素。可發現二年級兒童對於鏡射的問題類型是比較難掌握的。

三、國內外「空間旋轉」的課程分析

為了空間旋轉教學活動設計，再針對國內外空間旋轉課程做分析。美國數學教師協會（National Council of Teacher s of Mathematics, NCTM）在 2000 年提出的「學校數學的原則與標準」四個幾何學習目標中的兩項即為空間課程。而在幼稚園至二年級這階段，其課程中涵蓋有「使用空間記憶和空間視覺化，創建幾何形狀的心理圖像」、「識別並應用平移、旋轉和翻轉」等相關空間旋轉之能力。由此可以發現，美國在幾何的課程中相當重視空間概念的學習，尤其在低年級階段課程就已包含空間能力之學習。

芬蘭的 WSOY Oppimateriaalit 出版的數學教材中關於幾何教學目標中，列有「能透過不同方向檢視場景以發展視覺理解能力」（彭惠群，2010），訓練學生的空間視覺能力。其教科書從一年級開始就陸續於課程中編有立體方塊的計數，在二年級的數學教科書裡也出現有立方塊旋轉的相關教材，學生必須要能推論立體方塊旋轉後的樣子，以發展空間的能力。從教科書的呈現可以看出芬蘭數學在空間課程的重視，尤其從國小學生一年級就開始紮根。

曾湘玲（2012）在探究臺灣與澳洲小學幾何教材的教學目標與幾何教材內容之呈現情形的研究中，發現澳洲 Targeting Maths 教科書比我國對於空間概念的發展著墨更多，包括空間位置、翻轉、平移和旋轉等空間概念。澳洲數學教材其中「幾何形體的視覺化以及空間概念」佔所有幾何課程比例最高。

而我們國內九年一貫的幾何課程目標有：1.掌握基本形體之特徵。2.培養欣賞與設計幾何形體的能力。3.培養設定方位與描述空間關係的能力。4.培養幾何形體關係之論證能力。5.培養解決圖形與空間相關問題的能力（張英傑、陳創義，2003）。這當中包括有「空間基本概念」和「空間能力」的培養。但是現今國小幾何課程有關立體空間的課程明顯比其他主題來得少，且並沒有相關空間旋轉的課程，尤其一、二年級幾何課程也較多著重在平面圖形的認識。

從以上整理的資料，發現近年來國外的數學教育對於空間能力逐漸重視，認為空間能力是數學能力的一部分，因此在數學教育的課程都將相關空間概念規劃入學童的數學學習活動當中。我們在九年一貫課程中，對於空間概念部分的比例卻是較少。

四、資訊科技融入幾何課程相關研究

目前資訊科技的不斷進步且日新月異，使得在教室裡的教學型態也隨著電腦科技的精進，而轉變成透過電腦的精確、方便，以及電腦的特殊動態功能，來輔助學生學習。左台益（2012）指出動態幾何軟體提供（1）拉動（dragging）的核心操作的方式，（2）動態行為關連物件之間的關係變動，以及（3）軌跡或痕跡（locus or trace）的呈現，輔助動態心像的外顯化及操弄化。因此利用動態幾何軟體的特殊功能，能協助學生在幾何學習上的思考與操作，輔助學生從不同觀點、視角察覺幾何性質。且有許多研究顯示利用電腦輔助軟體進行教學，有助於學生幾何課程的學習。尤其在數學的幾何相關課程裡，應用軟體於教學已相當的普及，例如使用 GSP、GeoGebra、Cabri 等軟體的教學融入。

動態幾何軟體 Cabri 其以動態方式呈現的功能，使我們更容易觀察幾何構造並操控之。自從 2004 年 9 月 Cabri 3D 問世以來，動態幾何的領域已經由平面幾何擴充到立體幾何及球面幾何（全任重，2005）。在繪圖製作三維空間的幾何圖形，動態幾何系統 Cabri 3D 是一個具有強大動態功能的軟體，在近幾年的數學教育領域中逐漸受歡迎。Baki（2011）認為 Cabri 3D 是專門用來探索 3D 幾何體，並說明這個軟體被認為是 3D 幾何圖形進行視覺化和推理的革命性電腦輔助產品，它不但可以容易地做出立體圖形，而且只要按住滑鼠右鍵，就可以隨意地使圖形做三度空間的旋轉，也就是說，可隨意地改變視角（林倉億，2011）。讓學生可以從不同的角度觀察空間幾何圖形，了解其性質，使得更容易理解數學空間幾何的概念。

許多有關使用 Cabri 動態軟體的研究，大多是針對國、高中學生，其較少研究是在國小低年級的教學。然而數學概念裡有關空間的學習，對不少學生而言是困難的。左台益與梁勇能（2001）

指出，空間能力是組成數學能力的一個重要元素，且空間能力為幾何學習的重要認知因素。尤其當國小階段學童進入到高年級課程時，會學習有關體積與表面積單元，此一範圍是牽涉到立體空間概念與抽象思考的學習，這與學生空間能力發展息息相關。因此若能在學童低年級時透過適當教學奠基其空間能力的培養，將有利於往後的幾何學習，而教師若只利用黑板與粉筆的教學，往往不易使空間學習的概念進行有效的傳授。況且要將三維圖像辨識成二維平面圖形，對低年級學童更是困難。Cabri 3D 其色彩豐富、解析度較高能更為清楚呈現、旋轉功能的操作上較 GeoGebra 簡易些。我們發現使用 Cabri 3D 這套軟體輔助教學於低年級學童，其簡單的操作方法之特性，可讓教師很快的進行立方體的堆疊、旋轉，讓學生從不同的視角觀察立體物件，進行空間概念的學習。基於以上因素，故本研究選用 Cabri 3D 作為資訊融入空間旋轉課程之軟體。

參、研究方法

一、研究設計

本研究採「準實驗研究」不等組前後測設計之方式進行。選取研究者任教學校中二年級其中兩班為研究對象，一班為實驗組，以幾何軟體 Cabri 3D 搭配實體積木操作融入空間旋轉課程教學。一班為控制組，以實體積木操作的空間旋轉課程教學。在實驗教學後，針對前、後測成績差異大或前後測表現無進步且表現較差之學童抽樣進行半結構訪談，以了解學童的錯誤類型及解題策略。如表 1 為準實驗研究設計表。

表 1

準實驗研究設計

	前測	空間旋轉能力教學	後測	延後測
實驗組	O_1	X_1	O_3	O_5
控制組	O_2	X_2	O_4	O_6

註：O_1：表示實驗組班級「空間旋轉能力測驗」前測分數
O_2：表示控制組班級「空間旋轉能力測驗」前測分數
X_1：表示實驗組班級「空間旋轉能力補充課程」教學
X_2：表示控制組班級「空間旋轉能力補充課程」教學
O_3：表示實驗組班級「空間旋轉能力測驗」後測分數
O_4：表示控制組班級「空間旋轉能力測驗」後測分數
O_5：表示實驗組班級「空間旋轉能力測驗」延後測分數
O_6：表示控制組班級「空間旋轉能力測驗」延後測分數

二、研究對象

以桃園縣某國小二年級其中兩班為研究對象，共計 61 名學童，其中實驗組共 31 位學生，其中男生 15 位，女生 16 位。控制組共 30 位學生，其中男生 16 位，女生 14 位。總計男生 31 位，女生 30 位。

實驗組的班級為研究者本身擔任導師的班級，而控制組班級的選取是扣除進行預試的班級，從剩餘的班級中，選與實驗組班級的期中考數學程度最為相近的一班，且其班級導師的帶班方式以及數學教學與研究者最為相似，數學教學方式都以講述為主，並鼓勵學生動腦思考及上台發表。

三、研究工具

（一）空間旋轉能力測驗

1.試題編製

本測驗主要是了解學童的空間旋轉能力之表現，依據相關國內外空間旋轉能力文獻之參考，與專家教師共同討論，積木旋轉測驗為探究空間能力常用的測驗試題，針對三度空間積木旋轉進行試題編製。試題計分方式：每題答對得 1 分，答錯得 0 分，總分共計 24 分。整份測驗卷之雙向細目表如表 2：

表 2

空間旋轉能力測驗雙向細目表

		物件旋轉						總計
		順逆時針水平旋轉		左右向翻轉		前後向翻轉		
		90 度	180 度	90 度	180 度	90 度	180 度	
立體連塊與桌面的關係	平貼桌面	6. 9.	5. 7.	10. 21.	1. 4.	2. 8.	3. 23.	12 題
	凸出桌面	18. 20.	15. 16.	13. 24.	14. 17.	11. 12.	19. 22.	12 題
	總計	8 題		8 題		8 題		共 24 題

立體連塊與桌面的關係，當立體連塊可以完全平貼桌面，是指所有的小正方體至少都有一面與桌面接觸。若不能完全平貼於桌面，則立方塊為凸出桌面的關係。

2.空間旋轉能力測驗試題範例

如圖 4 為積木凸出桌面，前後向翻轉 90 度之範例試題：

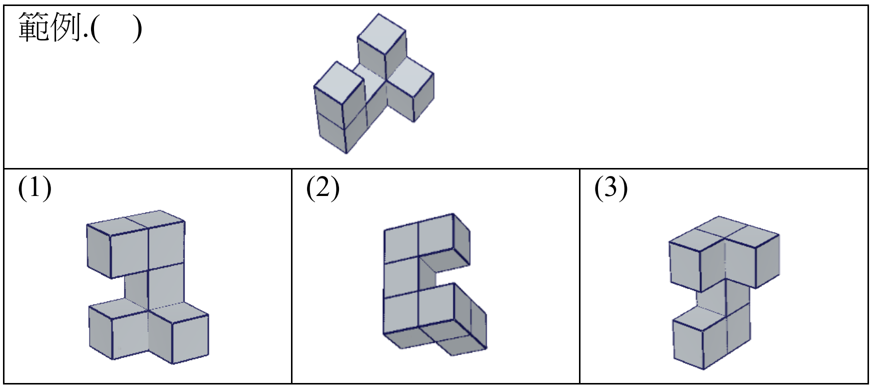


圖 4　空間旋轉能力測驗試題範例

3. 預試後試題分析與修正

在完成自編的空間旋轉能力測驗後，挑選二年級的某一班級進行預試。把預試結果與專家學者以及學校資深教師討論後，原本題目中的四連塊題目對二年級學童而言太簡單，故予以刪除，更改為五連塊或六連塊，以增加連塊的數目來增加試卷的難度。第二次預試題目共計 24 題，其內部一致性係數 Cronbach’s $\alpha = 0.63$。將預試結果與專家學者以及學校資深教師討論後，將難度在 0.8 以上且鑑別度在 0.3 以下題目進行修改。根據以往文獻表明，國小二年級學童在辨識正方體連塊的測驗中，最容易產生錯誤的類型是鏡射因素的類型，另外，正方體連塊基底雷同情形下，只差在第五個相對積木的位置，其在出現錯誤答案比例也較高（陳師潔，2011）。在此次預試後，修正的題目主要是將學生容易出現的錯誤類型列作為選項答案，以增加題目的難度。修正編製後，為使前測、後測和延後測的試卷困難度相同，此份試題於前測進行使用，後測試題則將此份試題的題幹與正確選項的答案交換。延後測的試題則是將後測試題的題目順序進行調換。

4.信度與效度

測驗卷信度採試題內部一致性 Cronbach’s 的 α 係數，正式測驗卷前測信度 $\alpha = 0.663$，後測信度 $\alpha = 0.7$。效度採內容效度及專家效度，內容效度以雙向細目表檢核試題的適切性。專家效度則請相關研究專長的專家和教學經驗豐富的教師共同審核本測驗卷，並提供試卷之修正參考。

（二）空間旋轉課程教案

本研究共有兩份教學教案，一份是於控制組班級進行教學的空間旋轉課程的教案，教師先以大型立方塊積木放置在講桌上，為彌補傳統教學中教師以實體教具進行展示時，容易產生視覺死角，致使學生不易察覺，緊接著拿起大型立方塊積木面對每一排排頭走一趟再放回講桌上。每位學生桌上也同時擁有一堆邊長 2 公分的小正方體實體教具，讓學生透過實物觀察與操作，瞭解物件旋轉後的圖像。另一份是於實驗組班級進行的空間旋轉課程的教案，此實驗班級於電

腦教室於 Windows 作業系統下，每位學生使用 Cabri 3D 2.0 試用版之軟體的操作，建立立體方塊快速堆疊、旋轉的影像輔助教學，從不同視角觀察立方塊，將三維圖像辨識成二維圖像，並搭配實體積木教具操作使用以對照檢驗旋轉後的結果產生內蘊。由於實驗組班級學生對於 Cabri 3D 軟體操作不熟悉，故於實驗教學前先實際到電腦教室進行一節課 Cabri 3D 軟體基本操作的教學，初步認識 Cabri 3D，使用滑鼠進行拖曳、旋轉等功能之操作練習。

有關兩組教案活動舉例如下：

<table>
<tr><td colspan="2">第三節：「翻轉吧！立方連塊」教學活動舉例</td></tr>
<tr><td>實驗組</td><td>控制組</td></tr>
<tr><td>1.開啟檔案，如圖

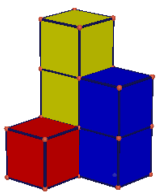
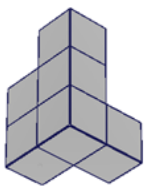



圖 1
(1)請學生將在學習單第 2 題上的立方塊

依照螢幕上的積木塗上顏色。
(2)請學生塗色後，再以滑鼠操控旋轉功能旋轉圖 1，使圖 1 與學習單的立方塊擺放的角度相同，確認所塗的顏色對不對？
(3)學生利用實體積木動手拼出如學習單第 2 題之立方連塊，並旋轉實體積木與旋轉螢幕虛擬方塊做比對。
(4)統整：教師控制螢幕，旋轉積木呈現如學習單的角度，學生再次確認螢幕畫面、學習單以及實體積木的立方塊是否相同？</td><td>1.教師佈題海報如下圖 1 於黑板

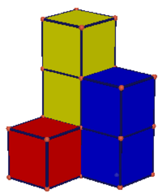
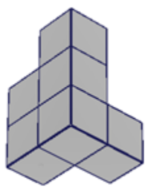



圖 1
(1)請學生將在學習單第 2 題上的立方塊

依照黑板上的積木塗上顏色。
(2)學生塗色後，請學生以實體積木拼出如黑板海報上的立方連塊。並旋轉積木，確認所塗的顏色對不對？
(3)請學生發表要如何旋轉此積木，以確認所塗顏色是否正確？(學生上台示範旋轉大型積木)
(4)統整：教師旋轉大型積木呈現如學習單的角度，學生再次確認黑板海報、學習單以及實體積木的立方塊是否相同？</td></tr>
</table>

實驗課程的教學活動有四節（共計 160 分鐘），以下為教學活動設計，第一節：活動名稱「大家一起疊積木」。第二節：活動名稱「揭開立方連塊的真面目」。第三節：活動名稱「翻轉吧！立方連塊」。第四節：活動名稱「立方連塊的計數與拼組」。

四、資料分析

（一）量的部份

將研究對象在空間旋轉能力測驗前測中的答題情形進行分析，以了解二年級學童在空間旋轉能力的表現。接著用 SPSS 12.0 統計套裝軟體，對空間旋轉能力測驗之前測、後測，和延後測的成績進行量化分析。配對樣本的 t 檢定（單組教學成效），及單因子的共變異數分析（兩組比較），以了解空間旋轉能力實驗教學對於研究對象之立即教學成效、保留成效和延宕教學成效。

（二）質的部份

探究二年級學童在空間旋轉能力的解題策略及錯誤類型，將進行質性研究的分析。於測驗後將前、後測成績差異大及成績無明顯差異又其成績較差的學童，共計 14 名，進行一對一個別晤談，訪談後編寫逐字稿並予以編碼。將學童編號，每位學童編為 4 碼，其中編碼方式如下表 3：

表 3

編碼意義表

資料編碼	意義
第 1 碼學童代碼	S 學童
第 2 碼班級代碼	E 實驗組　C 控制組
第 3、4 碼學童編號	01、02、…
舉例　SE05	代表實驗組 05 號學童
SC26	代表控制組 26 號學童

肆、研究發現

本章共分四節呈現研究結果與討論。第一節探討兩組學童在空間旋轉能力前測的表現；第二節探討兩組學童在空間旋轉課程教學後的學習成效；第三節分析二年級學童解決空間旋轉測驗的解題策略及錯誤類型。

一、兩組學童在空間旋轉能力前測的表現

教學介入之前，兩個班級分別先進行空間旋轉能力測驗的前測。藉由前測的成績來了解兩組學童在教學前空間旋轉能力的差異。由表 4 得知，實驗組平均分數為 16.10。控制組平均分數為 14.03。在空間旋轉課程教學前，實驗組班級整體空間能力前測平均分數比控制組班級高。

表 4

實驗組與控制組班級空間旋轉能力分數摘要表

	組別	平均數	標準差	調節平均數
前測分數	實驗組	16.10	4.03	
	控制組	14.03	3.03	
後測分數	實驗組	17.26	3.13	(16.70)
(立即)	控制組	14.67	3.76	(15.24)
延後測分數	實驗組	18.71	2.31	(17.96)
(保留)	控制組	16.40	3.40	(17.18)

接著探討在 $\alpha = .05$ 的水準之下，實驗組與控制組班級學童的前測表現是如何。由獨立樣本 t 檢定分析得知，$t(59) = 2.265$，$p = .027$，已達顯著水準。所以說明兩班級學童在實驗課程教學前，空間旋轉能力測驗表現有顯著差異。

二、兩組學童在空間旋轉課程教學後的學習成效

根據測驗的資料分析學生的立即教學成效、保留成效、延宕教學成效。由數據資料可以發現，實驗組受試的 31 位學童，其前測平均分數為 16.10，後測平均分數為 17.26，延後測平均分數為 18.71。表示經過空間旋轉課程的實驗教學後，實驗組學童在後測以及延後測的平均分數都比教學前的前測成績佳。控制組受試的 30 位學童，其前測平均分數為 14.03，後測平均分數為 14.67，延後測平均分數為 16.40。表示經過空間旋轉課程的實驗教學後，控制組學童在後測以及延後測的平均分數都比教學前的前測成績佳。緊接著呈現兩組學生學習成效：

（一）實驗組與控制組學生學習成效的差異

為比較實驗組與控制組學生在不同教學模式下其學習成效的差異，研究者採用單變量共變異數分析。

1.立即教學成效

為滿足單變量共變異數分析的條件，必須先進行組內迴歸係數同質性檢定。兩組迴歸線斜率相同，符合共變數迴歸係數同質性假定，接著進行第二步驟共變數分析。

以學生後測成績為依變量，前測成績為共變量，藉以排除兩班前測成績之差異，進行共變數分析。共變數分析結果之 $F(1,58) = 3.639$，$p = .061$，未達顯著水準。由此可知，在不同教學模式的四節課之後，其後測成績進步的幅度彼此未達顯著差異，亦即不同教學模式的介入方式對於學生的空間能力學習都是適合的。

