陳明璋、李俊儀、李健恆、楊晨意（2016）。
逐步引導注意力之多媒體教學設計對圓切線性質學習之成效研究。
臺灣數學教育期刊，**3**（2），1-30。
doi: 10.6278/tjme.20161005.001

逐步引導注意力之多媒體教學設計對圓切線性質學習之成效研究

陳明璋[1]　李俊儀[2]　李健恆[3]　楊晨意[4]

[1]國立交通大學通識教育中心

[2]國立台北大學師資培育中心

[3]國立臺灣師範大學數學系

[4]新竹縣立竹東國民中學

本研究旨在探討逐步引導注意力的多媒體教學設計對國中生數學學習的影響，並選取了資訊量較複雜的幾何之圓切線性質概念為教學內容，藉著適當引導學生注意圖形的重要元素，使資訊在工作記憶區能與先備知識進行有效的整合。本研究的參與者是 116 位新竹縣某國中來自四個班級的八年級學生，採二因子準實驗設計以探究不同的教學設計（高元素互動 vs 低元素互動）與不同的學習成就（高 vs 低）對國中生在圓切線性質學習之影響。研究結果發現使用低元素互動教材學習的學生，後測及延後測均有較好的表現，學習效率及投入都達到較高效能的水平。高學習成就的學生如預期般表現優於低學習成就的學生，說明在擁有穩固先備知識的基礎下，逐步引導注意力的設計讓被接收的資訊作更有效的整合。因此，元素互動量在教學多媒體設計中是重要的考量因素之一，其對數學教學設計與學習的遷移及保留效果值得在未來進行更深入的的探討。

關鍵詞：元素互動性、逐步引導注意力、認知負荷、圓切線性質

通訊作者：李健恆，e-mail：kinhanglei16@gmail.com
收稿：2016 年 2 月 24 日；
接受刊登：2016 年 10 月 5 日。

Chen, M. J., Lee, C. Y., Lei, K. H., & Yang, C. Y. (2016).
The effects of using stepwise attention-guiding multimedia instruction to learn properties of tangents of circles.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *3*(2), 1-30.
doi: 10.6278/tjme.20161005.001

The Effects of Using Stepwise Attention-Guiding Multimedia Instruction to Learn Properties of Tangents to Circles

Ming-Jang Chen[1] Chun-Yi Lee [2] Kin Hang Lei[3] Chen-Yi Yang[4]

[1] Center for General Education, National Chiao Tung University

[2] Center for Teacher Education, National Taipei University

[3] Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

[4] Chu dong Junior High School

The purpose of this study was to explore the effects of using stepwise attention-guiding multimedia instruction on mathematics learning abilities of junior high school students. The topic "Properties of tangents to circles" was chosen as the learning content for this experiment because it involved complex information. By guiding students to observe the key elements in a geometric graph, the information in their working memory was expected to integrate effectively with prior knowledge. The participants were 116 eighth grade students from four classes in a public junior high school of Hsinchu County, Taiwan. This study adopted a quasi-experimental design of pretest and posttests with nonequivalent groups. Students were randomly divided based on the kind of instruction used into the high element interactivity group and the low element interactivity group. A two-way factorial analysis of covariance was adopted to compare the impact of the teaching materials design (high element interactivity vs. low element interactivity) and students' academic achievement (high vs. low) on learning outcomes. The results showed that the students who used the instruction with low element interactivity showed significantly better performance than those who used the instructional version with high element interactivity on both the posttest and the delayed posttest. Students were attained a higher level of efficacy in both learning efficiency and involvement. As expected, students with a high level of academic achievement demonstrated a better performance than those with lower levels. The design using guided attention led to an effective integration of external information in the working memory of students who had enough prior experience. Hence, element interactivity was a key factor in the multimedia-based instructional design. The transfer and retention effects of the instructional design of element interactivity should be further examined in the future.

Keywords: element interactivity, stepwise-attention guiding, cognitive load, properties of tangents to circle

Corresponding author：Kin Hang Lei，e-mail：kinhanglei16@gmail.com
Received：24 February 2016;
Accepted：5 October 2016.