2.保留成效

以學生延後測成績為依變量，後測成績為共變量，藉以排除兩班後測成績的差異性，進行共變數分析。結果 $F(1,58) = 1.875$，$p = .176$，未達顯著水準。由此可知，在不同教學模式的實驗教學結束後三週，其延後測成績進步的幅度彼此未達顯著差異，但不同教學模式的介入方式都有助於學生的空間能力的學習。

3.延宕教學成效

以學生延後測成績為依變量，前測成績為共變量，藉以排除兩班前測成績的差異性，進行共變數分析。由兩班延後測成績同質性檢定結果顯示，兩組學童的 $F(1,59) = 9.677$，$p = .003$，未具有同質性，違背了同質性的假定。因此將資料經過自然對數指數轉換後再進行共變數分析，得到統計數據 $F(1,59) = 0.81$，$p = .777$，符合變異數同質性的假定。進行兩個班級延後測共變數分析，結果 $F(1,58) = 0.017$，$p = .896$，未達顯著水準。由此可知，兩個班級的延後測成績進步幅度彼此未達顯著差異。

因為兩組學習成效比較無顯著差異，因此緊接著呈現各組之學習成效。

（二）實驗組學生的學習成效

1.立即教學成效

根據實驗組前測、後測成對樣本 t 檢定分析的數據資料，實驗組學生在空間旋轉課程教學後的後測平均分數較前測平均分數進步 1.161 分，$t(30) = 2.139$，$p = .041$，已達顯著水準。可得知在空間旋轉教學後，實驗組學生的前測、後測成績有明顯差異。透過實物教具立體方塊的操作並搭配運用幾何軟體 Cabri 3D 來輔助空間旋轉能力的實驗教學，學生表現具有良好的立即教學成效。

2.保留成效

實驗組學生在空間旋轉課程教學後的延後測平均分數較後測平均分數進步 1.452 分，成對樣本 t 檢定分析中，$t(30) = 3.439$，$p = .002$，已達顯著水準。可得知在教學後過了三週，學生的空間旋轉能力具有保留成效，且有進步的現象。

綜合上述的研究結果可知，使用幾何軟體 Cabri 3D 電腦操作並搭配實體教具學習的學童，於實驗教學後具有良好的立即教學成效、保留成效，這與高俊彬（2008）、黃惠薇（2008）、呂易儒（2012）等人認為以資訊幾何軟體 Cabri 3D 融入教學中能提高學生學習成效的論點是一致

的。也與林佳蓉（2004）、林逸農（2006）、Cheng 與 Mix（2014）、Wheatley 與 Wheatley（1979）等人所持的觀點相同，學童只要經過適切的引導與教學學習，可以在空間能力顯見其進步的表現。

（三）控制組學生的學習成效

1.立即教學成效

根據控制組前測、後測成對樣本 t 檢定分析的數據資料，控制組學生在空間旋轉課程教學後的後測平均分數較前測平均分數進步 0.633 分，$t(29) = 0.983$，$p = .334$，未達顯著水準。可得知在空間旋轉教學後，控制組學生前測、後測成績並無出現明顯差異。透過實物教具立體方塊的操作進行空間旋轉能力的實驗教學，學生成績表現雖有進步但未能立即看到明顯的立即教學成效。

2.保留成效

學生在空間旋轉課程教學後的延後測平均分數較後測平均分數進步 1.733 分，成對樣本 t 檢定分析中，$t(29) = 3.598$，$p = .001$，已達顯著水準。可得知在教學後過了三週，學生的空間旋轉能力具有保留成效，且有進步的現象。

綜合上述的研究結果可知，使用實體教具學習的學童，於教學後未能有明顯的立即教學成效。但在教學後三週，延後測成績明顯進步，數據資料分析中出現了明顯的保留成效，表示控制組學生雖未能在教學當下立即明顯進步，但在一段時間後其空間能力都已提升。

總結

由上得知不同教學模式進行空間旋轉的教學活動後，對實驗組具有顯著立即教學、保留成效。而控制組雖不能馬上呈現顯著立即教學成效，但在保留成效顯著呈現。相對於控制組，實驗組能在教學後產生立即教學成效其可能的原因有三：一是二年級學生對於能到電腦教室進行電腦操控的新鮮感與好奇。每當學生得知要進入電腦教室進行實驗教學時，總是雀躍不已。在操控滑鼠過程中，每個孩子都樂在其中、驚聲連連，也不時將滑鼠操作的結果與同儕分享。學生的學習態度與興致在教師的觀察下，確實高昂許多。此結果與 Bouck 與 Flanagan（2010）的發現一致。第二個原因則是實驗組學童以 Cabri 3D 幾何軟體對照實體積木的學習時，就已經在進行三維形體與二維圖形的辨識，由於本研究的空間旋轉能力測驗係採二維紙筆評量呈現方式與虛擬教具剛顯示在螢幕平面未操作前一樣，故實驗組比對照組對於二維圖形的辨識更能適應。再從 Piaget 幾何認知發展、van-Hiele 兒童幾何思考發展及 Duval 幾何概念理解角度來看，第三個原因可能兩種不同表徵教具之操弄更能促進對具體運思操作期、視覺期學童學習幾何空間旋轉概念的理解。至於兩組在學習成效沒有顯著差異可能是基於同一教師、同樣教學目標、一樣教學時間，兩種教具也能旋轉。

三、二年級學童解決空間旋轉測驗的解題策略及錯誤類型

接受訪談的對象是從兩組各選取表達能力好、口才較佳的學生，且顧及訪談不同成就表現的學童，因此挑其前、後測成績表現明顯進步者 2 名，前、後測成績表現明顯退步者 2 名，及成績無明顯差異又表現較差的學童 3 名，兩班共計挑選 14 名，進行一對一半結構式訪談，以蒐集學童的錯誤類型及解題策略。

晤談題目的篩選方式，研究者先分析各試題在後測以及延後測的答對率，從立方塊旋轉方式及立方塊和桌面的關係之六大類題目中，挑選試題答對率在 0.5 以下的試題或兩組學童表現差異較大的題目。因此整理出訪談題目為以下 6 題，如圖 5、圖 6、圖 7、圖 8、圖 9、圖 10。

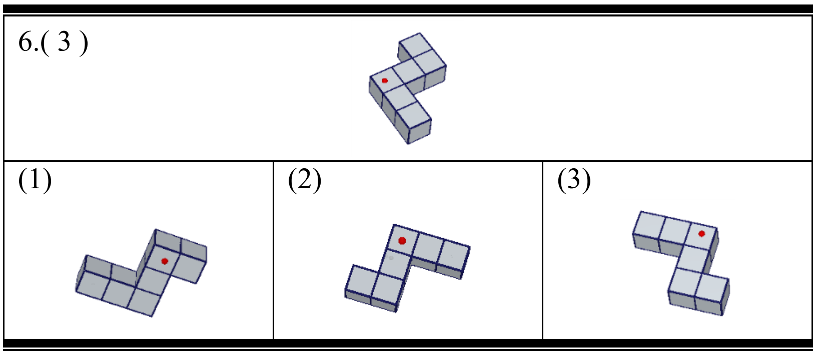


圖 5　空間旋轉測驗訪談試題第 6 題

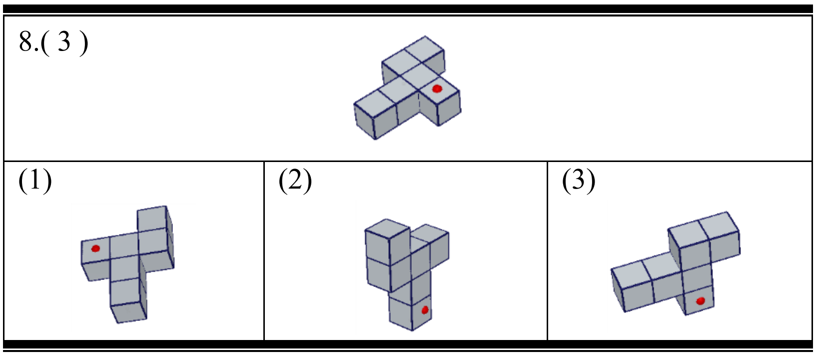


圖 6　空間旋轉測驗訪談試題第 8 題

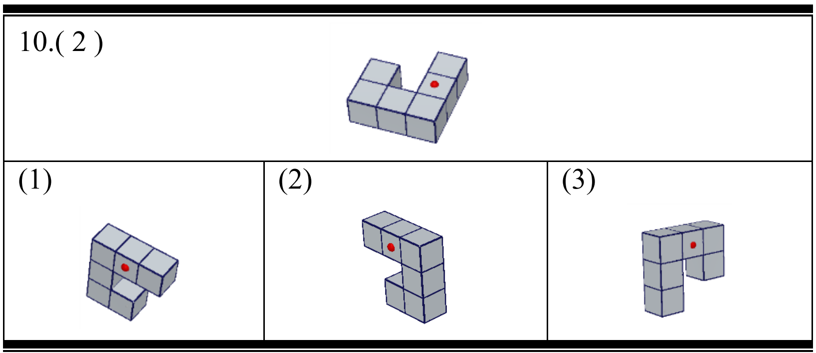


圖 7　空間旋轉測驗訪談試題第 **10** 題

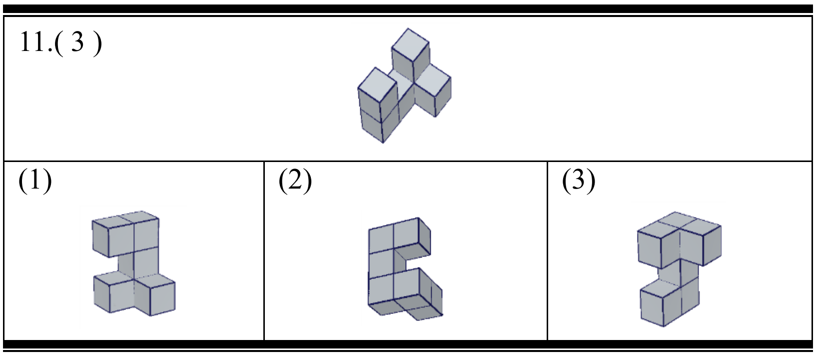


圖 8　空間旋轉測驗訪談試題第 **11** 題

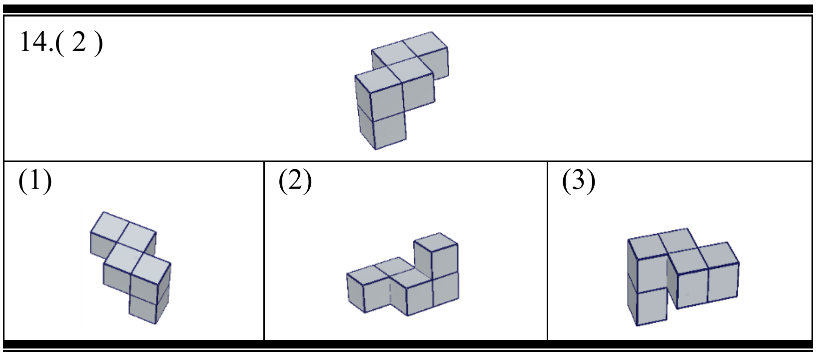


圖 9　空間旋轉測驗訪談試題第 **14** 題

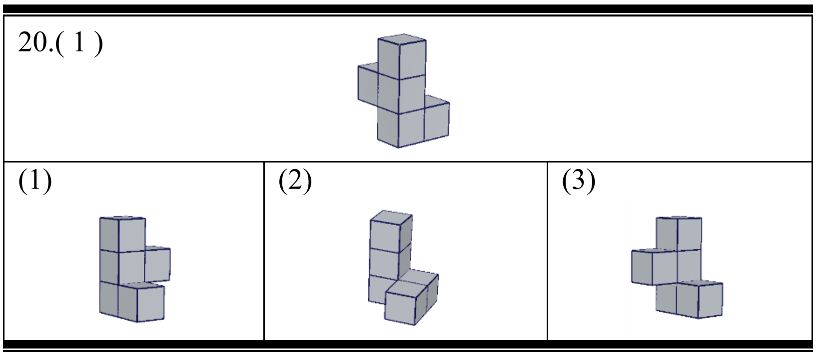


圖 10　空間旋轉測驗訪談試題第 **20** 題

接著整理每一試題各個選項的選答率，如表 5。挑選出的訪談題目再仔細分析其每一選項的選答率，選答率在 0.3 以上的錯誤選答列為訪談的重點問題，以分析學童的錯誤類型。

表 5

訪談題目之選答率

題號	選項 1（%）	選項 2（%）	選項 3（%）
6	3.3	$\boxed{55.7}$	41.0
8	19.7	6.6	73.8
10	$\boxed{39.3}$	55.7	3.3
11	$\boxed{70.5}$	13.1	16.4
14	$\boxed{49.2}$	27.9	23.0
20	75.4	23.0	1.6

註：　為該題正確答案

$\boxed{}$為錯誤選答率皆在 0.3 以上

以下為將訪談學生後的紀錄內容，進行整理，發現兩組學生解題策略及錯誤類型大同小異，茲將學童的空間旋轉能力試題之解題策略(含正確和錯誤解題策略)並將錯誤類型分析如下：

（一）解題策略

1.心像旋轉

學生在心理以想像的方式將立方塊做心理旋轉的動作，旋轉後在腦海中形成立方塊影像，再與題目的圖形做比對。

SE20 回答第 20 題：(正確)

T：那 20 題呢？

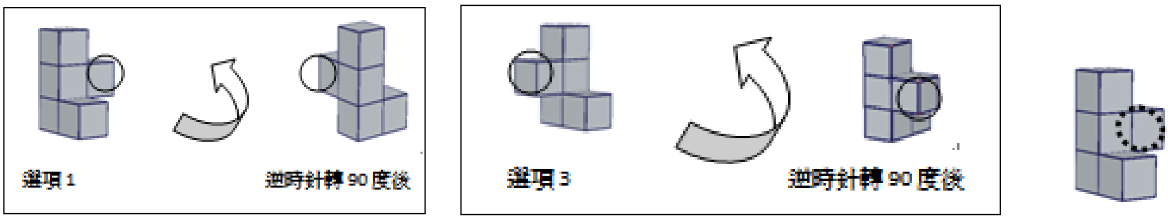
SE20：第 1 個

T：你怎麼確定的？

SE20：因為這兩個很像（選項 1 和 3），這個（選項 1）轉了之後（逆時針轉）這個（圈起處）是會跑到這裡（圖 11(A)，指與題目相同位置），但是這個（選項 3 圈起處）轉過來（逆時針轉）是跑到這裡來（圖 11(B)，指與題目不同方向位置）。

T：所以你覺得 1 和 3 很像，就轉這兩個，轉了之後發現只有第 1 個選項的這一顆（圖 11(C)）跟題目角度一樣？

SE20：對。



(A) (B) (C)

圖 11　SE20 於試題 20 的解題記錄

心像旋轉是在心理運作想像，雖然學生做了心像旋轉，但也可能因為立方連塊的複雜度而受到影響，其心像能力不足無法形成正確的心像旋轉，而導致選擇了錯誤的答案，如以下 SE10 的訪談結果。

SE10 回答第 14 題：(正確答案是 2，學生選了錯誤答案 1。)

SE10：第 1 個

T：為什麼？

SE10：它（選項 1）跟它（題目原圖）題型一模一樣，把它（選項 1）轉成跟它（題目原圖）同方向就好了。

T：你說你覺得他們長得一模一樣？

SE10：對！把它（選項 1）轉成它（題目原圖）這一面它就一模一樣。

T：那你怎麼轉的？你用說的或手比，都可以。

SE10：就把它拿到另外一邊（手勢動作—順時針轉選項 1）

T：把它轉過來就會一樣？

SE10：對，這個頭放到這邊（圖 12(A)），對好然後就 ok 了。

T：轉過來之後這個（頭）是（題目原圖）這顆（圖 12(B)）？

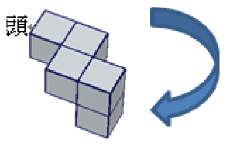
SE10：嗯！

T：那老師編號 2 的這顆呢？

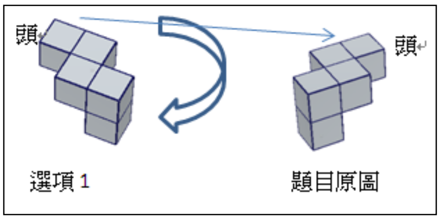
SE10：這顆（圖 12(C)）。

T：那寫 3 的這顆，是哪一顆？

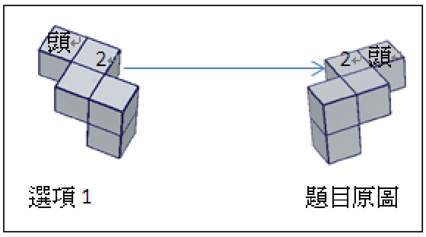
SE10：這顆（圖 12(D)）。



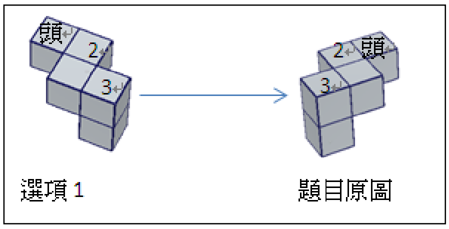
(A)



(B)



(C)



(D)

圖 12 SE10 於試題 14 的解題記錄

像這樣的學生，在心裡進行心像旋轉，但卻出現鏡射形體的迷思，將旋轉後呈現鏡射形的立方塊誤認為是相同的立方塊。

在這次的空間旋轉能力測驗中，心像旋轉是學生使用機率較高的解題方式。但並沒有導致學生都能有正確的結果，除了立方連塊的擺放方式、立方連塊的複雜度，學生心 像旋轉的成熟度等，都會影響其解題結果。

2.切割立方塊，分析形體特徵

學生將整個立方塊先分段做切割，變成幾個部分後，再一部分一部分的與題目的圖形做比對。

SC16 回答第 6 題：(正確)

T：我們先看這張考卷第 6 題。想一想，你會選哪一個答案？

SC16：第 3 個

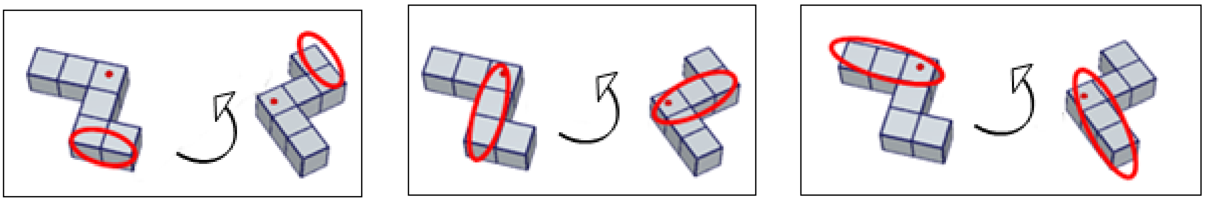
T：為什麼你會選第 3 個？

SC16：(手指著積木圖案比畫)這邊一横這邊也一横，這邊也這樣彎過去…

T：所以你是把它分成：

這邊（選項 3）兩塊跟這邊（題目原圖）這兩塊一樣（圖 13(A)），然後横的這 3 塊有黑點的也一樣（圖 13(B)），然後直的也一樣（圖 13(C)）。

SC16：嗯。



(A)　(B)　(C)

圖 13　SC16 於試題 6 的解題記錄

以上的學生在心中將立方塊分割成三個小部分，再從選項中一部分一部分的檢核比對，找出三個部分都相同的立方塊。

相對於參考立方連塊的整體外型，學生會依照立方連塊的特徵進行切割處理，以方便觀察者進行形體分析比對。尤其對於較複雜的立方連塊，學生更容易採取先將立方塊做分割切塊的解題方式。

3.整體外觀特徵

學生依照立方塊整體性的外型特徵，以直觀方式尋找形狀相同的立方連塊。

SE26 回答第 8 題：(正確答案是 3，學生選了錯誤答案 1。)

T：再來看第 8 題，你會選哪一個答案？。

SE26：第 1 個。

T：為什麼？

SE26：因為這裡（第 1 個）這樣轉過來，這裡跟這個的形狀都一樣。

T：「這裡」是指...上面嗎？還是整個？

SE26：整個。

T：那你覺得黑點的位置對嗎？

SE26：對。這裡是 L 型（圖 14(A)），這裡也是 L 型（圖 14(B)）。

(A)　(B)

圖 14　SE26 於試題 8 的解題記錄

以上的學生依據整個立方塊的外型來判斷，找出外形相像的，卻沒有注意到「點」的位置是否也相同。

此類型學生多是以直觀方式，判斷立方塊整體的外形，尋找整體結構相同的答案。

4.選擇容易翻轉旋轉的立方連塊

學生認為有兩個可能是正確答案的選項時，會傾向選擇在翻轉上是較簡單完成的答案。較複雜的翻轉，亦即旋轉角度比較多時，學生雖有猶豫，但不會選擇該選項。

SC31 回答第 10 題：(正確)

T：第 10 題你怎麼做？

SC31：應該 2 是一樣的，然後....因為它（選項 2，圖 15(A)）這個只要稍微轉過來再放平就好了。這個（選項 1，圖 15(B)）也是一樣要再翻還要再轉。

T：那如果把它翻、再轉，會不會跟第 10 題上面這個圖（圖 15(C)）一樣？

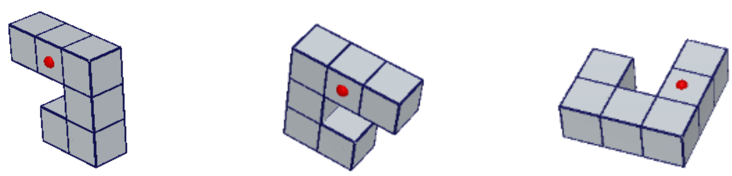
SC31：(點頭)

T：也是一樣？那 2 也一樣 1 也一樣你是覺得兩個答案都對？

SC31：嗯...就覺得一個比較好用，一個比較麻煩。

T：喔，所以你選了一個比較好用，很快就可以轉好的？

SC31：嗯。



(A) (B) (C)

圖 15　SC31 於試題 10 的解題記錄

以上的學生在作答時，當認為出現兩個答案都正確時，會選擇比較容易就翻轉出來的立方塊，也就是旋轉角度較少者作為答案。

5.轉動試卷

學生會選擇轉動題目試卷紙張，再比對題目圖形來選擇答案。

SC01 回答第 8 題：(正確)

SC01：2 號（選項 2）也有可能在這裡，這兩個（選項 2 和 3）可能性比較高。

T：哪這兩個怎麼選擇，哪個才是對的？

SC01：...那我們...就來...我們就來反轉（翻轉）看看它們。

T：所以你要轉紙？

SC01：對。我先翻轉 2 號（選項 2）的。（轉動試題紙張...）沒有辦法翻轉成這樣的（題目原圖），所以 2 號不可能。

T：2 號（選項 2）的你轉了紙之後，把紙轉過來之後，沒有辦法轉成像上面一樣的，所以你覺得 2 號不可能。

SC01：對。

T：那你有沒有辦法轉 3 號呢？

SC01：有啊！（開始轉紙...）這樣（紙張向左轉）。

T：所以這樣就跟上面的圖一樣了。

SC01：對，轉紙比較簡單。

學童無法做心像旋轉時，會利用試卷的轉動來輔助其答案的選擇。不過當物件需進行的前後向或左右向翻轉時，就無法順利由轉動紙張來判斷答案，因此利用此解題策略並不多。

小結

整理有關空間能力旋轉測驗學生出現的解題策略有：1.心像旋轉。2.切割立方塊，分析形體特徵。3.整體外觀特徵。4.選擇容易翻轉旋轉的立方連塊。5.轉動試卷。

（二）錯誤類型

1.鏡射形體混淆

由於鏡射形體外觀相似，學生也會認為那是一樣的立方塊，而未做旋轉確認。在空間旋轉能力測驗中，包含有鏡射形體的題目中，學生在在鏡射形體的誘答選項上，也明顯出現較高的選答率。

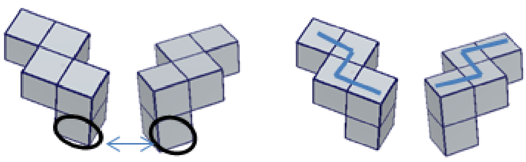
SE30 回答第 14 題：（正確答案是 2，學生選了錯誤答案 1。）

T：第 14 題。

SE30：1。

T：你怎麼確定是第 1 個？

SE30：它這邊跟這邊也有一塊（圖 16(A)），然後這邊很像一個 Z 的東西（圖 16(B)）。



(A) (B)

圖 16　SE30 於試題 14 的解題記錄

SC20 回答第 6 題：（正確答案是 3，學生選了錯誤答案 2。）

T：好，你剛剛有看第 6 題，那你知道第 6 題的答案是什麼嗎？

SC20：第 2 個。

T：第 2 個，好，你怎麼找出它來的？

SC20：因為它轉過來這個點跟它（選項 2）一樣的方向，它上面也是一個 L 狀。

T：上面這裡有一個 L 狀？

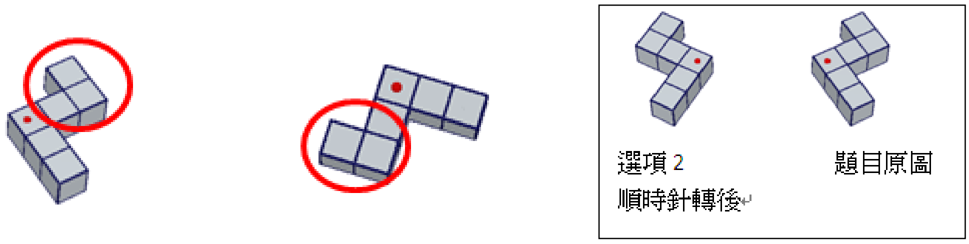
SC20：嗯。

T：L 狀？在這裡是不是？（圖 17(A)）

SC20：嗯。

T：然後你說「點」的位置（選項 2 和題目原圖）也一樣。然後這裡（選項 2，圖 17(B)）有 L，這裡（題目原圖，圖 17(A)）也有 L。

SC20：嗯。



(A)　(B)　(C)

圖 17　SC20 於試題 6 的解題記錄

學生在立方塊外型相似的情況下，進行心像旋轉，而誤認鏡射後的形狀就是相同的立方塊（圖 17(C)）。

2.只旋轉 90 度，忽略可轉到 180 度

學生將立方塊進行心像旋轉，只做 90 度的旋轉就停止，而未能將立方塊進行到 180 度的旋轉。

SC17 回答第 14 題：（正確答案是 2，學生選了錯誤答案 1。）

T：第 14 題，你會選哪一個答案？

SC17：第一個。

T：為什麼選第一個？

.

.

.

T：那第 2 個答案對不對？

SC17：不對。

T：為什麼？你有沒有試著轉或翻？

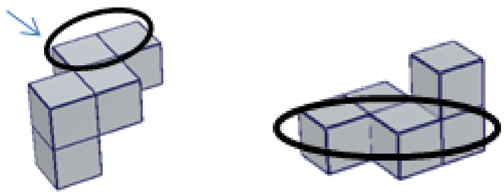
SC17：(題目原圖）怎麼翻都跟它（選項 2）不一樣。如果把它倒下來，這個會頂住 這不會頂住

T：往哪邊倒？

SC17：(手勢動作-題目原圖往後倒 90 度）

T：所以你的意思是題目往後倒，會有 2 顆停在桌上（圖 18(A)），但是選項 2 有 4 顆停在桌上（圖 18(B)）？

SC17：對。



(A)　　　　(B)

圖 18　SC17 於試題 14 的解題記錄

3.與桌面接觸的數量相同時，直接利用其他立方塊的特徵分析

當兩個立方塊與桌面的關與桌面接觸的數量相同時，學生會忽略可以再進行旋轉對照，而直接利用其他凸出桌面的立方塊特徵進行分析。

SE19 回答第 14 題：(此題學生選了正確答案 2，但是在訪談過程中，學生回答她排除答案 1 時的錯誤現象。)

T：再來看 14 題。

SE19：第 2 個。

T：為什麼覺得是第 2 個？

SE19：這個把它翻正…翻正（手勢動作—向左翻），不要倒下來，就是凸凸的朝下面。

T：凸凸的是哪一塊？

SE19：(手指出圈起處，如圖 19(A)）

T：那老師編的 1 號是題目的哪一塊？

SE19：(手指出，如圖 19(B)）

T：2 號呢？

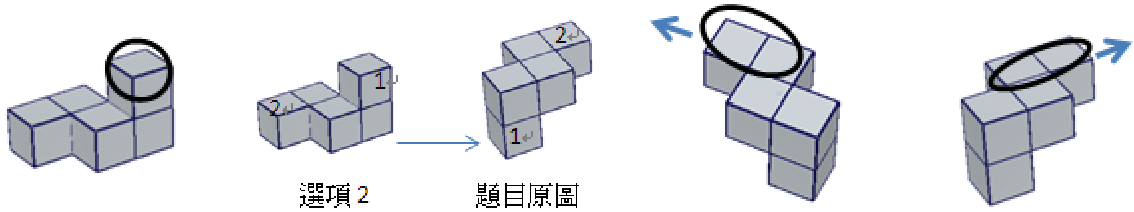
SE19：（手指出，如圖 19(B)）

T：那答案 1 有沒有可能是對的？

SE19：不對。

T：你有沒有發現哪裡不對？

SE19：這個（選項 1）是朝這邊（圖 19(C)），這個（題目原圖）是朝這邊（圖 19(D)）。



(A) (B) (C) (D)

圖 19　SE19 於試題 14 的解題記錄

4.只進行部分形體的旋轉

學生做心像旋轉時，只旋轉了立方塊其中一部份形體，忽略立方塊的其他部分。

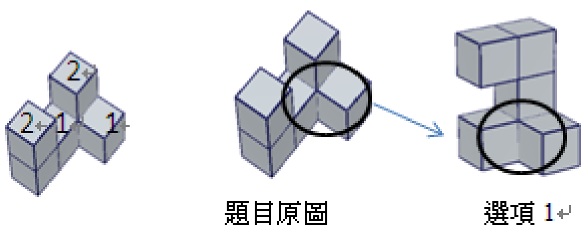
SC16 回答第 11 題：（正確答案是 3，學生選了錯誤答案 1。）

T：第 11 題呢？

SC16：這裡有 2 個 1 個，1 個 2 個（圖 20(A)），所以就像 3…嗯…第 1 個。

T：題目可以怎麼轉，會跟第 1 個答案一樣？

SC16：這個（題目原圖）轉過來（手勢-順時針轉）再倒過來（立起來）就一樣（圖 20(B)），3 顆在底下，中間就 1 個，上面就 2 顆。



(A) (B)

圖 20　SC16 於試題 11 的解題記錄

5.只注意到部份的特徵

學生忽略整體立方塊的關係，只注意到立方連塊的某些特徵。

SC17 回答第 11 題：（正確答案是 3，學生選了錯誤答案 2。）

T：第 11 題呢？

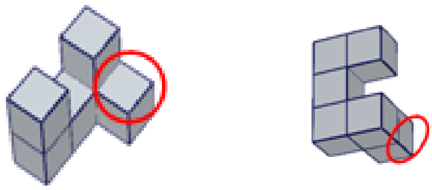
SC17：第 2 個。

T：為什麼？

SC17：因為它（題目原圖，如圖 21(A)）立起來這邊有一個（圈起來的那一顆），如果它（選項 2，如圖 21(B)）這樣立起來這邊也有一塊。

T：所以看到了那一塊立起來會一樣。

SC17：對。



(A)　　　　(B)

圖 21　SC17 於試題 11 的解題記錄

小結

二年級學童出現的錯誤類型有：

1.鏡射形體混淆。當學生以「心像旋轉策略」或直觀的以「整體外觀特徵」進行解題時，對於鏡射的問題類型難以掌握，而造成鏡射形體混淆的錯誤類型。

2.只旋轉 90 度，忽略可轉到 180 度。當學生以「心像旋轉策略」或「選擇容易翻轉旋轉的立方連塊」解題時，因未能正確掌握超過 90 度的旋轉，故產生錯誤選擇。

3.與桌面接觸的數量相同時，直接利用其他立方塊的特徵分析。當學生以「心像旋轉策略」或「選擇容易翻轉旋轉的立方連塊」解題時，因心像旋轉能力不足，或遇到較複雜的立方塊時，學生在初步的、可掌握的翻轉旋轉後，逕行利用立方塊與桌面的關係尋求解題。

4.只進行部分形體的旋轉。當學生在「心像旋轉」時，未充分掌握整個立方塊，僅針對部分方塊的旋轉。

5.只注意到部份的特徵等類型。當學生以「切割立方塊，分析形體特徵」進行解題時，忽略其他立方塊的關係而形成錯誤。

本研究所發現錯誤類型 1.鏡射形體混淆和錯誤類型 3.桌面接觸數與陳師潔（2011）研究結果是一樣的，基本上以視覺為主。

總結

空間任務解題策略經常出現的區分法是關鍵特徵策略（key features strategies），移動物件策略（move objects strategies），和移動自身策略（move self strategies）（Barrat, 1953；Carpenter & Just, 1986；Schulz, 1991；引自 Plath & Ruwisch, 2012）。在綜合整理學童的解題策略後，又可以將這些策略歸納分析如下：當學生使用「切割立方塊，分析形體特徵」、「整體外觀特徵」時，歸類屬於關鍵特徵策略。當學生使用「心像旋轉策略」、「選擇容易翻轉旋轉的立方連塊」或「轉動試卷」時，歸類屬於移動物件策略。

本研究的空間旋轉測驗問題，是類似於 Plath 與 Ruwisch（2012）針對四年級孩童進行立方塊七連塊配對的任務，是屬於心理旋轉任務。Plath 與 Ruwisch 提出，空間任務是一個典型的心理旋轉任務時，預期學童解決方式採用移動物體的動態策略。但事實上，面對不同類型的立方連塊呈現時，學生除了使用動態的移動物體策略外，也有學生使用分析性的關鍵特性策略，以靜態方式分析立方塊的特徵，再進行比對。

學童受到題目類型的影響，例如題目的立方連塊的複雜度與呈現的樣式，可能會影響學生策略的選擇。當然也有可能學生的個人喜好與習慣決定了他的解題策略。而且不管是否學生是使用符合理論所預期的策略，都能有致使成功解題。同樣的，也出現了學童使用符合理論所預期的移動物體策略來解決心理旋轉的任務，但卻呈現失敗的解題。

伍、結論與建議

依據本研究的待答問題，針對接受不同教學模式之國小二年級學生在空間旋轉能力的學習成效、解題策略以及錯誤類型加以彙整提出最後結論和建議；侷限資源本研究限制也做個說明

一、結論

（一）二年級學童在空間旋轉能力的學習成效

1. 運用幾何軟體 Cabri 3D 並搭配實體教具立體方塊操的教學能有效幫增進學生空間概念的學習。
2. 兩種空間概念的教學皆能提升學生的空間能力。

（二）二年級學童在空間旋轉能力的解題策略與錯誤類型

在空間空間旋轉能力延後測結束後，進行 14 名學童的訪談，整理訪談的結果，進行學生出現的解題策略與錯誤類型之分析，歸納整理如下：

1. 解題策略

以下是晤談後，將學生解題的過程進行整理歸納。

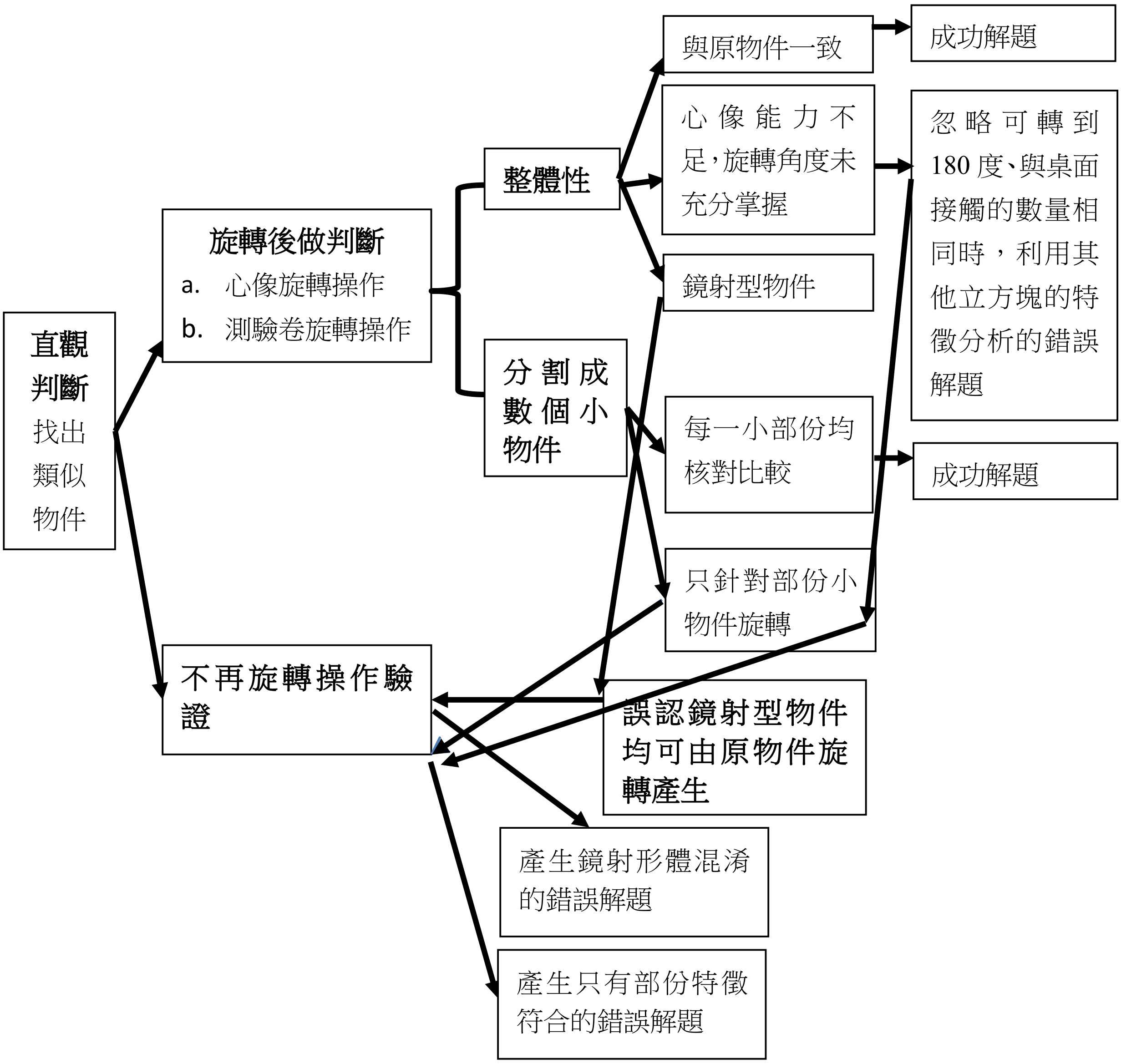


圖 22 學生解題流程圖

在訪談過程中，發現兩組多數學生先以直觀方式做選項的判斷，先找出整體結構類似的立方塊，接下來欲確認答案的方式則大多會使用心像旋轉的解題策略，並再以整體或是切割立方連塊、進行分析比對來做確認。也有部分學生以直觀方式做形體的判別後，並未做旋轉而是直接選擇答案，此類學生容易出現鏡射形體迷思。