壹、緒論

從認知負荷理論的觀點（Sweller, 1988），不難看出幾何知識對很多學習者來說並不容易掌握的原因，因為人類的工作記憶區是有限的，當學習任務需要過高的記憶容量才能進行時，學習成效就有可能降低（de Jong, 2010），因此減少工作記憶區的負荷是增進幾何學習成效的重要因素。其中由學習材料本身所含內在資訊所產生的負荷，稱為內在認知負荷（intrinsic cognitive load），而內在認知負荷的程度，則是由工作記憶區中能夠同時處理元素數量之元素互動性（element interactivity）的高低來決定（Sweller, 2010）。例如，學習英文的詞彙和文法句法都屬於內在認知負荷的部分，但學習文法句法時則必須同時考慮數個詞彙以及它們之間的關係，在工作記憶區中同時要處理的元素量較只學習詞彙來得高，因此，學習英文文法句法是屬於高元素互動性的學習內容（Sweller & Chandler, 1994）。類似地，需要同時考量多個元素及其關係的幾何學習也是高內在認知負荷的學科之一，因其學習內容主要以推理方式來探討圖形之間的性質，學習者除了要能夠理解命題與圖形元素之間的關係外，更需要從複雜的圖形中作分解、抽取與推理相關子圖形中有助於解題的元素，再根據幾何性質，適時與對應元素作靈活的轉換（Duval, 1995, 1998）。由此可見，尤其對初學者來說，若要增加學習成效，則必須藉著適當的教學設計來減少工作記憶區同時處理的元素量，這是呈現高元素互動性的幾何教學設計時不能忽略的部分。

幾何問題主要以命題配合圖形的方式呈現，藉著多媒體的輔助，正好可以把圖形與文字作更好的展現。因此，隨著科技的不斷進步，多媒體輔助對數學學習帶來不錯的學習效果（Guven, 2012; Muhanna, 2012; Ragasa, 2008）。有關使用電腦輔助幾何的學習，可以分為提供學習者探索分析或閱讀反思兩個發展方向，探索分析主要透過動態幾何軟體或圖形計算器等工具，給予學生藉著拖曳物件或動態模擬來觀察及探索數學性質（Arzarello, Olivero, Paola, & Rubutti, 2002; Bostic & Pape, 2010）；閱讀反思則是善用多媒體把文字、圖像、聲音、錄像、動畫等整合的功能，將要學習的資訊更多元或完整地展現出來，藉此引起學習者的興趣以及對內容作有效的理解（Jeung, Chandler, & Sweller, 1997; Liu, 2012; Ogochukwu, 2010）。雖然探索分析給予學習者較多建構數學知識的機會，但這樣的方式必須建基在足夠的先備知識上，對於學習新數學知識時並不適用。一般地，若能夠對初學者展示完整的解題過程，他們將較容易藉著逐步解釋的解題過程，從而掌握對類似結構問題的解題技巧（Sweller & Cooper, 1985）；至於定義或定理等陳述性知識，也必須透過適當的展示方式，跟學習者說明其中的重要資訊。因此，當使用多媒體呈現幾何教學內容時，如何清晰傳達其中的重要訊息，是教學設計中不可忽略的環節。

有關數學教學的內容，一般都可以藉著文字（口語或印刷）和圖像（靜態或動態）來傳達，

透過電腦的豐富色彩、動畫播放、超連結、提供即時回饋等技術，對呈現資訊作有效的整合，形成一種非線性閱讀及互動的學習模式。然而，這樣的優勢還需要考慮相應的學習內容，才能發揮相關的效益。例如，從 Scheiter、Gerjets 與 Catrambone（2006）比較使用純文字、靜態圖畫以及動畫來學習計算簡單機率問題的研究中，結果顯示以動畫學習的效果卻沒有其他方式來得好，由此可見，多媒體教學需要考量各種元素，並非呈現聲色動畫效果就能取勝。有關多媒體設計的研究，Mayer（2001）整合多位學者理論與觀點後，提出雙通道（dual channels）、有限能力（limited capacity）及主動處理（active processing）三項多媒體學習認知理論的假設，說明人類進行多媒體學習時認知系統如何分配及處理相關資訊，其中對從不同通道獲取的資訊作選取、組織與整合並連結先備知識，是學習者獲取及建構知識的重要機制。Mayer（2005）從認知負荷理論整理出一些應用至多媒體環境設計的原則，主要從避免多餘資訊或分散學習者注意力等設計以降低外在認知負荷，以及使用適當切割資訊或加強學習者先備知識等方法來減少知識本身的內在認知負荷。然而，對於高元素互動的學習內容，即使能排除與學習無關的內容，在畫面上仍然需要同時面對大量的資訊，容易因認知處理容量的限制而造成認知負荷超載。因此，在設計多媒體教學時還需要額外注意兩個問題：（一）在眾多資訊的版面上，如何引導學習者適當地選取對應的元素？（二）在學習的過程中，如何有效地選取及組織資訊？