然而立方連塊拐彎的複雜度與旋轉的角度會影響學生的心像運作之正確性。當立方塊與桌面關係是屬於平貼桌面時，學生較會使用心像旋轉的方式，並做出正確答案。而當立方塊與桌面關係是屬於凸出桌面時，學生在做旋轉想像時比較無法掌握旋轉某些角度之後的圖像，而會出現於心像旋轉後仍無法做出正確的選擇。

2. 錯誤類型

二年級學童進行空間旋轉能力測驗會出現的錯誤類型有：鏡射形體混淆、只旋轉 90 度，忽略可轉到 180 度、與桌面接觸的數量相同時，直接利用其他立方塊的特徵分析、只進行部分形體的旋轉，以及只注意到部份的特徵。

從學生的晤談中，發現學生容易受鏡射形體的混淆，像是上述學童接受訪談在解第 6 題與第 14 題時，都會認為鏡射形體與該物件就是相同的立方塊。在測驗結果中，也顯示出學生在包含有鏡射形體的這類型題目的錯誤率高，更發現當題目中鏡射誘答選項與原物件的擺放角度幾乎成面對稱的圖樣時（例如第 6、14 題），學生選擇該鏡射誘答選項的比率幾近 50%，這與陳師潔（2011）提出的觀點相同，二年級兒童對於鏡射的問題類型是比較難掌握的。立方連塊形體非常接近的鏡射形體選項，確實容易造成學生在題目選擇上的誘答。另外當學生對於較複雜的立方連塊，無法在心裡做出正確心像旋轉時，學童就會出現只進行該立方連形體的某一部分的旋轉，並依他所旋轉的部分形體來選擇答案。另外學童在進行立方塊旋轉時，大多能掌握旋轉 90 度後的心像，但對於旋轉的角度增大時，有些學童會產生不確定感，有些學童甚至不認為可以進行如此大的角度旋轉或翻轉。

二、建議

（一）就教學上而言

本研究結果顯示，以動態幾何軟體搭配實體積木融入空間旋轉能力教學，在立即教學成效的表現上確實有助於二年級學生的空間旋轉能力學習。因此，研究者建議教師在進行相關課程時，可以動態幾何軟體作為輔助的虛擬教具，促進學生的學習成效。而運用資訊科技於課程中是目前教育發展趨勢，而動態虛擬軟體的應用能帶來有別於實體教具之效果，並且能彌補實體教具在實際教學中所產生的不足與問題，像是教師拿實體教具展示操作時所產生視覺死角的問題等。

另外，從學生的測驗結果和晤談分析，發現二年級學生對於鏡射形的題目容易產生迷思，因此建議教師於教學上，利用 Cabri 3D 軟體操控配合實體積木教具操作來輔助教學，讓學生產生認知衝突，衝突學生的迷思概念，進而予以修正。例如當學生認為以下兩組立方塊為相同的立方塊時，則教師可以請學生利用 Cabri 3D 軟體電腦現場操作。讓學生試試，是否能透過旋轉、翻轉成同樣的角度，以表示兩組立方塊是相同的立方塊。接著再以實體積木教具操，以確認結果。讓學生鏡射形題目的迷思能立即獲得修正。

（二）就課程編製而言

空間旋轉能力與日常生活有關，又與空間視覺、空間定位有關。國外課程二年級已有空間旋轉單元，由本研究學童在接受空間旋轉能力教學課程後之學習成效，顯示出學生相關能力已提升，因此空間旋轉能力教學對於二年級學童是適合的。故國內數學課程亦可將空間旋轉列入二年級學習單元之參考。

（三）就未來研究而言

本研究的研究工具空間旋轉能力測驗是以二維紙筆測驗方式進行，主要想藉由二維測驗方式探討兩組學生在空間能力上三維物件轉換成二維的成效表現。而未來的研究在測驗上則建議可以直接呈現三維的立方塊，進行動態幾何軟體搭配實體積木融入空間旋轉能力教學之探討。其次本研究僅針對不同教學模式於空間旋轉做探究，亦可針對空間截面、展開摺合等空間能力做類似研究。有關學生學習態度，除了觀察學生在教室學習態度之外亦可透過量表來蒐集量化資料，以進一步了解學生們的學習興趣。

另外在進行學生解題訪談時，由於低年級學生的口語表達未能很清楚，而造成訪談溝通上的困難，建議在訪談時給予學生立方塊實體教具作立即性操作，以方便了解學生究竟是如何進行旋轉。這除了能縮短訪談的時間及語意上的理解外，當學生於訪談的解題當下，出現了錯誤迷思時，可藉由實體教具的操作，也能當下釐清不正確的觀點。

本研究雖力求測驗卷信效度能達高標程度，但由於預試的樣本數不夠多，信度比 0.8 仍差一些。因此，仍需更多樣本的檢測，以達較高的信度比。或許在未來研究，可以除了增加預試樣本數外，再透過質性分析以增強研究的信度。

誌謝

本文作者群非常感謝審查委員們提供一些很有建設性修改意見，也一併致謝貴刊編輯小組及助理對本篇圖文多次校訂與排版。

參考文獻

王智弘（2006）。**多方塊虛擬教具的開發與教學研究**（未出版之碩士論文）。國立交通大學，新竹市。【Wang, Chih-Hung (2006). *Research on the development and teaching of virtual manipulative - Example of polyominoes explorations* (Unpublished master’s thesis). National Chiao Tung University, Hsinchu. (in Chinese)】

左台益（2012）。動態幾何系統的概念工具。**中等教育**，**63**（4），6-15。doi: 10.6249/SE.2012.63.4.01【Tso, Tai-Yi (2012). The conceptual tool in dynamic geometry system. *Secondary Education*, *63*(4), 6-15. doi: 10.6249/SE.2012.63.4.01 (in Chinese)】

左台益、梁勇能（2001）。國二學生空間能力與 van Hiele 幾何思考層次相關性研究。**師大學報：科學教育類**，**46**（1&2），1-20。doi: 10.6300/JNTNU.2001.46.01 【Tso, Tai-Yi, & Liang, Yung-Neng (2001). The study of interrelationship between spatial abilities and van Hiele levels of thinking in geometry of eighth-grade students. *Journal of Taiwan Normal University: Science Education*, *46*(1&2), 1-20. doi: 10.6300/JNTNU.2001.46.01 (in Chinese)】

全任重（2005）。**動態幾何環境下的立體幾何**。行政院國家科學委員會專題研究計畫（編號：NSC94-2521-S-007-001），未出版。【Chuan, Jen-Chung (2005). *Solid geometry under the dynamic geometry environment*. National Science Council Project Report of R.O.C (NSC94-2521-S-007-001), unpublished. (in Chinese)】

呂易儒（2012）。**動態幾何系統 Cabri 3D 輔助教學下對高中生空間概念單元學習成效影響之研究**（未出版之碩士論文）。國立交通大學，新竹市。【Lu, I-Ju (2012). *The study on the effect of Cabri 3D on spatial conception unit into the education of high school mathematics* (Unpublished master's thesis). National Chiao Tung University, Hsinchu. (in Chinese)】

林佳蓉（2004）。**幾何空間教學對國小二年級學童空間能力學習之研究**（未出版之碩士論文）。國立臺北師範學院，台北市。【Lin, Chia-Jung (2004). *The study of geometric spatial teaching for second graders' spatial ability learning* (Unpublished master's thesis). National Taipei Teachers College, Taipei. (in Chinese)】

林倉億（2011）。用電腦畫中學數學。**科學發展月刊**，**459**，18-23。【Lin, Tsang-I (2011). Using computer to draw middle school mathematics. *Science Development*, *459*, 18-23. (in Chinese)】

林逸農（2006）。**五連方幾何積木課程對國小學童視覺空間能力的影響**（未出版之碩士論文）。國立臺灣科技大學，臺北市。【Lin, Yi-Nung (2006). *The effect of pentomino lessons on children's visual-spatial abilities* (Unpublished master's thesis). National Taiwan University of Science and Technology, Taipei. (in Chinese)】

孫嘉德（2010）。**從教科書分析來瞭解我國四年級學生在TIMSS 2003與TIMSS 2007幾何與測量表現之差異**（未出版之碩士論文）。國立新竹教育大學，新竹市。【Sun, Chia-Te (2010). *Textbooks analysis for understanding the fourth-graders performing the differences of TIMSS 2003 and TIMSS 2007 in geometry and measurement* (Unpublished master's thesis). National Hsinchu University of Education, Hsinchu. (in Chinese)】

高俊彬（2008）。**高中數學空間概念 Cabri 3D 電腦輔助教學之成效**（未出版之碩士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。【Kao, Chun-Pin (2008). *A study on the effect of computer-assisted instruction by Cabri 3D for space concept of senior high school mathematics* (Unpublished master's thesis). National Kaohsiung Normal University, Kaohsiung. (in Chinese)】

陳師潔（2011）。**國小二年級兒童以觸覺辨識正方體連塊的解題活動之個案研究**（未出版之碩士論文）。國立臺北教育大學，台北市。【Chen, Shih-Chieh (2011). *A case study on the haptic identification of tetrominoes and pentominoes problem solving for second graders* (Unpublished master's thesis). National Taipei University of Education, Taipei. (in Chinese)】

陳毓梅（2011）。**不同教具教學環境對國小一年級學生學習立方體積木堆疊計數的影響**（未出版之碩士論文）。中原大學，桃園市。【Chen, Yu-Mei (2011). *Effect of applying different manipulatives on first graders' learning of counting cubes in a 3D figure* (Unpublished master's thesis). Chung Yuan Christian University, Taoyuan. (in Chinese)】

莊月嬌、張英傑（2006）。九年一貫課程小學幾何教材內容與份量之分析。**國立臺北教育大學學報**，**19**(1)，33-66。【Chuang, Yueh-Chiao, & Chang, Ying-Chieh (2006). An analysis of content and quantity of geometry textbooks for elementary schools in the nine years curriculum】*Journal of National Taipei University of Education*, *19*(1), 33-66. (in Chinese)】

張碧芝、吳昭容（2009）。影響六年級學生立方體計數表現的因素－空間定位與視覺化的角色。**教育心理學報**，**41**（1），125-145。doi: 10.6251/BEP.20081212 【Chang, Pi-Chih, & Wu, Chao-Jung (2009). Exploring the factors that influence sixth graders' cubic enumeration: The roles of spatial orientation and visualization. *Bulletin of Educational Psychology*, *41*(1), 125-145. doi: 10.6251/BEP.20081212 (in Chinese)】

曾湘玲（2012）。**台灣與澳洲國小數學教科書幾何內容之比較研究**（未出版之碩士論文）。國立暨南國際大學，南投縣。【Tseng, Hsiang-Ling (2012). *The comparative study of geometric contents in the elementary mathematics textbooks of Taiwan and Australia* (Unpublished master's thesis). National Chi Nan University, Nantou. (in Chinese)】

黃惠薇（2008）。**資訊科技融入教學對國小六年級學童在空間旋轉能力之研究**（未出版之碩士論文）。國立臺北教育大學，台北市。【Huang, Hui-Wei (2008). *The study of information technology into instruction of spatial rotation ability for sixth graders* (Unpublished master's thesis). National Taipei University of Education, Taipei. (in Chinese)】

彭惠群（2010）。**芬蘭國小數學教科書之幾何教材研究－以 W 版為例**（未出版之碩士論文）。國立屏東教育大學，屏東市。【Peng, Hui-Chun (2010). *A research of Finland primary school geometric textbook contents—Based on W edition* (Unpublished master's thesis). National Pingtung University, Pingtung. (in Chinese)】

劉好（1994）。國小數學科新課程中幾何教材的設計。檢自 https://market.cloud.edu.tw/content/primary/math/jm_jh/math/index1.htm# 【Liu, Hao (1994). The design of geometry teaching material for new curriculum in elementary school mathematics. Retrieved from https://market.cloud.edu.tw/content/primary/math/jm_jh/math/index1.htm# (in Chinese)】

鄭美玲、陳光勳（2015）。國小六年級學生表面積與體積「量的公式概念」調查之研究。**國民教育**，**55**（4），73-90。【Cheng, Mei-Ling, & Chen, Kaung-Hsung (2015). A study on the sixth graders' quantitative formula concept of surface area and volume. *National Education*, *55*(4), 73-90. (in Chinese)】

張英傑、陳創義（2003）。九年一貫數學學習領域綱要諮詢意見—幾何篇。檢自 http://140.122.140.2/~cyc/mathedu/me9/nineyear/index.htm 【Chang, Ying-Chieh, & Chen, Chuang-I (2003). Counseling opinions in the outline of nine years integrated learning field for geometry. Retrieved from http://140.122.140.2/~cyc/mathedu/me9/nineyear/index.htm (in Chinese)】

Baki, A., Kosa, T., & Guven, B. (2011). A comparative study of the effects of using dynamic geometry software and physical manipulatives on the spatial visualisation skills of pre-service mathematics teachers. *British Journal of Educational Technology*, *42*(2), 291-310. doi: 10.1111/j.1467-8535.2009.01012.x

Battista, M. T. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(1), 47-60. doi: 10.2307/749456

Battista, M. T., Wheatley, G. H., & Talsma, G. (1982). The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(5), 332-340. doi: 10.2307/749007

Bouck, E. C., & Flanagan, S.M. (2010). Virtual manipulatives: What they are and how teachers can use them. *Intervention in School and Clinic*, *45*(3), 186-191. doi: 10.1177/1053451209349530

Casey, M. B., Nuttall, R. L., & Pezaris, E. (1997). Mediators of gender differences in mathematics college entrance test scores: A comparison of spatial skills with internalized beliefs and anxieties. *Developmental Psychology*, *33*(4), 669-680. doi: 10.1037//0012-1649.33.4.669

Casey, M. B., Nuttall, R. L., Pezaris, E., & Benbow, C. P. (1995). The influence of spatial ability on gender differences in mathematics college entrance test scores across diverse samples. *Developmental Psychology*, *31*(4), 697-705. doi: 10.1037/0012-1649.31.4.697

Cheng, Y., & Mix, K. S. (2014). Spatial training improves children's mathematics ability. *Journal of Cognition and Development*, *15*(1), 2-11. doi: 10.1080/15248372.2012.725186

Delgado, A.R., & Prieto, G. (2004). Cognitive mediators and sex-related differences in mathematics. *Intelligence*, *32*(1), 25-32. doi: 10.1016/S0160-2896(03)00061-8

Fennema, E., & Sherman, J. (1977). Sex-related differences in mathematics achievement, spatial visualization and affective factors. *American Educational Research Journal*, *14*(1), 51-71. doi: 10.3102/00028312014001051

Izard, J. (1990). Developing spatial skills with three-dimensional puzzles. *The Arithmetic Teacher*, *37*(6), 44.

Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child Development*, *56*(6), 1479-1498. doi: 10.2307/1130467

McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, *86*(5), 889-918. doi: 10.1037//0033-2909.86.5.889

Pittalis, M., & Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), 191-212. doi: 10.1007/s10649-010-9251-8

Plath, M., & Ruwisch, S. (2012). Elementary school children solve spatial tasks a variety of strategies. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educatio*n (Vol.3, pp. 305-312). Taipei, Taiwan: PME.

Weckbacher, L., & Okamoto, Y. (2014). Mental rotation ability in relation to self-perceptions of high school geometry. *Learning & Individual Differences*, *30*, 58-63. doi: 10.1016/j.lindif.2013.10.007

Wheatley, C. L., & Wheatley, G. H. (1979). Developing spatial ability. *Mathematics in School*, *8*(1), 10-11.

劉柏宏（2016）。
從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵—理論與案例分析。
臺灣數學教育期刊，3（1），55-83。
doi: 10.6278/tjme.20160413.001

從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵—理論與案例分析

劉柏宏
國立勤益科技大學基礎通識教育中心

數學是人類重要的智識遺產，可是卻鮮少人注意它和文化的關係。本文嘗試從數學與文化的關係出發，特別是數學與東西方文化的互動關係，探討數學文化的內涵，並主張數學文化包含「文化中的數學」和「數學中的文化」兩大構面。再者，數學素養一詞雖為大眾所耳熟能詳，然對其真正概念仍認識不清，而目前文獻對其內涵的論述仍然莫衷一是，難以釐清，甚至國際間的用詞也不盡相同。本文整理國際間數學素養相關文獻，分析相關詞彙定義的異同之處，以具體界定數學素養的概念。此外，本研究結合數學文化和數學素養，進一步提出數學文化素養的定義。希望透過培養學生的數學文化素養，能增進他們對數學本質的理解和學習認同。為釐清數學文化素養的概念，本文分別從「文化中的數學」和「數學中的文化」兩大構面中各介紹與分析一個具體案例，以做為數學文化素養之參考教材。我們希望經由定義數學文化素養、論述數學文化素養的內涵、和實際分析數學文化案例等程序，能夠建立一個概念框架，以做為數學文化相關的教學、評量、與實證研究的理論基礎。

關鍵詞：數學文化、數學文化素養、數學素養、數學與文化

通訊作者：劉柏宏，e-mail：liuph@ncut.edu.tw
收稿：2015 年 12 月 22 日；
接受刊登：2016 年 4 月 13 日。

Journal homepage: tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=56

Liu, P. H. (2016).
Discourse on the constituent of literacy for mathematical culture in terms of the relationship between mathematics and culture - Theoretical and case analysis.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *3*(1), 55-83.
doi: 10.6278/tjme.20160413.001

Discourse on the Constituent of Literacy for Mathematical Culture in Terms of the Relationship between Mathematics and Culture - Theoretical and Case Analysis

Po-Hung Liu

Fundamental General Education Center, National Chin-Yi University of Technology

Mathematics is a vital intellectual heritage of human beings, but few are aware of its relationship with culture. This study attempted to identify the constituents of mathematical culture in terms of the interrelationship between mathematics and culture, particularly the interaction of mathematics with Eastern and Western culture. We claim that mathematics in culture and culture in mathematics are the two main facets of mathematical culture. Furthermore, though the term "mathematical literacy" is well-known by the general public in Taiwan, its components and constituents are interpreted differently in the educational literature. In this study, we conducted an international comparison by reviewing and organizing relevant literature discussing mathematical literacy, and clarified the vagueness of similar concepts to find commonalities. This study then defined literacy for mathematical culture by integrating mathematical culture and mathematical literacy. Hopefully educating students in literacy for mathematical culture may increase students' understanding of the nature of mathematics and their positive attitudes toward the learning of mathematics. In addition, we propose two exemplary cases, one for mathematics in culture and the other for culture in mathematics, to illustrate the prototype of the literature for mathematical culture. We hope that our works of defining the literacy for mathematical culture, discussing the constituents of literacy for mathematical culture, and analyzing the exemplary cases of mathematical culture may provide as a theoretical framework for the teaching, assessment, and empirical study of mathematical culture.