欲回答上述問題，與人類如何選擇這些透過視覺或聽覺而來的資訊有密切的關係。其中有關視覺搜尋的理論很多，研究者普遍認為人類處理視覺資訊至少可以分為前注意（pre-attention）和注意（attention）兩個階段（Hoffman, 1979; Neisser, 1967; Treisman, 1986），其中前注意階段沒有容量限制，對所有項目以平行方式進行搜尋，擁有如顏色、大小、形狀、位置、運動等其中一項性質的項目會被快速地辨認出來，因此教學中利用這些特質呈現教材內容來引導學習者注意力是常用的設計。例如，Jamet、Gavota 與 Quaireau（2008）使用改變顏色以及配合口語，逐步突顯關鍵部分的引導注意力方式來學習人腦的各個區域，研究結果顯示上述方式在記憶測驗有顯著的成效。這樣的學習成效除了歸功於善用雙通道來提供資訊外，也因為能夠藉著顏色的變化逐步引導學生需要注意的重點。對於這些主要說明人體或機械結構的學習內容，除了各元素或操作流程需要從整體中特別注意某些細節外，各元素的「位置關係」也是被獲取知識中重要的一環，因此在整體圖像裏再突顯局部情況是最能清晰表達位置關係的手法。然而，數學內容更強調的是「結構關係」，亦即元素與元素之間的關係，例如，圓的切線是指同一平面上與圓只有一個交點的直線，至於那個交點在圓的哪一個位置卻不是最重要的資訊，重要的是讓學習者從圖像中看到圓與直線只有一個交點，從而想到通過該交點與圓心的半徑跟上述直線是互相垂直的，這樣的性質通常也與解題策略有密切的關連。另一方面，在視覺搜尋中，對於突然出現（abrupt onset）的資訊也是獲取注意力的有效方式之一（Yantis & Jonides, 1984, 1990），因此，

當設計圓與其切線性質的教學時，考慮先從圓的圖形出發，再逐步引出切線的相關概念，避免因幾何圖像本身的複雜性而分散學習者的注意力，無法聚焦到圓的結構上，相信是有效地幫助選取及組織圖像資訊的方法之一。早年 Miller（1956）提出將知識作適當的區塊化，將有助於概念的保留，因此對圖形中的概念以區塊化的方式呈現對概念保留應有正面的幫助。將概念區塊化後再逐步引出概念的設計，按照人類處理視覺資訊的方式，突然出現的訊息將有助於獲取學習者的注意力，那麼每次突顯的圖形元素數量會否影響學習者的學習成效，將是呈現幾何內容的教學設計的重要參考指標，值得作進一步研究探討。

部分研究指出相同的教學設計，給予能力不同的學習者使用後或會呈現截然不同的效果（Sweller, Ayres, & Kalyuga, 2011），研究結果解釋一些能夠幫助初學者或先備知識較不完備的學習者之教學設計，對基礎較好的學生來說，卻因給予太多重複資訊而增加了他們的認知負荷，因此無法呈現更好的學習成效。如果突顯幾何圖形元素對高學習成就的學生是非必要的提示，相信也會產生類似的反轉效果；若突顯幾何圖形元素不是認知過程中的必要元素，相信對低學習成就的學生也起不了太大的作用。基於上述研究背景，本研究旨在依據認知負荷理論及視覺搜尋的特性，選取屬高元素互動的圓與切線性質單元，將概念區塊化並配合教師的口語引導，以逐步突顯圖像元素之間的結構關係來呈現教學內容，藉著使用「低元素互動」的引導注意力教學設計，期盼學習者對知識的獲取並非只是因為當下的記憶效果而得到的，而是真正的掌握並能儲存在長期記憶區中。因此，對不同學習成就之學生，在使用不同元素互動的教材學習圓與切線性質後，本研究主要探討：（一）各組學生的當下及延遲學習效果為何？（二）各組學生所花費心力的自我感受程度為何？學習效率與學習投入情況是否存在差異？