Keywords: mathematical culture, literacy for mathematical culture, mathematical literacy, mathematics and culture

Corresponding author：Po-Hung Liu，e-mail：liuph@ncut.edu.tw
Received：22 December 2015;
Accepted：13 April 2016.

壹、前言

自 1999 年以來，無論是「國際教育學習成就調查委員會」（International Association for the Evaluation of Education Achievement, IEA）所辦的「國際數學與科學教育成就趨勢研究」（Trends in International Mathematics and Science Study, TIMSS），或是「經濟合作暨發展組織」（Organisation for Economic Co-operation and Development, OECD）所做的國際學生評量計劃（Programme for International Student Assessment, PISA），臺灣學生的數學成就和素養均排名在所有參與國家的前五名。但這兩項調查也顯示，臺灣學子對於數學的認同度卻落後於其他國家。OECD 指出，適當的數學素養可以幫助個人在生活上足以做為一個「積極的、關懷的、和反省的」社會公民。但臺灣這種對於數學「高成就、低態度」的現象恐將影響他們持續學習數學或往後參與數學相關工作的動機，也就無法培養出「帶得走的能力」，這不僅不利於國民數學素養的養成，也對臺灣整體社會與科技發展產生負面影響。只是近年屢屢被端上教改檯面的「數學素養」（mathematical literacy）社會大眾對其內涵仍然模糊且有疑慮。當然我們也深知廣義的「數學素養」是一個抽象且不容易定義的概念。但如果從特定面向出發，至少可以清楚界定其局部意涵。素養無法自外於文化，本文之目的即在於從數學與文化的關係，定義數學文化（mathematical culture）及分析其構面，並整合國際間對數學素養的論述，提出數學文化素養（literacy for mathematical culture）的定義並做案例介紹分析，以具體說明其內涵。

貳、數學與文化的關係

當代最負盛名的華人數學家丘成桐教授曾直言：「台灣數學教育最大問題是文化修養不夠」（何定照，2012），意指數學被過度工具化，以至於教學視野變得狹隘，而憑藉豐厚的文化底蘊才有助於做出開創性的學問。因而他自 2013 年開始在台灣主編《數理人文》期刊。他於創刊號的序言中說：

> 數學是一門很特殊的學科。它既能達成人文性的涵泳性靈，又有科學性的致知應用。……探討數學、人文與科學之間妙趣橫生的關係，讓我真正享受到了研究數學的樂趣。（丘成桐，2013，頁 1）

由此可見文化議題在數學素養與學習的重要性。本節將論述數學與文化的關係，以便進入下一節數學文化之前，能對數學與人類社會文化的互動過程有所認識。

一、西方文化中的數學

自十六世紀開始，西方科學開始對大自然展開量化分析，並憑藉其數學符號化的優勢，開創十七世紀科學革命的新局，歷經十八世紀理性時代（Age of Reason）期間數學、科學、哲學、和神學的交互思辨，為十九世紀數學灑下抽象化的種子。即使如此，數學史家克萊因（Morrise Kline）在《西方文化中的數學》一書開宗明義點出：

> 數學一直是形塑現代文化的一個主要力量，而且是文化的重要元素。不過這個論點對許多人來說是難以置信的，……這種懷疑源自普遍對於數學究竟是什麼的錯誤認知。（Kline, 1953, p. 3）

為描繪西方數學文化本質的輪廓，以下僅就數學的兩個關鍵發展期，探究西方數學發展與社會文化如何互動。

（一）古希臘的數學與文化：哲學與政治的影響

現今西方數學源頭至少可追溯自古希臘米立都的泰利斯（Thales of Miletus，約西元前 624–546）。泰利斯致力於探究物質的本質，被亞里斯多德奉為哲學之父，除擅於運用數學知識解決幾何測量問題，也關注自然天文現象，正彰顯古希臘數學文化中「哲學」、「邏輯演繹」、和「自然科學」等三大特徵。畢達哥拉斯的「萬物皆數」（all thing is number）不僅是一種哲學信念，也帶有神祕的宗教色彩。柏拉圖在《理想國》一書藉由蘇格拉底之口表達他對數學知識的看法：

> 這個學科[算術]看來能把靈魂引導到真理。……哲學家也應學會它，因為他們必須脫離可變世界，把握真理，……它用力將靈魂向上拉，並迫使靈魂討論純數本身。……幾何學的對象乃是永恆事物，而不是某種有時產生和滅亡的事物。……幾何學也能將靈魂引向真理，並且能開啟哲學心靈，提升目前所厭惡的沉淪。（Plato, 360 B.C./1952, p. 394）

柏拉圖主張實用性不是數學知識的目的，學習數學是為求真與求善，為掌握物質本質須探討不變的抽象概念而非可變的具象物體，因此抽象的幾何學成為訓練思辨的最佳助力。另一方面，古希臘當時的奴隸制度使得有學問的智者能遠離被視為低階的勞務工作，只專注於高階的純思維活動（Kline, 1953）。而由於希臘的議會制度，無論各城邦是君主制或民主制，「政府施政須遵守法律，公民階層因而必須學習論證與演辯的能力。或許就在這樣的氛圍下彰顯了證明在數學中的必要性」（Katz, 1998, p. 47），而這也正是形成歐幾里得編撰《幾何原本》的社會文化背景（張奠宙，2005）。西元前 325 年馬其頓的亞歷山大大帝將雅典的數學傳統引入埃及，形成

亞歷山卓學派，而歐幾里得便是此派代表人物。歐氏整理當時已知的數學知識，藉由事先約定的五項公理（axioms）和五項設準（postulates，或稱公設），以邏輯演繹的方式，循序漸進地證明了 465 個命題，成功豎立起邏輯演繹的數學典範。亞歷山卓學派的數學學者樂於將數學知識應用於實際問題之上，而這特徵在阿基米德的工作得到最佳的體現（Kline, 1953）。阿基米德除保有注重演繹證明的希臘數學傳統，他對實用工程技術的關注也受到其家鄉敘拉古（Syracuse）遭受羅馬軍隊武力威脅的影響，再次顯示社會文化背景與數學研究取向的關係。

（二）科學革命世紀的數學與文化：美學、神學、與定量科學觀

於西元 313 年羅馬帝國皇帝君士坦丁一世（Constantinus I）頒布《米蘭敕令》，宣告基督教為合法宗教，開啟政教合流的體制。接著查士丁尼一世（Justinian I）於西元 529 年下令關閉柏拉圖學院，更象徵著古希臘人文精神的結束，歐洲逐步邁入 Bullock（1985）所謂西方學術思想的「神學模式」，而數學也日漸淪為配合技術的工具性角色。直到約 800 年後，歷經東西方的戰爭、商業交流、與希臘典籍翻譯等文化激盪，人文精神的種子再度於義大利生根發芽，開啟所謂的文藝復興時期。此時人們開始從人的角度思考「人、上帝、與自然」之間的關係，因而展開西方思想的「人文模式」。這時由於數學知識的相對真確性，它不僅進入自然哲學（natural philosophy），也開始滲透到美學與神學領域。

十七世紀史稱科學革命世紀，歐洲進入 Bullock 所稱的「科學模式」，但究其根本並無法與「人文模式」和「神學模式」切割。在文藝復興時期，科學與藝術是上流知識分子所崇尚的一種文化，而射影幾何的發展就是源自文藝復興繪畫的透視法則，是藝術回饋科學的絕佳案例（張之傑，1997）。笛卡兒（Rene Descartes, 1596-1650）的數學工作係奠基於他虔誠的宗教信仰和哲學之上。在《方法論》（A Discourse on Method）這本哲學論著中藉幾何性質之確定性，論斷「上帝」必定存在：

> 我也注意到這些[幾何]論證不必然保證那些對象的存在。例如我覺察到一個三角形的三內角和必等於二直角，但不必然保證有任何三角形的存在。相對的，當重新審視至善之物的觀念時，我發現其存在性是被包含在概念之中，正如同（甚至比這更明顯）三角形的三內角等於二直角已被包含在三角形的概念之中……。由此可推，至善之物（即上帝）的存在至少和任何幾何證明同樣真確。（Descartes, 1637/1997, p. 28）

很明顯地，笛卡兒是仿效柏拉圖所說，完美三角形只存在於概念之中的說法，論證上帝存在的真確性。

另外我們必須注意到，十七世紀最偉大的數學與科學貢獻雖然來自於牛頓（Isaac Newton, 1643-1727）、萊布尼茲（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716）、與伯努利（Bernoulli）家族等人，

但究其思想根本應歸功於伽利略（Galileo Galilei, 1564-1642）徹底改變當時的研究物體運動的觀點。柏拉圖與亞理斯多德師徒二人對於真理的追求理念一致，途徑卻殊異。前者主張唯抽象數學才能理解萬物變化背後的本質；後者卻認為變化是萬物常態，須憑藉感官觀察方是正道。而伽利略結合兩者，透過觀察並記錄物體運動的變化，再以定量的數學方法呈現物體運動規律，從此科學進入數學化的時代。所以科學革命不能解讀為表象知識的革命，其實際內涵是研究焦點從「物體為何運動」轉移到「物體如何運動」的一種觀念革命。

二、東方文化中的數學

在此所謂東方文化中的數學將以中國傳統數學（中算）為代表。這是由於亞歷山大大帝東征時期已將部分古希臘數學的思想輸入阿拉伯地區和印度，而中國古代數學始終自成一家。至於日本的和算與韓國的東算雖各有特色，但論其本質仍不脫離中算的色彩。Kline（1972）在三大巨冊的《數學古今思想史》並未將中國古代數學發展納入，因為他認為中國古代數學並未對當代數學的主流思想產生影響。但若以文化論點觀之，即使中國古代數學知識似乎並未影響西方數學的發展，但其呈現的方式恰代表數學「演算」的典範，可以和古希臘數學的「演繹」典範做對比。以下兩節分別舉先秦時期和宋元時期為例，以比較數學在東西文化中的差異。

（一）先秦時期的數學與文化

歷史上，先秦諸子的百家爭鳴與古希臘哲學學派的思想崢嶸，幾乎同時發生在西元前六世紀至西元前三世紀之間，不過兩者對數學發展的影響卻大相逕庭。儒家雖將算學列為六藝之中，不過洪萬生（1991）直陳：「數學在孔子的儒學體系中是沒有任何地位的」（頁 3），因為孔子強調「德行之學」，不重視客觀論證，而算學只是技術官僚必備的工具性知識。不過另一方面，在當時與儒家並稱的墨學卻展現類似歐氏幾何的論證方式。如《墨經》<經上>第 52 條：「平，同高也」；第 58 條「圜，一中同長也」；第 59 條：「方，柱隅四讙也」等等，都頗具演繹風格。只是墨子「兼愛非攻」的理念並不見容於列國諸侯，再加上董仲舒「諸不在六藝之科、孔子之術者，皆絕其道，勿使並進。」的主張，使得墨子的演繹精神無法獲得重視與延續。

從《漢書‧律曆志》所載：「數者，……夫推曆生律制器，規圜矩方，權重衡平，準繩嘉量，探賾索隱，鉤深至遠，莫不用焉。」可以知道漢代對算學用處的評價仍在於測天文、量地理，因此數學知識掌握在天文台疇人、低級的官吏和工匠手中，其社會地位都不高（洪萬生，1991）。而成書約於東漢的《九章算術》是中國古代最具代表性的數學文本，係積累自春秋戰國時期的數學知識，而我們卻發現《九章算術》與先秦諸子百家的思想幾乎無關。再從西元六世紀顏之推在《顏氏家訓》中對子孫的告誡：「算術亦是六藝要事，……然可以兼明，不可以專業」，最能理解當時儒家對數學的態度。

（二）宋元時期的數學與文化

宋代可謂是中國歷史上「理性發皇」的時代（劉昭民，1982）。當時航海天文知識與量測技術達到巔峰，刺激數學計算的發展，形成宋元是中國數學的全盛時期，其中賈憲的「增乘開方法」、秦九韶的「大衍求一術」、直至元代朱世傑的「垛積術」等在中世紀數學都居於領先地位。且當時印刷術的發明有助於知識的流傳與普及，造就宋代理學成為儒家思想的另一高峰。只是當時理學大儒如朱熹等人，無一人重視學算，致使到了明代，雖然理學繼續傳承，但知識份子對宋元的天元、四元學說已無法正確理解（陳進傳，1982）。難怪徐光啟於〈刻《同文算指》序〉中嘆道：「算數之學特廢於近世數百年間爾。廢之緣有二：其一為名理之儒土苴天下之實事；其一為妖妄之術謬言數有神理」。

從以上對東西方的數學與文化的比較可以發現，中國傳統上將算、數之學視為技學之門，而西方則將之與哲學、神學並列。這兩種文化對數學迴異的態度造就出「演算」和「演繹」兩條不同路徑。從文化角度而言，本無優劣之分，但以現代學科傾向專業分殊化的潮流來看，演繹法則有利於建構理論體系，而這也是西方數學之所以能勝出的原因之一。

參、何謂數學文化

早期各國數學教育係著眼於菁英教育和職業教育，鮮少考慮數學與社會、歷史與哲學等文化面向的關聯。不過二十世紀後期由於高等教育日漸普及，倡議「普羅大眾數學」（mathematics for all）的呼聲四起，數學不再只是扮演工具性的實用角色，而是社會公民終身學習的一環，因此數學的文化面向日益受到重視。然而數學文化面向的範圍甚為廣泛，必須適度釐清才能談數學文化素養的內容。

一、數學文化的內涵

數學本身就是人類發展過程中所伴隨產生的一種文化，殆無疑議，而「數學文化」究竟所指為何？由於一般文章在論述「數學文化」時，鮮少將它定義清楚，有時指的是數學知識本身，有時又指數學知識產生的背景脈絡。更有人質疑既然數學本身就是一種文化，那數學文化指的又是什麼？本文在此引用 Kroeber 與 Kluckhohn（1952）在參酌 164 種文化的定義後所下的結論：「文化包含行為的外顯和內隱模式，並藉由構成人類群體獨特成就的符碼來傳遞」（p. 181），並將數學文化定義如下：

> 數學文化就是人類探索數學知識時其行為的外顯和內隱模式，並藉由人類群體，特別是數學家社群，所創造獨特成就的符碼（符號、圖形或文字）來傳遞。

再根據 Kroeber 與 Kluckhohn 的論述可以看出端倪：

> 文化的基本核心係由透過歷史演繹與選擇所形成的傳統觀念，特別是與它們所附帶的價值所組成。文化系統在某方面可以視為行動的產物，另一方面又可視為決定下一步行動的元素。（p. 357）

由此可以瞭解文化雖是行動的產物，卻可能在下一刻成為我們行動決策的要素。因此探討數學文化不僅僅具有知識論的意涵，更具有教育上的價值。

而關心數學文化的學者們主要是從「數學在何種意義上是一種文化？」及「數學有何特徵可謂是一種文化？」和「什麼是數學文化的特徵及內涵？」等諸多面向論述。張維忠（2005）從文化學的「廣義及狹義通說」及「文化的行為系統」和「文化的歷史性」三種不同角度對數學的文化性進行論述，從而在「數學對象的人為性」、「數學活動的整體性」、「數學發展的社會歷史性」層面指出數學是一種文化。張維忠另外指出美國數學家 Wilder 在 1981 年從數學人類學的角度提出「數學：一種文化體系」的數學哲學觀，認同從哲學研究的深入得以讓我們認識到數學的發展與人類文化休戚相關。張楚廷（2006）指出文化即人文，即人的精神。數學不只是關於數的世界、形的世界、或更廣闊世界的科學，數學還是一門充滿人文精神的科學。因此張楚廷是從數學美學、數學與人的發展、數學哲學、數學與語言及數學與文學、藝術、經濟、教育等關聯談數學文化。

易南軒與王芝平（2007）則從多元視角論述數學文化的概念。認為數學不僅是一門知識，也是一種素質，數學文化是現代人文化素質的重要組成部分。提出從文化的廣義及狹義通說來看，數學內容、思想、方法和語言，已成為文化的重要組成成分。數學的觀念，如推理歸納、整體抽象、和審美意識等等都具有精神領域的功效，蘊含著深厚的人文精神，具有文化內涵。他們認為數學是歷史發展的文化、是一種多元的文化、是社會生活的文化、是價值的文化。汪曉勤（2013）雖無論及數學文化一詞的相關意涵及概念，但從其文字篇章不難了解他希望讀者能了解數學是人類一種文化活動，且數學與人類文明有著密切關係。

綜上所述，各家學者對於數學文化的定義雖未直接明確地提出界定，但對「數學文化」一詞的認知概念頗為一致。一方面從文化的角度領略數學全貌，另一方面從數學歷史與哲學觀談數學文化。

二、數學文化的構面

Wilder（1952）指出，數學發展的情況及方向係由一種普遍綜合的文化張力所決定，這種張力既產自數學內部，也來自數學外部，因此「數學文化」一詞的涵義主要包括兩個大構面，一個是「文化中的數學」，另一個是「數學中的文化」，前者是從文化的角度出發，觀察人類發展過程中，數學在其所屬社會文化所扮演的角色（mathematics in culture）；後者指數學知識發展