貳、文獻探討

幾何學習多半屬於含有高元素互動的內容，在教學設計中，以多媒體方式呈現是常用的有效工具，但亦因為內容的豐富多彩，如何能夠引導學習者專注在重要資訊上是設計的關鍵要素。本文藉著回顧各種增進內容理解及注意力引導的多媒體教學設計，從而探討適合幾何內容的教學設計方法。

一、多媒體設計

多媒體學習的認知理論一般有三大假設（Mayer, 2005, 2009），一是人類擁有以視覺和聽覺兩個不同的通道來處理相應的文字和圖像；二是在上述各通道上只能夠同時處理有限數量的資訊；三是對進入通道的資訊，人類是採取主動處理的認知過程，這些認知過程包括投放注意力和組織從眼睛及耳朵進來的文字及聲音訊息，以及將相關訊息與先備知識整合，是一種主動處理這些多媒體資訊所要傳達意義的過程。由於在各個通道內資訊的處理量以及工作記憶區的容

量均是有限制的，因此認知負荷是多媒體教學設計的考量核心（Mayer & Moreno, 2003）。認知負荷主要分為外在和內在負荷兩種類型（Sweller et al., 2011），在多媒體教學中降低上述兩類認知負荷是主要的設計考量：

（一）適當管理內在認知負荷的教學設計

內在負荷與學習者獲取的學習目標有關，它是由資訊本身內容結構的複雜性所組成，其中善用雙通道來處理資訊與學習成效有重要的關係。上文提及雙通道理論（Baddeley, 1992）的應用，在較早前的研究是根據人類接受資訊分為視覺和聽覺不同通道的假設，因此如果學習者閱讀配有旁白及字幕的圖像（靜態圖片或動畫）畫面，其學習效果將較只使用旁白與圖像的多媒體設計來得差（Mayer, 2009）。例如，學習長方形的周長公式（Jeung et al., 1997）或只需要兩至三步驟的局部推理幾何證明（Mousavi, Low, & Sweller, 1995），結果均顯示同時使用眼睛觀察圖形元素而耳朵聽取說明內容的設計，學習時間較敘述與圖形皆以視覺接受的方式來得短，尤其對於幾何證明的過程與圖像經常會分開顯示的學習方式，透過聽覺來接收資訊可以避免分散注意力（Ayres & Sweller, 2005）的問題產生。Atkinson（2002）的研究在學習比例的應用問題上也有類似的效果，配合聲音引導學習的教學設計，學習者在後測近遷移問題的表現較只有文字說明的版本來得好，且對任務的困難度感受也較低。然而，近期的研究顯示，這種善用雙通道的學習效果，主要作用於口述文字內容較短（只包含 1～2 個句子）的教學，若口述的內容較長，則同時呈現文字及圖像的教學設計，其學習效果反而較使用口語及圖像來得好（Rummer, Schweppe, Fürstenberg, Scheiter, & Zindler, 2011），當聽覺需要接收的資訊過多時，學習者只能對最後接收的資訊有較好的保留效果，因此給予文字去輔助理解內容，學習效果將能有所提升。Schmidt-Weigand、Kohnert 與 Glowalla（2010）的研究透過眼動追蹤發現當面對較多的文字說明教學時，學習者會傾向有較多的時間用於注視文字內容而非圖像。而數學教學範例通常有明確的解題步驟，因此簡單的幾何問題只需要配合圖形作口語解釋即能理解相關內容；若是較複雜的幾何問題，各步驟輔以簡短的說明解釋或把相關重點以文字形式標示，相信更有助於學生對內容的理解。

在處理含有高互動元素的複雜問題時，將內容切割為有意義的子項目是降低內在負荷的常用方法，處理方式主要可以分為改變原來解答的複雜程度、前訓練（pre-training）和獨立元素（isolated-elements）三種策略（Ayres, 2013）。第一種以改變原來解答的複雜程度的策略需要因應學習內容而設計，例如 Gerjets、Scheiter 與 Catrambone（2006）在有關機率問題的學習上，將原來傳統使用的解題方式（辨認任務特徵、使用相應公式、計算機率值）改為將問題的三個步驟獨立計算各自的機率值的方法，研究發現學習者更能掌握相關的概念。上述研究結果顯示對複雜任務進行有意義的切割，切割後的子任務能夠使用更容易掌握的解決方法，藉此降低內在