過程中其內部知識與社群所顯現的文化特質（culture of mathematics），這兩者呈現一種交錯的有機互動發展，以下分別簡述兩者的意涵：

（一）文化中的數學（mathematics in culture）

探究「文化中的數學」就是理解數學知識宏觀發展的歷程。數學發展的第一道曙光來自於大自然，之後由於人類各種族文明與社會的演進方式和歷程的獨特性，因而造就出不同的理路與思維文化，也就誕生不少「同質異態」的數學知識產物。Struik（1948）早就指出，數學已經被農業、商業、工業、戰爭、工程、哲學、心理學和天文學所影響，要瞭解數學就必須將這些關鍵因素納入考量。事實上數學知識的社會文化觀早在十九世紀即已萌芽，例如歐洲活版印刷術的發明對文藝復興時期數學知識的傳播有推波助瀾的效果，之後不僅促成十六、七世紀的科學數學化，甚至引發科學革命。但是這種數學知識和社會文化之間的關係並非呈現一種必然的發展趨勢。例如活版印刷術發源更早的中國就沒有類似的發展模式，這就與各文化中的數學傳統有關，而數學傳統又建立在社會文化基礎之上，如圖 1（引自蕭文強，2008）揭示數學與其他學科之間內外張力的互動關係。從圖 1 更可看出，數學發展除受在地文化（host culture）的影響，不同民族之間的文化融滲也可能引領數學的走向，如前述古希臘數學曾受古埃及和古巴比倫的影響，之後又影響阿拉伯和印度的數學。

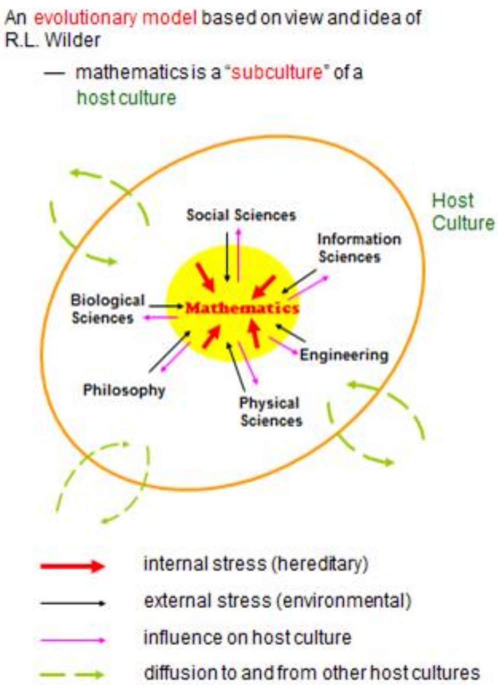


圖 1 數學知識演化模型。引自「從離散數學到數學文化」，蕭文強，2008，**專題演講發表於 2008 組合數學暨新苗研討會**，國立交通大學。Retrieved from http://hkumath.hku.hk/~mks/20DiscrMath.pdf

之後由於西方數學的符碼系統具有操作便利的優勢，其數學發展樣態已成為數學研究的主流，致使數學知識的文化差異逐漸消退。但是理解這種「同質異態」的發展脈絡，就更能從文化比較的角度清晰解讀數學本質，以引發知識創造者和使用者對於數學知識內涵與自身文化的反思。所以探究「文化中的數學」至少必須考量下面幾個趨向：

1. 歷史的：從歷史角度來看，數學最初只是人類文化的一部分，但之後隨著數學本身和人類文明的進步，數學逐漸表現出相對的獨立性（張維忠，2011）。
2. 社會的：部分數學知識因應社會所需而社會化，而社會問題數學化的成果也反饋到數學本身。數學依社會進步而發展，社會因數學發展而進步（方延明，2007）。
3. 民族的：數學知識經常被視為超越種族地域的真理，但客觀事實也說明，數學知識的發展仍具有民族的歧異性。近年興起的民族數學（ethnomathematics）研究可看成是一種關於數學的人類文化學（張維忠、唐恒鈞，2008）。

（二）數學中的文化（culture of mathematics）

探究「數學中的文化」就是理解數學知識的微觀發展歷程。大自然提供發展數學知識的第一道曙光，而人類的思維就是促進數學知識滋長的養分，刺激數學之樹成長茁壯。數學家的思維模式至少受三個不同階段但環環相扣的因素影響，一是數學家所處的社會文化，也就是前述「文化中的數學」；二是數學家所屬的數學社群，也就是數學家之間透過相互溝通所建立的有形與無形的學術規範；三是數學家個人獨特的內在思維理路，這牽涉到數學家對數學知識的信念、價值判斷和審美觀。尤其 Byers（2007）特別強調數學家透過創意將晦澀、矛盾和弔詭的概念轉化為數學知識那種靈光一現的蘊育過程。由於個人的信念、價值判斷和審美觀不斷與社會文化脈絡和社群同儕對話，數學家遂而創造出個人的數學知識，之後透過數學社群的同儕檢驗，逐漸形成穩定的知識結構。所以探究「數學中的文化」至少必須考量下面三個階段：

1. 歸納猜想：這是數學家進行思想實驗時最初始、也是最關鍵的階段。數學家華羅庚曾說：「千古數學一大猜」，意謂所有的數學定理都是透過觀察、歸納與猜想衍生而來。引發數學教育界研究「數學解題」（problem solving）風潮的匈牙利數學家波利亞（George Pólya）就不斷強調數學臆測的重要性（Pólya, 1954）。
2. 演繹證明：任何猜測未經嚴格的檢驗仍舊只是一個不成熟的暫定事實，笛卡兒就指出，事實的真理是靠歸納經驗得來、是偶然的、是個別的；推理真理靠邏輯演繹得來，因此是必然的、是普遍的（Descartes, 1637/1997）。這個階段通常也是數學概念抽象化的開始。
3. 社群辯證：當代數學哲學已揭示數學知識不僅是一種自我建構的過程，更是社會群體建構的產物（Ernest, 1998），個體所提出的任何「準命題」仍須透過個體和群體的相互辯證過程確認其恆理性，而這階段經常牽涉到信念、價值與美學的判斷。

以懸疑三百多年的「費馬最後定理」為例，費馬宣稱有絕佳證明，卻沒有寫出。到這階段只能將此結論視為費馬個人觀察歸納之後的猜想。懷爾斯（Andrew Wiles）花了七年時間，於 1993 年透過橢圓函數證明費馬猜想的正確性。但經公開檢驗後發現存在著推論邏輯上的瑕疵，於是懷爾斯又辛苦地花了將近兩年時間才完成嚴謹的證明（Singh, 1998）。整個過程歷經「歸納猜想」→「演繹證明」→「社群辯證」三個階段，這就是屬於數學知識特有的文化體系。

因此綜合來說，數學文化就是由「文化中的數學」和「數學中的文化」兩個構面共同交錯激盪所引發的概念系統（圖 2）。圖 2 中的各個構面呈現動態穿插的狀態，而且彼此間相互交叉牽引，環環相扣，任一構面的變化都可能引發不同數學文化的發展。西元前 326 年，亞歷山大大帝征服印度的西北部，將希臘的天文學與三角學傳到了印度，影響往後印度數學的發展。而阿拉伯人將印度數字系統傳到歐洲，又改變西方數學的風貌。只是這個交叉構面模型仍不足以解釋數學文化細緻的演變情形。比方為何古印度數學沒有轉變成古希臘的數學演繹風格？這可能與古印度數學受宗教影響有關。畢竟數學文化只是人類的次文化，仍難與當時社會主流文化相抗衡。

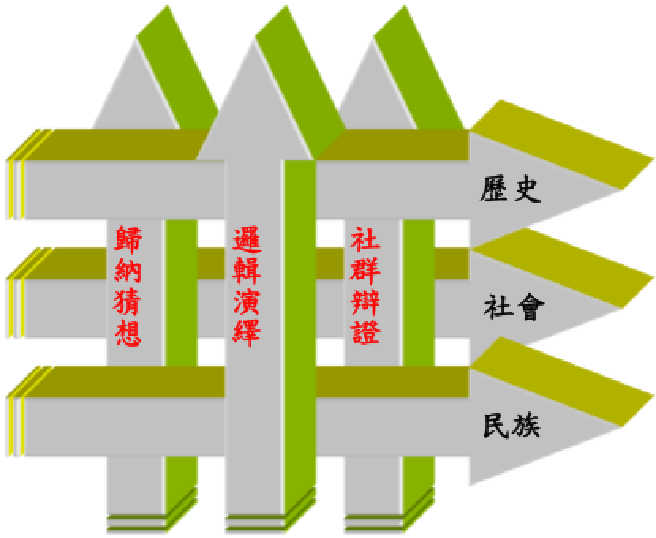


圖 2　數學文化縱橫構面

肆、數學素養

由於數學素養是個抽象的概念，本節將針對國際間對數學素養的論述做比較分析與整理，以便在下一節中討論數學文化在數學素養所扮演的角色。

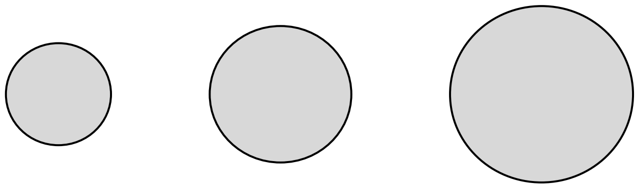
一、何謂數學素養

「素養」一詞在《辭海》中的解釋是指「平時的修養」，而其英文的對應字確有值得探究之處。目前較為臺灣學者所接受的英文對應字是「literacy」。但根據 Merriam-Webster 字典，「literacy」的原意是指一個人的「讀寫能力」，或者「特定學科的知識」。因此張一藩（1997）認為 literacy 與素養的中文意義不符，應翻譯為「識能」較為妥切。但是聯合國教科文組織（UNESCO, 2003）訂定 2003-2012 年為全球的「素養十年」（Literacy Decade），並認為 literacy 一詞在當今資訊社會中不能再僅侷限於讀寫能力，它關係到我們在社會上如何溝通，關係到社會的實踐，關係到知識、語言和文化。因此「literacy」的概念定義應該隨社會發展呈現一種動態的演變。例如 Kouba 等人（1998）主張，素養意涵不應拘限於基本的讀寫聽說能力，而是指能進一步思考與運用語文的內涵，從知識與經驗中獲得啟發，並整合不同的觀點。近年國際間紛紛以 PISA 的數學素養評量為依歸，而 PISA 對數學素養的定義如下：

> 個人在各種脈絡裡形成、使用、詮釋數學的能力。其中包括了數學推理，以及使用數學概念、程序、事實、工具來描述、解釋、預測現象。數學素養有助於了解數學在世界裡扮演的角色，也能幫助未來的公民，做出有所依據且具反思性的判斷與決策。（OECD, 2013, p. 25）

在此定義之下，PISA 發展出數學素養試題，舉一例如下*：

> 你被要求設計出一套新的硬幣。所有硬幣都是圓形，且顏色都是銀色，但是有不同的直徑。



> 研究者發現了一個理想的硬幣系統，要符合以下要求：
>
> - 硬幣直徑不可小於 15 毫米，且不可大於 45 毫米
> - 已知一個硬幣的大小後，下一個硬幣的直徑必須比它大至少 30%。
> - 鑄幣機械只能製造出直徑為整數的硬幣（如：可以製造 17 毫米，但無法製造 17.3 毫米）

問題：

請你設計出一套符合上面條件的新硬幣系統。從一枚 15 毫米的硬幣開始，而且在你這套新硬幣系統裡，要盡量包含愈多的硬幣，則這套新硬幣系統裡的硬幣直徑分別為多少？

*題目來源：經濟合作暨發展組織 OECD（Organisation for Economic Co-operation and Development，中文翻譯版權：國立臺南大學與臺灣 PISA 國家研究中心）

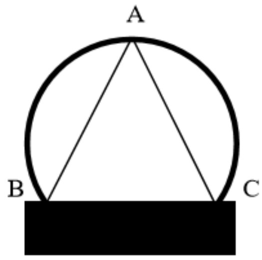
這單一題目並不足以符合數學素養的所有要件，但是我們可以發現學生確實需要在這有條件限制的真實問題脈絡中，利用數學工具去解決問題，做出有所依據的判斷與策略。值得注意的是，數學素養是抽象的概念，但是任何有形的評量都必須依賴外顯可見的行為表現為參考指標，所以解決素養問題只是衡量素養的指標之一。

由於 PISA 測驗的對象是 15 歲的學生，而本文關注的範圍亦包含完成十二年國民基本教育的 18 歲學生，因此對於數學素養的定義必須予以擴充。根據李國偉、黃文璋、楊德清與劉柏宏（2013）指出，由於 PISA 對於「數學素養」的定義已得到國際上廣泛的採納，因此以其為基礎並參照國情，將完成十二年國教之國民數學素養內涵更加明確闡述如下：

數學素養的核心內涵應指個人的數學能力與態度，使其在學習、生活、社會、與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點。（p. 19）

與 PISA 的定義相較，「教育部提升國民素養實施方案」更強調已完成十二年國民基本教育的學習個體，能在各式情境脈絡中辨識所面對的問題與數學的關聯，並能發揮數學思維解決問題，更重要的是能有效溝通，以做為進入大學或職場的先備基礎。為檢測學生是否能達成教育目標，「教育部提升國民素養實施方案」已發展出符合本土脈絡之素養試題，茲舉一道已公開之題例如下**：

左下圖是某個美術館的入口,該館入口是個圓弧造形的隧道,地面寬度估計為八公尺。
工作人員站在中點,測得圓弧形入口最高處也是八公尺。



問題一:該館周年慶,工作人員想在圓弧形入口的最高點 A 點,至地面兩端點 B 與 C,懸掛彩帶佈置(如右上圖所示),試問彩帶($\overline{AB}+\overline{AC}$)的長度至少需要多少公尺?

問題二:請問圓弧形入口最寬的部分是幾公尺?

**題目來源:「教育部提升國民素養實施方案--數學素養計畫」

我們可以發現這問題將學生置身於假想的職業情境中,檢測他們是否能辨識問題與數學的關聯,並根據數學知識和運用數學技能去模擬與解釋各種現象。透過這問題可以讓學生發現,即使是再單純不過的場地布置,都須應用幾何性質才能圓滿解決。

二、國際間對數學素養的定義與關注

在討論國際間對數學素養的論述之前必須了解,各國關於數學素養的用詞與定義並不一致。例如英國和曾受其殖民的國家與地區經常用 numeracy 一詞(即 number 和 literacy 的結合);美國國家研究委員會(National Research Council [NRC], 2001)則使用 mathematical proficiency;而 quantitative literacy, mathematical literacy, mathematical competency 等也都被曾用來指稱與數學素養類似但並不等同的概念。下段論述中提到這些名詞時都會說明其定義與內涵,以助我們釐清諸多名詞之間的異同。

(一)英國對數學素養的定義

目前文獻中較早提到與數學素養相關的詞彙是 1959 年英國教育部所出版的《Crowther Report》。報告主要探討 15-18 歲青少年的教育方針。報告中定義 numeracy 為「我們不僅僅指量化推理的能力,也須理解科學方法,並對科學成就有些熟悉」(Crowther, 1959, p.282)。此處的量化推理是指透過量化思維去瞭解目前社會所面臨問題的困難及形態,而對科學的理解則是指對觀察、假設、實驗、驗證等科學研究方法的認識。很顯然這定義並不侷限於數學學習本身,

具有高度的願景，偏向菁英教育的觀點（黃友初，2013）。

不過二十年之後由於數學課程不能符合經濟發展和學生就業需要，英國首相 Jim Callaghan 於 1978 年向國會報告指出，將調整中小學數學課程，使之更能配合未來教育、個人職場、與成人學習之需要。因此由 Cockcroft 博士率領 21 人小組重新界定數學素養。《Cockcroft Report》仍沿襲 numeracy 一詞。Cockcroft 對 numeracy 的解釋是，它包含兩項特徵，一是熟悉並能以數學方式處理平日生活中的數字，二是能夠欣賞與理解以數學型態所呈現的資訊。《Cockcroft Report》在前言就強調，數學是一項有效且精確的溝通工具，數學素養不僅僅是計算，過度技術操作無助於理解，老師的責任之一是協助學生欣賞數學並樂於其中。受《Cockcroft Report》影響，與大英國協有密切關係的國家也紛紛採用 numeracy 一詞表示數學素養。

（二）美國對數學素養的定義

除了 numeracy 之外，美國也使用 quantitative literacy 或 mathematical literacy 表示數學素養的概念，但在內涵層次上有所不同。在 Kirsch、Jungeblut、Jenkins 與 Kolstad（2002）所編撰的《美國成人素養》（Adult Literacy in America）中將 quantitative literacy 分為五等級，都侷限於生活中所需處理數據的技能，小則能處理帳單上的計算，大到能計算房屋貸款的利息。「全國教育統計中心」（The National Center for Education Statistics）則將之擴大到薪水帳冊、交通時程表、地圖、表格與圖形等等的理解與運用能力。而《生活技能國際觀察報告》（International Life Skills Survey, 2000）採取更寬廣的角度指出，quantitative literacy 意指「舉凡個人在日常生活與工作的量化情境中，必須有效處理事務所需具備的技能、知識、信念、傾向、心智習性、溝通能力和問題解決技巧」（引自 Steen et al., 2001, p. 7）。有鑒於此，Steen 等人（2001）整合上述不同定義和 PISA 所提 mathematical literacy 的內涵，列出 quantitative literacy 的十項元素：1. 對數學的信心、2. 文化欣賞、3. 資料解讀、4. 邏輯思考、5. 決策、6. 情境數學、7. 數感、8. 實用技能、9. 先備知識、10. 符號感知。

Steen 等人（2001）所領導的量化素養設計團隊在某種程度上視 quantitative literacy 和 numeracy 為相似詞，不過和 mathematical literacy 則有些差異。Steen 等人特別說明日常生活需要的偏向 quantitative literacy，教育上需要的則偏向 mathematical literacy；一般學校科目需要的是 quantitative literacy，而工程與物理科學需要的則是 mathematical literacy。言下之意，比起 quantitative literacy，mathematical literacy 在理念層次上較高、更廣。此外，仔細觀察可以發現 Steen 等人所列出 quantitative literacy 的部分元素似乎不完全在前述各家的定義範圍之內，例如提出「文化欣賞」就是一個獨特觀點。

不同於 Steen 等人的論述偏向靜態的知識內容，另一位美國學者 David Pugalee 提出一個數學素養雙迴圈動態模型（圖 3，Pugalee，1999），其中內迴圈包含溝通（communication）、科技

（technology）與價值（values）。代表數學素養的內動趨力（enablers），外迴圈包含表徵（representing）、操作（manipulating）、推理（reasoning）和解題（problem solving）等數學素養的外顯程序。其中內外迴圈會形成交叉作用，例如對解題者而言，良好的數學溝通須依賴適當的表徵，以方便操作與推理，才能順利解題。而應用科技（如數位工具），可以輔助文字溝通和符號表徵之不足，協助完成外部迴圈。價值是最內隱的驅力，它不僅影響表徵的選擇和推理程序，也左右解題者的數學操作方式和解題策略。綜合 Steen 等人的「五面向」、「十元素」和 Pugalee 的雙迴圈模型，數學素養的整體框架已隱然成形。

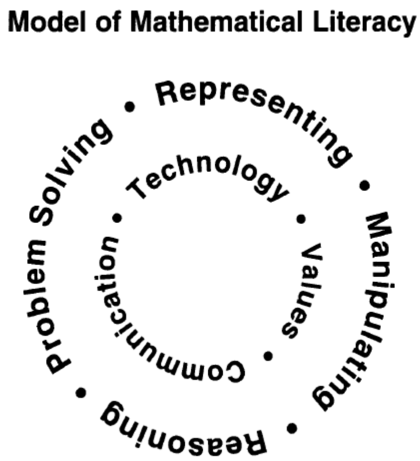


圖 3　數學素養雙迴圈模型。引自 “Constructing a model of mathematical literacy,” by D. K. Pugalee, 1999, *The Clearing House*, *73*(1), p. 20.