負荷是增加學習成效的主要原因。第二種前訓練策略是指在學習主要內容之前，先向學習者介紹主要概念中所使用的名稱和特徵，使這些重要的用語及其意義先成為學習的先備知識（Mayer, 2009）。例如分為元件功能及操作使用兩個部分來進行學習，對使用機器等包含較多專有名詞及操作程序的多媒體學習有顯著的幫助（Mayer, Mathias, & Wetzell, 2002）。因此，當需要使用新的軟體來學習數學內容時，先向學習者介紹軟體的使用方法及各項功能，對不熟悉軟體操作的學生來說尤其重要（Clarke, Ayres, & Sweller, 2005）。而數學學習對相關名詞的定義一般都會先進行教學後，才會討論其性質及應用，因此這樣的前訓練策略在數學學習中幾乎是必須的設計。第三種獨立元素策略是指在學習的過程中含有高互動性的元素作有意義的分離，例如對於學習機器的操作過程及原理，第一階段先專注於操作的方式，第二階段才同時學習操作及原理，尤其對先備知識較弱的學生幫助很大（Pollock, Chandler, & Sweller, 2002）；或是要同時知道如何做（程序性資訊）及其原理（陳述性資訊）的疑難排解任務中，將兩種資訊分開呈現較同時呈現的學習模式，學習者在遷移任務上有較出色的表現（Kester, Kirschner, & van Merriënboer, 2006）。至於有明確解題步驟的數學問題，例如把展開多項式中的每一項獨立看成一個元素（Ayres, 2006, 2013），先讓學習者瞭解該元素的符號及運算的處理方式，對只有較少先備知識的學生有顯著的幫助。

總而言之，對於處理複雜數學問題的初學者來說，必須先跟他們說明各個定義及性質後，對解題步驟進行有意義的切割或區塊化來降低內在認知負荷是可行的教學設計，而如何才算是有意義的切割則值得作深入的探討。其中，認知負荷理論（Sweller et al., 2011）明確指出高元素互動的資訊對學習者會產生較大的困難，高元素互動是指在處理某一概念時，必須同時成功整合多個元素才能獲得結果的狀態，如 Chandler 與 Sweller（1996）以介紹電腦輔助設計與製造軟體的研究中，定義操作步驟只需要在鍵盤上作按鍵操作就能完成任務為低元素互動的步驟，若操作步驟還牽涉到其它概念的使用時，則視為高元素互動的步驟。研究發現學習者在處理高元素互動的問題時，以降低分散注意力的設計可獲得較好的學習成效。進一步地，Leahy 與 Sweller（2005）的研究探討學生在閱讀公車時刻表時所處理的元素量，將每個任務所需要同時處理的元素分別列出，並定義同時處理 1-3 個元素者為低元素互動性，若需要同時處理 4-9 個元素則為高元素互動性的問題。結果發現學習者在回答不同元素互動性問題時的表現有顯著差異，這樣的結果既呼應了人類認知資源是有限的假設，當只需要處理低元素互動性的資訊將較同時處理大量資訊來得有效，同時也提示元素互動性是多媒體教學中資訊呈現的重要指標。雖然將操作程序與原理分開處理或將解題過程的每一項看成一個獨立元素，都是讓學生分別弄懂部分意義後再來處理整體的任務，研究均指出這樣的切割有較好的學習成效。然而，幾何任務即使按幾何結構將任務分為微觀、局部等層次（Duval, 1998），但在微觀層次要處理的元素量，也足以讓