（三）歐洲對數學素養的定義

除英國外，在歐洲對數學素養著力最深的首推丹麥學者 Mogens Niss 和荷蘭學者 Jan de Lange。Niss 和其團隊針對丹麥數學教育發展出 KOM project（KOM: Competencies and the Learning of Mathematics）（Niss & Højgaard, 2011）。由於 Niss 原是數學家，之後轉型成為傑出的數學教育學者，因此 KOM project 引起歐洲學者廣泛的討論，對 PISA 數學素養意涵也有深遠影響。值得注意的是，Niss 提出「mathematical competence」和「mathematical competency」兩個名詞，容易產生混淆。根據 Niss 的定義，「mathematical competence」較接近所謂的數學素養：「數學素養指在各式各樣數學脈絡的內外部，和數學能發揮功能的情境中，去理解、判斷、從事、和使用數學的能力」。（Niss, 2003, pp. 6-7）。而「mathematical competency」是一組構成數學素養的主要元件，彼此相異且能夠清楚辨識。由此看來，mathematical competency 是指認識特定數學構面的能力，在此暫且翻譯為「數學識能」，而數學素養包含下列八個識能構件：1. 數學式思考、2. 數學布題與解題、3. 數學建模、4. 數學式推理、5. 數學表徵、6. 處理數學符號和形式、

7. 數學溝通、8. 利用輔助工具。與 Steen 等人（2001）所列出 quantitative literacy 的十項元素相較，Niss 的八個構件似乎比較強調程序處理面向。而 Niss 將這八個構件巧妙地串成所謂的「KOM 之花」（圖 4）（Niss & Højgaard, 2011），並分為「To ask and answer, in, with, about mathematics」和「To deal with mathematical language and tools」兩個構面。Højgaard（2009）以一句更簡潔的話解釋數學素養：「素養是個體回應特定數學情境的挑戰時具有見識的從容」（p. 226）。

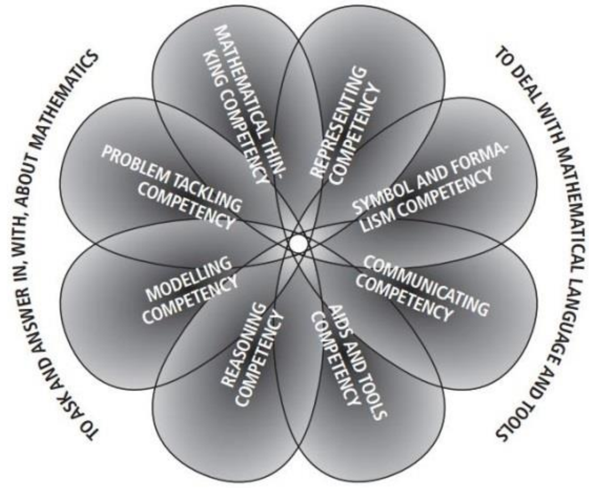


圖 4　KOM 之花。引自 *Competencies and mathematical learning–Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark* (p. 51), by M. Niss & T. Højgaard (Eds.), 2011, Roskilde, Denmark: Roskilde University.

另一方面，Jan de Lange 是負責 PISA 評量的主席，對數學素養議題當然有著高度關心，也考量各地區對數學素養論述的雷同與差異。de Lange（2003）以 Steen 等人（2001）的定義為例，認為 mathematical literacy 在意涵上確實比 quantitative literacy 更廣泛。在參酌 Niss 的八大構件後，de Lange 強調，為釐清數學素養內涵，須先了解數學的組成究竟為何。綜合各家說法 Lange 將數學知識區分為數量（quantity），空間與形狀（space and shape），變化與關係（change and relationships），和不確定性（uncertainty）。這四部份也成為 PISA 評量所採用的架構。從這四個知識組成出發，de Lange 描繪出數學素養（mathematical literacy）的關係架構圖（圖 5），圖中由空間與形狀衍生出 spatial literacy；數量衍生出 numeracy 和 quantitative literacy；變化與關係和不確定性衍生出 quantitative literacy；而 spatial literacy、numeracy 和 quantitative literacy 都可以歸結為 mathematical literacy。也就是 de Lange 試圖整合數學素養的相關概念，並以 mathematical literacy 一詞統括。de Lange 的關係架構圖當然並不完備，恐會遭受一些質疑。比方英國學者可能會主張 numeracy 也牽涉到解讀數字的不確定性，而美國學者也會認為空間與形狀中牽涉到量體概念，也是 quantitative literacy 的一環。

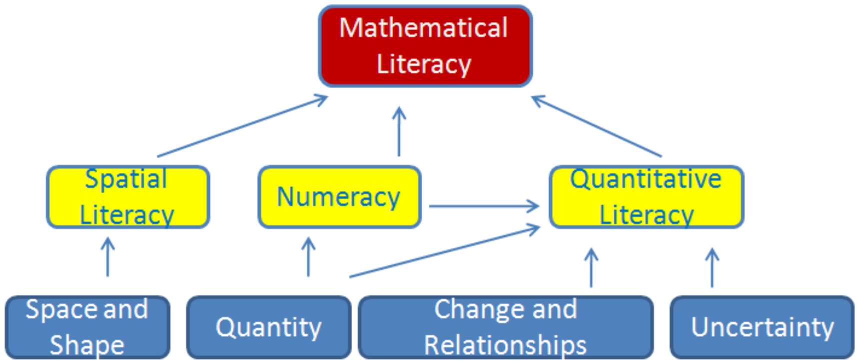


圖 5　數學素養關係架構圖。引自 “Mathematics for literacy,” by J. de Lange, 2003, In B. L. Madison & L. A. Steen (Eds.), *Quantitative literacy*: *Why numeracy matters for schools and colleges* (p. 81). Princeton, NJ: National Council on Education and Disciplines.

雖然 de Lange 在圖 5 中已試圖整合眾家之言，本文再整理國際間對數學素養的各式論述於表 1，以供讀者參照。

表 1

國際間數學素養相關名詞及內涵

	Numeracy	Quantitative Literacy	Mathematical Competence	Mathematical Literacy
地區	大英國協國家	美國	瑞典等北歐國家	荷蘭
主要倡導者	Crowther Report Cockcroft Report	Kirsch, Steen	Niss, Højgaard	de Lange, OECD
素養內涵	能處理日常生活中的數據，並理解以數學型態所呈現的資訊。	處理生活中所需數據計算，和表格與圖形等的理解與運用能力。	在各式數學脈絡中，能理解、判斷、從事、和使用數學的能力。	在各種脈絡裡使用數學的能力，包括推理以及使用工具描述、解釋、預測現象。

有鑑於 PISA 的數學素養概念已為大多數先進國家所接受，本文將以 mathematical literacy 做為數學素養的對應詞彙，並參考 OECD 的定義。

伍、數學文化素養

如前所述，Steen 等人（2001）早就提出數學素養須包含文化素養。而 de Lange（2003）評論 Niss 關於 mathematical competence 的八個構件時也強調從歷史、哲學和社會觀點欣賞數學是當務之急（p. 77）。Niss 與 Højgaard（2011）在解釋 KOM project 的內涵時更說明這份報告不只

把數學當做一個理論學科看待，也重視與其他領域的聯結。Niss 和 Højgaard 更特別指出和文化與社會的連結（p. 18）。前述關於數學文化的論述闡明了數學本質中特定的文化面向，Steen（1990）也提出文化素養在數學學習中的重要性。不過 Steen 所關心的較偏向「文化中的數學」，而本文主張「數學中的文化」在整個人類知識文化中有其獨特性，是由歷史上無數數學家社群所建構，具有傳承的價值，不可偏廢，因此在此提出「數學文化素養」這重要概念。

一、數學文化素養的定義

有鑑於目前文獻中並無數學文化素養（literacy for mathematical culture）的正式定義，綜合前述關於數學素養和數學文化的論述，本文將「數學文化素養」定義如下：

> 數學文化素養係指個體對數學知識的形成脈絡和發展過程所具備的理解程度，使其面對某一數學概念或問題時，能認識它的思維方式、歷史背景，和該概念或問題與生活需求、社會發展的關聯；或是面臨生活與社會問題時，能辨識該問題與數學知識的關聯，從而根據數學思考模式和數學知識技能，做出理性反思與判斷，並從解決問題的歷程中認知數學的人文價值。

與前述數學素養定義相較，數學文化素養更強調所謂理解某個數學概念，並非僅僅知道其定義、性質、與應用，而是「面對某一數學概念或問題時，能認識它的思維方式、歷史背景，和該概念或問題與生活需求、社會發展的關聯」，進而「從解決問題的歷程中認知數學的人文價值」。例如數學家赫許（Reuben Hersh）在《數學究竟是什麼？》（Hersh, 1997）一書就列出四項數學知識的特點：

1. 數學是人類文化的一部分。
2. 數學知識並非毫無謬誤。就像科學一般，數學藉由犯錯、修正、再修正的過程而精進。
3. 證明和嚴格有不同的樣貌，端視時間、地點、與對象而定。
4. 和文學、宗教一樣，數學是社會歷史所衍生具有殊異性的族類。

其中 2, 3 兩點更突顯數學知識建構過程的經驗性，是對柏拉圖主義所主張數學是先驗恆定真理的一項挑戰。數學哲學界約莫從 1970 年代後期開始重視數學的經驗性，其中普及書籍的代表作有二，一是克萊恩（Morris Kline）的《數學：確定性的失落》（Kline, 1982），另一是拉卡托斯（Imre Lakatos）的《證明與反駁》（Lakatos, 1976）。前者根據諸多歷史案例指出數學的發展歷程包含錯誤的證明、推理的疏漏、概念的認知錯誤等等，其實很不邏輯。後者則強調「思想實驗」與「準實驗」的角色，以突顯數學建構過程中「觀察特例→猜想規律→建構反例→修正猜想→提出證明」的程序典範。

二、數學文化素養的案例與分析

為幫助讀者能更具體地理解數學文化素養的內涵，本節將分別從「文化中的數學」和「數學中的文化」兩大構面，各舉一教材案例進行介紹與分析。

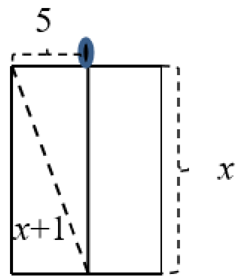
（一）文化中的數學：從具象到抽象

求解方程式幾乎是中學之後所有數學學習的重心，由此可以看出方程式在數學的關鍵角色。文化中的數學所強調的焦點之一就是賞析歷史上各古文明獨特的思考方式，以下介紹不同民族的方程式解法，以顯示數學思考的文化特色。

案例一：方程式解與群論

在 1858 年英國人亨利萊茵（Henry Rhind）所發現的古埃及草紙中的第 24 數學問題是：「一 aha（堆）和其七分之一相加得 19，求 aha 為多少？」，這裡的 aha 相當於現今的未知數 x，以現代的數學語言表示就是“$x+\frac{1}{7}x=19$，x=?”。萊茵草紙中使用所謂的試位法（method of false position），先假設 aha=7，aha 和其七分之一的和為 8，但題意告知應該是 19，所以將 7 放大 19/8 倍就得到正確的 aha 值，也就是 133/8，以古埃及的單位分數表示則為 16+(1/2)+(1/8)。而古巴比倫泥板上有一道數學題：「igibum 與 igum 之和為 10，igibum 與 igum 各為何？」，意思是某數（igibum）和其倒數（igum）之和為 10，某數為何？泥板上的解法是，「將 10 除以 2 後平方，減掉 1，將所得之數開平方後再加上 10 除以 2 的值，即為所求」，以現代算法可以表示為：$x=\sqrt{\frac{10}{2}-1}+\frac{10}{2}=2\sqrt{6}+5$。這種演算法則的解題方式也出現在古代中國《九章算術》「句股」一章當中：

今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺。
引葭赴岸，適與岸齊。問水深、葭長各幾何？
答曰：水深一丈二尺；葭長一丈三尺。
術曰：半池方自乘，以出水一尺自乘，減之，餘，
倍出水除之，即得水深。加出水數，得葭長。



為求得葭（蘆葦）的長度，《九章算術》解法為，將水池的半徑 5 尺長平方（半池方自乘），減去露出水面 1 尺長的平方（以出水一尺自乘，減之），所得到的數除以露出水面 1 尺長的兩倍（餘，倍出水除之），就得到水深，再加上露出水面的 1 尺長（加出水數），就是葭的長度。整個演算過程看似複雜，說穿了其實就是：$x=\frac{5^2-1^2}{2\times 1}=12,\ x+1=13$。由此可以看出各古文明均發展出各式演算法，以見招拆招的方式解決不同的算術問題。而且在十六世紀之前，中國、印

度、阿拉伯等東方國度在解方程式方面的成就遠遠超過西方。不過到了十六世紀，兩個關鍵因素促使西方求解方程式的水準突飛猛進，一是解題成為數學家之間的智識挑戰，求解方程式逐漸脫離現實目的；另一是方程式表示方式開始符號化。

歐洲文藝復興時期，由於天文測量和航海等實用目的，求解方程式變成當時科學界的顯學。義大利數學家德費洛（Scipione del Ferro, 1465-1526）為了挑戰當時普遍認為三次方程式沒有根式解的想法，解出缺少二次項的不完全三次方程式，以現在符號可以表示為 $x^3+mx=n$ 。另一位義大利數學家方特那（Niccolò Fontana Tartaglia, 1499-1557）則解出缺少一次項的不完全三次方程式 $x^3+mx^2=n$ ，並且在一場公開的求解方程式的挑戰賽中贏了德費洛的學生費歐瑞（Antonio Maria Del Fiore）。而當時的傳奇數學家卡當諾（Gerolamo Cardano, 1501-1576）從方特那習得 $x^3+mx=n$ 的公式解法，然後以代換方式求出一般三次方程式的公式解，再與他的學生法拉利（Lodovico Ferrari, 1522-1565）共同求出一般四次方程式的公式解，並於 1545 年將解法發表於《大術》（*Ars Magna*）一書，引起方特那不悅而向卡當諾提出挑戰（Livio, 2006）。這段文藝復興時期的解方程挑戰賽，正象徵著數學逐步脫離實用目的的序曲。

另一方面法國數學家韋達（François Viète, 1540-1603）開始使用字母代表未知量和已知量的符號，將算術轉化為符號算式。韋達以母音大寫字母 *A*, *E*, *I*, *O*, *U*, *Y* 表示未知量，而大寫輔音字母 *B*, *C*, *D* 則表示已知量，其實就是現代數學以 *x*, *y*, *z* 表示未知數，*a*, *b*, *c* 表示常數的前身。例如，「*B* in *A* Quadratum plus *D* plano in *A* aequari Z solido」就是 $bx^2+dx=z$（Derbyshire, 2006）。韋達又進一步以「+」表示相加，例如「*A* cubus, + *A* quadrato in *B* ter, + *A* in *B* quadratum ter, + *B* cubo」就是 $x^3+3bx^2+bx+b^3$ （Cajori, 1928）。方程式的符號化使數學家得以探究根與係數的關係，有效促進求解方程式的思考效率（Katz, 1998），這也激勵西方數學家樂觀地認為求五次方程式的根式解指日可待。沒想到這道關卡卻比想像中困難，得經過兩百多年後才被兩位悲劇天才阿貝爾（Niels Henrik Abel, 1802-1829）和伽羅瓦（Évariste Galois, 1811-1832）所攻克，只是所因而發展出來的解題工具卻是前所未見且抽象至極的群論（group theory），達到近代數學的第一個高峰（Livio, 2006）。

綜觀求解方程式的歷史過程可以發現，縱使後來中國宋元時期所發展出獨特的天元術可以解高次方程，由於受限於算籌的操作技巧，其發展終究還是遇見瓶頸。而在 19 世紀以前，西方數學家求解方程式一直是以次方分類。但伽羅瓦卻改以方程式根的結構做分類，首先證明對任意 *n*，一定可以找到一個 *n* 次方程式，其對應的某個數學結構（稱為伽羅瓦群）等於置換群 S_n。接著證明一定可以找到一個五次方程，其伽羅瓦群等於 S_5，而由於 S_5 是不可解的，因此五次方程無根式解，將依據操作演算的求解方程進階到抽象代數的領域，正代表著數學知識由具象至抽象，一種特殊的轉置（transform）文化。

（二）數學中的文化：從臆測到論證

許多數學教育學者經常批評，傳統的數學教學只是訓練應用公式和學習解題技巧，剝奪學生探索數學的樂趣。要學生主動樂於探索數學，最好先讓他們不自覺地置身於數學情境之中，再逐步引領他們進入 Lockhart（2009）所謂的數學實境（mathematical reality）。在此提供一個「臆測與論證」的案例以說明數學知識建構的階段。

案例二：點、線、平面、與空間

一個點最多可以將一直線分為 2 段，兩個點分為 3 段，三個點分為 4 段，……，那 n 個點呢？很容易可以推論出一般化的結果：「n 個點將一條直線分為 $n+1$ 段」。這是歸納猜想的結果，而讀者可以輕易地藉由數學歸納法證明這結果。繼續思考進階問題：「n 條直線最多可以將平面分割為幾個區域？」。一條線將一平面分為 2 個區域，兩條直線分為 4 個區域，三條直線分為 7 個區域，……那 n 條直線呢？此時紀錄觀察過程就顯得很重要。表 2 紀錄著直線數目與平面被分割之區域數目之間的對應，5 條直線最多可以將一平面分割為幾個區域？若只透過實際操作可能有些困難，此時可以開始進行猜測（guessing），猜測可能是隨意的（guess and test），也可能是基於觀察推理的（plausible reasoning）。我們發現區域數目所形成的數列{1, 2, 4, 7, 11,…}的後項減前項恰為{1, 2, 3, 4,…}，所以依此規律猜測 5 條直線最多可以將一平面分割為 16 個區域。這又是歸納猜想的結果，然而這規律正確嗎？為什麼？觀察圖 6 看看能否發現問題背後的本質。

表 2

直線分割平面區域數

直線數目	0	1	2	3	4	5	…	n
區域數目	1	2	4	7	11	?	…	?