學習者無法理解相關的內容。因此，有必要更進一步地處理微觀層次的互動元素，以幫助學習者有效掌握相關的概念。

（二）盡量減少外在認知負荷的教學設計

外在負荷主要是由教學目標無關的教學設計所產生的，這些不必要的設計讓記憶容量超載繼而影響學習成效。對於系統結構性強的領域（如：數學、科學等），在獲取技能的最初階段，若能以工作例（worked-out examples）的方式呈現學習內容，將較直接進行高負荷量的解題任務來得有效（Carroll, 1994; Renkl, 2005; Sweller & Cooper, 1985）。工作例一般由問題敘述、解題步驟及其最後答案所組成，對於特定的內容，還會包括一些問題的輔助表徵（如：圖表）。因此，很多降低外在認知負荷的策略都與工作例中各元素的呈現方式有關。然而，工作例的教學設計，對初學者或先備知識不夠穩固的學生通常有較好的學習成效，但對於先備知識較完備的學生來說有時候反而是增加了他們的認知負荷。例如 Kalyuga 與 Sweller（2004）在學習計算座標平面兩點間距離的研究中，分別設計了以工作例及問題解決為基礎的兩種不同教學模式，探討不同程度學生的學習成效，研究發現高程度學生在問題解決為基礎的教學模式有較好的表現，而低程度學生卻是在以工作例為基礎的教學模式中表現更為理想。Ayres（2006）在學生學習多項式展開的研究中，將各項獨立處理的教學設計也有類似的反效果，這樣的設計也只對低先備知識的學生帶來好處，對高先備知識的學生反而是整個多項式一起處理的學習成效較佳。研究結果解釋上述的教學設計因給予太多重複的資訊，反而對具備較好基礎的學生是增加了不必要的認知負荷，因此無法呈現更好的學習成效。因此，在多媒體的教學設計中，將要學習的元素作更細部的分解並不一定對所有學生都有幫助，分析教學設計對不同學習成就學生的影響，將有助於確定配合學生程度的教學設計。

除了上述與教學內容設計有關的認知負荷外，使用多媒體設計教材時，有時候會因能輕易整合文字、聲音、靜態圖片及動畫等元素而在呈現方式上增加了認知負荷。例如若插入與學習內容無關的插圖或背景音樂，則會佔據視覺或聽覺通道中的記憶容量，因此版面上應只顯示必要的資訊且配合的口語也必須與學習內容有關。各元素的安排應以幫助學習者選取、組織資訊來考量，如把圖表各部分的元素名稱及意義標示在對應位置上方便解讀圖表的意義（Bodemer, Ploetzner, Feuerlein, & Spada, 2004），將有關數學圖像中角的度量方法（Sweller, 1994）或座標平面上的點座標計算方式（Sweller, Chandler, Tierney, & Cooper, 1990）等直接標示在圖形相應的元素附近，減少學習者耗費認知資源來找尋文字與圖像的對應關係，避免注意力的分散。至於用作詳細說明圖片或動畫內容的文字或旁白，一般認為解釋文字若能配合圖片內容同時呈現會較先後呈現有好的學習成效（Mayer, 2009），但當選擇以旁白來說明圖片（或動畫）的內容時，則單純以旁白方式作說明，會較同時顯示字幕和旁白的圖片有較好的學習效果，這是因為字幕與

旁白的內容是完全相同的，學習者容易去追蹤字幕的文字而忽略動畫中所帶出的重要資訊，同時也要求學習者分散認知資源來作組織整合；不過，在旁白描述動畫內容的同時，對重要的資訊以簡單的文字來作提示說明，反而能引導學習者的注意從而增加學習成效（Mayer & Johnson, 2008）。因此，適當的口語說明在教學設計中是傳遞知識的重要途徑，至於是否需要配以相關的文字說明，則需要視內容的複雜程度而定，相信對於較複雜的幾何問題中重要元素或推理過程，文字提示說明將是不能缺少的資訊。

二、注意力引導

透過聽覺和視覺是接受外界資訊的主要途徑，早期選擇性注意力研究多以聽覺為主（Driver, 2001），同時給予受試者聽不同的聲音，以檢測人們對哪些聲音更能聽見。自 1960 年代起，研究慢慢轉向與視覺的注意力有關，也因為眼睛能接受的資訊不單只是語言處理方面，更多探討圖像特性對注意力影響的研究讓我們更瞭解感官注意力的選取特性，視覺搜尋成為注意力研究中一個重要的派典（Müller & Krummenacher, 2006）。其中 Broadbent（1958）提出有關注意力過濾理論（filter theory），說明人們注意力的基本選擇機制，Broadbent 主張人類的注意力分為兩個階段，就像電腦的中央處理單元般，對資訊的處理是有限容量的，因此在感官系統中有一個像過濾器般的設計，將一些未被注意到的訊息排除掉以避免負荷超載。雖然後來的研究發現那些未被直接注意到的資訊並不是全部都過濾掉，只是被減弱而已，但 Broadbent 的模型無疑提供注意力研究一個引導性的指標。在這樣的基礎上，Treisman 與 Gelade（1980）提出的特徵整合理論（feature integration theory），更進一步地說明人類處理視覺資訊的過程是由兩個階段組成的。在第一階段會受一些有高度辨識的基本特徵（如：發出額外的聲音、聲調的高低音或男女聲切換等改變、顏色、方向）的影響來作出選擇，並使用同時處理所有物件的方式（parallel model，平行模式）來搜尋資訊，例如在一堆綠色的物件中搜尋一個紅色物件，這樣確認目標是否存在的反應時間與被觀察項目的個數無關；第二階段則需要由個體有意識地控制，有序地對項目逐個作進一步的比對分析（serial model，序列模式）才能確認需要的資訊。換句話說，若我們以第一階段處理過程的特性來呈現學習目標，就能夠在前注意階段刺激並搶先引導學習者的注意力，這些可以引起注意力的元素包括形狀、顏色、深度（陰影的方向及明暗差異）、運動等（Pashler, 1988; Treisman, 1986; Wolfe, 1998）。