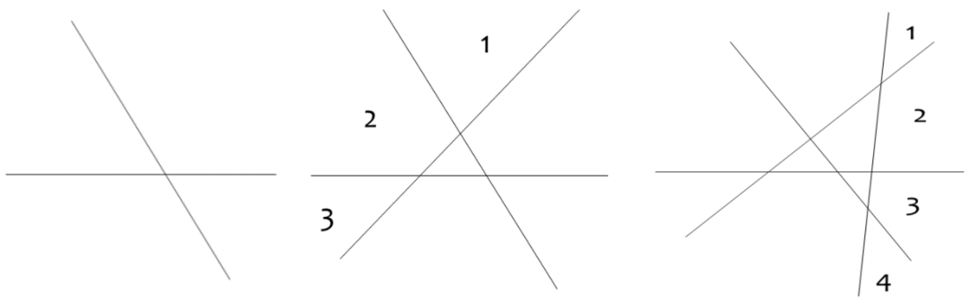


圖 6 直線分割平面區域

從圖 6 可以發現當平面中每增加一條直線時，「增加的區域數恰等於總直線數」。為什麼會這樣？為了得到最多的區域分割數，新增的直線必須從外部與原先所有直線相交，因此除保留原有區域數之外，新增的外部區域數恰會等於總直線數。當我們能認知這個關係後就能以遞迴關係進行演繹證明。設 R(n)表示 n 條直線將一平面所能分割出的最多區域數，則以下關係成立：

R(1)=2

R(2)=R(1)+2

R(3)=R(2)+3

R(4)=R(3)+4,

…

R(n)=R(n–1)+n

將等號左右兩邊的 n 個式子全部加總並消去等號兩邊相同項，就得到

R(n)=2+2+3+4+…+n =1+1+2+3+4+…+n=[n(n+1)/2]+1。

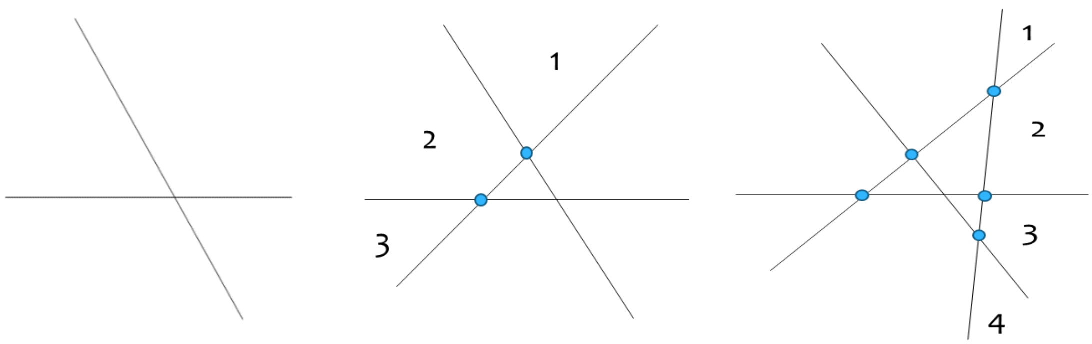


圖 7　直線分割平面區域

值得注意的是，論證方式有時相當多元，觀察圖 6 時，可能有些人另外發現「增加一條直線後，新增的區域數比新增的交點數多 1」（圖 7），這是另一種歸納猜想。為什麼會這樣？這就是前面提到「n 個點將一條直線分為 n+1 段，而每一段都與一個新區域相鄰」。這又可以引出另一個遞迴關係式，只是必須藉助高中的組合概念。由於第 n 條直線與 n–1 條直線產生 n–1 個交點，這 n–1 個交點將第 n 條直線劃分為 n 段，而每段均劃出新區域，所以多出 n 個區域。又因為 n 條直線會產生 C_2^n 個交點，而 n 條直線比 n–1 條直線多 $C_2^n - C_2^{n-1}$ 個交點，所以多出 $C_2^n - C_2^{n-1} + 1$ 個區域，由此得到各項遞迴關係如下：

$R(1)=2$

$\mathrm{R}(2)=R(1)+C_2^2+1$

$R(3)=R(2)+C_2^3-C_2^2+1$

$R(4)=R(3)+C_2^4-C_2^3+1$

...

$R(n)=R(n-1)+C_2^n-C_2^{n-1}+1$

將等號左右兩邊的 n 個式子全部加總並消去等號兩邊相同項，便得到：

$R(n)=2+n-1+C_2^n=1+n+C_2^n=\mathrm{C}_0^n+C_1^n+C_2^n$（阮圓真，2012）。

這是另一種角度的演繹證明。由此可知，數學之妙在於隨觀者角度不同，便產生不同論證模式，因而導出同質異型的結果。這些同質異型的結果無好壞之分，但有深淺之別。例如第一個遞迴關係適合國中，而第二個則適合於高中。當然比較深層的結果具備較大之延展性。例如我們可以問更深層的問題：「n 個平面最多可以將空間分割為幾個區塊？」，這顯然比較複雜，但我們能先進行臆測嗎？其中是否隱藏某些規律呢？現將前述結果整理如下：

(1) n 個點將一條直線分割為 $n+1=C_0^n+C_1^n$ 段。

(2) n 條直線將一平面分割為 $C_0^n+C_1^n+\mathrm{C}_2^n$ 個區域。

這裡是否出現一個漂亮的規律？我們似乎可以大膽臆測：「n 個平面最多可以將空間分割為 $C_0^n+C_1^n+\mathrm{C}_2^n+\mathrm{C}_3^n$ 個區塊」。只是正確嗎？阮圓真（2012）替我們展示這美麗的遞迴關係在三維空間確實還是成立。而阮圓真的結果也是透過投稿和專家審查（也是社群辯證的必要過程）而被確認。

只是我們不禁又問，這結果對任意 m 維空間都成立嗎？m 維空間是否最多可以被 n 個超平面（hyperplanes）分割為 $C_0^n+C_1^n+C_2^n+\mathrm{C}_3^n+...+C_m^n$ 個區塊？這種透過反覆臆測、論證和社群辯證，如螺旋般拾級而上的類比思考過程，正是數學知識建構過程中最為獨特的思維文化。

陸、結論

從本文一貫的脈絡可以理解數學與文化關係密切，更是人類發展的智識結晶。本文所引述的東西方學者也都一致指出文化在數學素養中的關鍵角色，所以有數學素養的人必應具備某種程度的數學文化內涵。歐美與對此議題早已著墨多年。知名的出版社 Springer 自 2004 年開始推出 *Mathematics and Culture* 系列叢書。英國的「倫敦數學學會」和「藝術與人文研究委員會」（Art and Humanity Research Council）從 2012 年開始舉辦數學文化研討會（https://sites.google.com/site/mathematicalcultures/home）。而中國大陸近年來這方面的推廣更是積極，早於 2003 年的《普通高中數學課程標準》即指出數學課程應幫助學生瞭解數學在人類文

明發展中的作用；逐步形成正確的數學觀。2015 年新公告的課程標準更直接將「數學文化」列為學習主題，與「函數與應用」、「向量與幾何」、「機率與統計」等傳統數學主題並列。反觀國內談數學素養已將近十年，但對數學文化的概念卻仍然陌生，也不見深度論述。所幸 104 年 11 月 9 日公告的《十二年國民基本教育數學領域課程綱要》中除宣告「數學是一種語言」和「數學是一種實用的規律科學」之外，更特別強調「數學是一種人文素養」（http://www.naer.edu.tw/files/15-1000-10635,c1174-1.php?Lang=zh-tw），其目的即在於讓學生理解數學雖然有自己內在理路的發展走勢，但也必然因為回應社會的需求，而在文明裡扮演不可或缺的角色，可以說是臺灣回應數學文化研究的初聲。我們相信，透過數學文化融入教學，可以引領學生領略數學實境，進而欣賞數學與文化的關係，應能改善前述臺灣學生「高成就、低態度」的現象。然而徒文不足以自行，當務之急是喚起大家對研究數學文化和培育學生數學文化素養的重視，以進一步發展數學文化教材、建立數學文化素養指標、以及進行與數學文化教學相關的實證研究。不過苟長義與顧沛（2008）提醒我們，在教學中融入數學文化應遵循「整體的」、「有機的」、「恰如其分」、「水到渠成」、與「畫龍點睛」等五項原則，切不可為融入而融入。

本文秉眾家之言，從數學與文化的關係著手，定義數學文化素養、論述數學文化素養的內涵、並提供實際案例分析，旨在建立一個概念框架，希冀成為未來數學文化素養之教學、評量、與研究的理論基礎。

參考文獻

方延明（2007）。**數學文化**。北京：清華大學。【Fang, Yen-Ming (2007). *Mathematical Culture*. Beijing: Tsinghua University Press. (in Chinese)】

丘成桐（2013）。一本具國際觀的數學普及雜誌。**數理人文**，**1**，1。【Yau, Shing-Tung (2013). A Popular Mathematics Journal with Global View. *Humanities of Mathematical Sciences*, *1*, 1. (in Chinese)】

何定照（2012 年 12 月 9 日）。數學皇帝 丘成桐：盲求奧林匹亞 畸形發展。**聯合報**，A3 版。【He, Ting-Chao (2012, December 9). The emperor of math – Shing-Tung Yau: Pursuing math Olympiad blindly is an abnormal development. *United Daily News*, p. A3. (in Chinese)】

李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏（2013）。**教育部提升國民素養實施方案—數學素養研究計劃結案報告**。教育部提升國民素養專案辦公室研究計劃成果報告，未出版。【Lih, Ko-Wei, Huang, Wen-Chang, Yang, Te-Ching, & Liu, Po-Hung (2013). *Final report for educating citizen literacy in mathematics*. Project Office for Improving Citizen Literacy, unpublished. (in Chinese)】

汪曉勤（2013）。**數學文化透視**。上海：上海科技。【Wang, Xiao-Qin (2013). *Perspectives of mathematical culture*. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press. (in Chinese)】

阮圓真（2012）。一個公式的推演。**科學教育月刊**，**353**，45-48。【Juan, Yuan-Chen (2012). Deduction of a formula. *Science Education Monthly*, *353*, 45-48. (in Chinese)】

易南軒、王芝平（2007）。**多元視角下的數學文化**。北京：科學。【I, Nan-Hsuan, & Wang, Chih-Ping (2007). *Mathematical culture in terms of multiple perspectives*. Beijing: Science Press. (in Chinese)】

洪萬生（1991）。**孔子與數學**。臺北：明文書局。【Horng, Wann-Sheng (1991). *Confucius and mathematics*. Taipei: Ming-Wen Press. (in Chinese)】

苟長義、顧沛（2008）。以數學文化的融入改進文科數學教學。**數學教育學報**，**6**，5-7。【Kou, Chang-I, & Ku, Pei (2008). Integrating mathematical culture for improving teaching in liberal arts mathematics. *Journal of Mathematics Education*, *6*, 5-7. (in Chinese)】

陳進傳（1982）。峰迴路轉：明代的科技。載於洪萬生（主編），**中國文化新論・科技篇──格物與成器** （頁 227-283）。臺北：聯經。【Chen, Chin-Chuan (1982). Science and technology of Ming dynasty. In Wann-Sheng, Horng (Ed.), *A new discourse on Chinese culture - Technology volume* (pp. 227-283). Taipei: Linking Publishing. (in Chinese)】

黃友初（2013）。歐美數學素養發展狀況簡述。收錄於李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏（編著），**教育部提升國民素養實施方案—數學素養研究計劃結案報告**（頁 195-234）。教育部提升國民素養專案辦公室研究計劃成果報告，未出版。【Huang, Yu-Chu (2013). The developing status of mathematical literacy in Occident. In Lih, Ko-Wei, Huang, Wen-Chang, Yang, Te-Ching, & Liu, Po-Hung (Eds.), *Final report for educating citizen literacy in mathematics* (pp. 195-234). Project Office for Improving Citizen Literacy, Unpublished. (in Chinese)】

張一藩（1997）。資訊時代之國民素養與教育。收錄於謝清俊（主編），**資訊科技對人文、社會的衝擊與影響期末研究報告**（頁 77-100）。行政院經濟建設委員會委託之專題研究成果報告（編號：(86)023-602），未出版。檢自 http://cdp.sinica.edu.tw/project/jcatalog.htm【Chang, Yi-Fan (1997). Citizen literacy and education for information era. In Hsieh, Ching-Chun (Ed), *Report of project for studying the influence of information technology on humanity and society* (pp. 77-100). The Council for Economic Planning and Development (Rep. no.: (86)023-602), unpublished. Retrieved from http://cdp.sinica.edu.tw/project/jcatalog.htm (in Chinese)】

張之傑（1997）。文藝復興時期藝術家對科學的貢獻。**科學月刊**，**28**（9），736-740。【Chang, Chih-Chieh (1997). The contribution of Renaissance artists on sciences. *Science Monthly*, *28*(9), 736-740. (in Chinese)】

張奠宙（2005 年 12 月 23 日）。數學文化。檢自 http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/jxyj_1/zjlt_1/201008/t20100824_713684.htm 【Chang, Tien-Chou (2005, December 23). Mathematical culture. Retrieved from http://www.pep.com.cn/czsx/jszx/jxyj_1/zjlt_1/201008/t20100824_713684.htm (in Chinese)】

張楚廷（2006）。**數學文化**。北京：高等教育。【Chang, Chu-Ting (2006). *Mathematical culture*. Beijing: Higher Education Press. (in Chinese)】

張維忠（2005）。**文化視野中的數學與數學教育**。北京：人民教育。【Chang, Wei-Chung (2006). *Mathematics and mathematics education in terms of cultural perspectives*. Beijing: People's Education Press. (in Chinese)】

張維忠（2011）。**數學教育中的數學文化**。上海：上海教育。【Chang, Wei-Chung (2011). *Mathematics culture in mathematics education*. Shanghai: Shanghai Education Press. (in Chinese)】

張維忠、唐恒鈞（2008）。民族數學與數學課程改革。**數學傳播**，**32**（4），80-87。【Chang, Wei-Chung, & Tang, Heng-Chun (2008). Ethnomathematics and mathematics curriculum reform. *Mathmedia*, *32*(4), 80-87. (in Chinese)】

蕭文強（2008 年 8 月）。從離散數學到數學文化。**專題演講發表於 2008 組合數學暨新苗研討會**，國立交通大學。檢自 http://hkumath.hku.hk/~mks/20DiscrMath.pdf 【Hsiao, Wen-Chiang (2008, August). From discrete mathematics to mathematical culture. *A Lecture given at 2008 Symposium for Combinatorial Mathematics*, National Chiao Tung University. Retrieved from http://hkumath.hku.hk/~mks/20DiscrMath.pdf (in Chinese)】

劉昭民（1982）。理性的發皇：燦爛的宋金元科技。載於洪萬生（主編），**中國文化新論・科技篇──格物與成器**（頁 165-226）。臺北：聯經。【Liu, Chao-Min (1982). The Flourishing of Reason. In Wann-Sheng, Horng (Ed.), *A new discourse on Chinese culture - Technology volume* (pp. 165-226). Taipei: Linking Publishing. (in Chinese)】

Bullock, A. (1985). *The humanist tradition in the west*. London, UK: Thames and Hudson.

Byers, W. (2007). *How mathematicians think: Using ambiguity, contradiction, and paradox to create mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Cajori, F. (1928). *A history of mathematical notations*. La Salle, IL: Open Court Publishing.

Crowther, G. (1959). *15 to 18: A report of the Central Advisory Council for Education*. London, UK: Her Majesty's Stationary Office.

de Lange, J. (2003). Mathematics for literacy. In B. L. Madison & L. A. Steen (Eds.), *Quantitative literacy*: *Why numeracy matters for schools and colleges* (pp. 75-89). Princeton, NJ: National Council on Education and Disciplines.

Derbyshire, J. (2006). *Unknown quantity*: *A real and imaginary history of algebra*. Washington, DC: Joseph Henry Press.

Descartes, R. (1997). *A discourse on method* (J. Veitch, Trans.). London, UK: J. M. Dent. (Original work published 1637).

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. Albany, NY: State University of New York Press.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* Oxford, UK: Oxford University Press.

Højgaard, T. (2009). Competencies, skills, and assessment. In R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.), *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 225-231). Palmerston North, NZ: MERGA.

International Life Skills Survey (2000). *Policy research initiative*. Ottawa, Canada: Statistics Canada.

Katz, V. J. (1998). *A history of mathematics: An introduction* (2nd ed.). New York, NY: Addison-Wesly.

Kirsch, I. S., Jungeblut, A., Jenkins, L., & Kolstad A. (2002). *Adult literacy in America: A first look at the findings of the national adult literacy survey* (3rd ed.). Washington, DC: U.S. Department of Education.

Kline, M. (1953). *Mathematics in western culture*. New York, NY: Oxford University Press.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York, NY: Oxford University Press.

Kline, M. (1982). *Mathematics*: *The loss of certainty*. New York, NY: Oxford University Press.

Kouba, V. L., Champagne, A. B., Piscitelli, M., Havasy, M., White, K., & Hurley, M. (1998). *Literacy in the national science and mathematics standards: Communication and reasoning. Report Series 3.14.* Retrieved from ERIC database. (ED 417396)

Kroeber, A. L., & Kluckhohn, C. (1952). *Culture: A critical review of concepts and definitions*. Cambridge, MA: The Museum.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171472

Livio, M. (2006). *The equation that couldn't be solved: How mathematical genius discovered the language of symmetry*. New York, NY: Simon & Schuster.

Lockhart, P. (2009). *A mathematician's lament*: *How school cheats us out of our most fascinating and imaginative art form*. New York, NY: Bellevue Literary Press.

National Research Council. (2001). *Adding it up*: *Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp. 115-124). Athens, Greece: The Hellenic Mathematical Society and Cyprus Mathematical Society.

Niss, M., & Højgaard, T. (Eds.). (2011). *Competencies and mathematical learning–Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde, Denmark: Roskilde University.

OECD (2013). *PISA 2012 assessment and analytical framework*: *Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*. Paris, France: Author. doi: 10.1787/19963777

Plato. (1952). The Republic. In R. M. Hutchins (Ed.), *Great books of the western world* vol.7 (B. Jowett, Trans.) (pp. 295-441). Chicago, IL: Encyclopedia Britannica. (Original work published 360 B.C.).

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pugalee, D. K. (1999). Constructing a model of mathematical literacy. *The Clearing House*, *73*(1), 19-22. doi: 10.1080/00098659909599632

Singh, S. (1998). *Fermat's enigma*: *The epic quest to solve the world's greatest mathematical problem*. New York, NY: Anchor Books.

Steen, L. A. (Ed.). (1990). *On the shoulders of giants*: *New approaches to numeracy*. Washington, DC: National Academy Press. doi: 10.17226/1532

Steen, L. A., Burrill, G., Ganter, S., Goroff, D. L., Greenleaf, F. P., Grubb, W. N., … Wallace, D. (2001). The case for quantitative literacy. In L. A. Steen (Ed.), *Mathematics and democracy: The case for quantitative literacy* (pp. 1-22). Princeton, NJ: National Council on Education and the Disciplines. Retrieved from http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/QL/MathAndDemocracy.pdf

Struik, D. J. (1948). *A concise history of mathematics*. New York, NY: Dover Publication.

UNESCO (2003). *Literacy: A UNESCO perspective*. New York, NY: Author.

Wilder, R. L. (1950). Cultural basis of mathematics. In L. M. Graves, E. Hille, P. A. Smith, & O. Zariski (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (pp. 258-271). Providence, RI: American Mathematical society. Retrieved from http://www.mathunion.org/ICM/ICM1950.1/Main/icm1950.1.0258.0271.ocr.pdf