上述特性在多媒體的教學設計中，常以信號（signal）的形式來幫助學習者適當地選取、組織和整合相關資訊（Mayer, 2009）。這些信號並沒有為原來的材料提供新資訊或改變原有的學習內容，它們只是透過刺激視覺的一些設計以減少學習者的視覺搜尋空間，亦即讓他們更能把注意力集中在相關的學習內容上。對於文字內容，通常以字體的變化（如：粗體、斜體、畫線、改變顏色等）或口語聲線改變來突顯重要的字詞，而在文字段落的開始以概要或標題的方式標示

重要內容，都是文字內容中常用的信號。然而，在靜態圖片或動畫中，資訊是以非線性的方式呈現，因而有更多不同的方式來給予信號提示。例如，以箭頭指示（Crooks, Cheon, Inan, Ari, & Flores, 2012; Mautone & Mayer, 2001）或閃爍（Hong, Thong, & Tam, 2004）來強調要注意的部分、以不同顏色的路徑箭頭顯示不同系統的作用流程（Boucheix & Lowe, 2010）、顏色變更或以不同顏色呈現重要資訊（Craig, Gholson, & Driscoll, 2002; Jamet et al., 2008; Jamet, 2014）、將較次要的資訊改以灰色呈現（de Koning, Tabbers, Rikers, & Paas, 2010）等適合說明機器操作過程或展示流程方面的設計。而多與圖形配合的幾何問題上，適合利用突然出現（Yantis & Jonides, 1984, 1990）或閃爍等方式來突顯對應的圖形元素，如 Jeung 等人（1997）的研究說明若是在較簡單的幾何圖形中，是否突顯相關元素對學習效果影響不大；但若在學習需要眼睛作大量資訊搜尋的幾何問題時，能夠配合口語所述閃爍圖形中相應的元素，將能以較短的時間來完成和理解學習目標。因此，以不同的手法來強調圖像和文字（包括口語）的對應，是在幾何問題中常用的引導注意力的方式。

上述的設計是在一個複雜的圖片中，既要展示整體的情況又要突顯局部的時候適合的方式。然而在數學問題中，則需要引領學生瞭解局部發展到整體的過程，其中局部元素的辨識對學習者掌握內容有重要的幫助。Luzón 與 Letón（2015）設計了一個有關骰子機率問題的工作例，比較在輔以口語解釋的情況下，一次將解題步驟都呈現的動畫學習效果劣於解題時模仿書寫過程的動畫，顯示這種模仿書寫過程的動畫效果更能促進對內容的理解，學習者不管在記憶測驗及遷移測驗都有較好的成效，這樣的設計除了讓學習者有較充足的時間配合動畫對程序性知識作思考外，也能清楚展現內容的發展脈絡。類似地，Hu、Ginns 與 Bobis（2014, 2015）在已經給定完整步驟說明的幾何工作例中，要求學生每一步都透過食指勾畫出內容與圖形所對應的部分，與純粹作閱讀的組別作比較發現，以指向（pointing）和追縱（tracing）手勢學習的組別能夠解答更多的練習題以及有較少的出錯，作者認為這樣的手勢可以讓學習者把視覺注意力更集中到將要學習的數學法則上，重建圖形中各元素之間的發展關係，藉此支持基模的建構。由此可見，對局部數學知識的理解是注意力引導的重心，學習者若能逐步瞭解數學知識發展的脈絡，藉此釐清元素之間的關係是解題的重要手段。Hu 等人的研究所使用的圖像只是一組平行線及其截線的簡單圖像，學習者要從中尋找相應的元素並不困難，但在較複雜的幾何圖像中能夠找出相應的子圖而不受干擾，尤其只透過多媒體工具來呈現內容時則顯得沒那麼容易。

從認知負荷理論對管理教學設計中內在認知負荷的各種建議可知，處理複雜學習材料時所包含的元素量較多，亦即瞭解概念之間的關係有較高的元素互動性，這樣的內在認知負荷通常是對學習材料作適當的切割來降低，藉此幫助概念的理解。在幾何學習中，圖像是重要的表徵之一，也是在解決幾何問題時，透過適當的操弄以洞察解答的重要工具（Duval, 1995），因此幾

何圖像的元素關係往往也是複雜的。過往較少研究探討對幾何圖像進行適當的切割，藉著降低其元素互動性來增進學習效果的可行性，本研究嘗試透過多媒體展示的功能，在複雜的幾何圖像中，以逐步引導學習者注意到局部圖像元素關係的方法，探討其教學成效。設計除了配合顏色改變的方式來逐步突顯概念建構的過程外，讓元素以突然出現的方式來獲取注意力，並考慮學習者在視覺和聽覺的通道上均只能同時處理有限數量的資訊，因而每次的呈現都只作低元素互動性的處理，在老師的口語講解下，相信將有助於選取、組織、整合內容，幫助對內容的理解及基模建構。

參、研究方法

一、研究對象

本研究以新竹縣某國中八年級四個常態班級為研究對象，為求立足點一致，被選取的四個常態班級中將需要抽離原班級上課的資源生排除後，以隨機的方式分為使用「高元素互動」及「低元素互動」進行教學兩種方式，即每種教材都各有兩個班級作為學習圓與切線概念的主要工具。計算上述兩組學生該學年上學期三次數學定期評量之平均成績，按結果由高至低排序後，將各班學生再平均分為高、低學習成就兩組，表 1 總結研究對象各組人數的分配情形。

表 1

研究對象各組人數分配表

組別	學習成就：低	學習成就：高	總數
低元素互動	29	29	58
高元素互動	29	29	58

教材主要內容為「圓與切線間之性質」，符合九年一貫數學科能力指標「9-s-6 能理解直線與圓之性質」（教育部，2008），對應課本章節為九年級第一學期第二章（左台益，2012）。兩組別之教材主題與授課時間均相同，因圓與切線性質不屬於國中八年級的正式課程，因此可排除學生到校外補習對學習成效之影響。

二、研究設計

本研究主要考慮元素互動量（Sweller et al., 2011）的設計，針對幾何圖形含有高元素互動的性質，配合視覺引導注意力方式，分別設計「低元素互動」和「高元素互動」的教材，同時討論上述設計對不同「學習成就」學生會否產生不同的學習成效。因此，研究採二因子的準實驗研究設計，探討以兩種不同的元素呈現方式（低元素互動、高元素互動）的教材，對兩種具備不同

學習成就（低、高）的學生在不同時間（後測、延後測）所呈現的學習成效及學習效率的影響。其中，學習者之學習成就判定是以學生最近三次定期評量成績代表學生的學習成就，並分別將實驗組及對照組的學生成績作高至低排列，取前 50%為高學習成就組、後 50%為低學習成就組。

本研究中各組皆是由同一位教師授課，教學時使用投影機、大螢幕投影設備，配合教師的口語引導，以 PowerPoint 簡報軟體逐步顯示圓與切線性質之教學內容，每個概念均是從圖形的局部元素出發，逐漸延伸到整體的方式展示內容。其中高元素互動是一次呈現所有的局部元素（通常是概念的一個段落或解題過程中的一個步驟），實驗組使用的低元素互動是將局部元素再細分後逐步呈現，使得每次在 PowerPoint 頁面上新增的元素不超過三個，而控制組則與傳統教學的呈現方式相近，把局部元素一次呈現後再由教師作講解，因此每次所顯示的元素量較多（四個或以上），詳見研究工具中的介紹。

三、研究工具

本研究的研究工具包括「圓與切線間之性質」多媒體教材、先備知識測驗、後測、延後測以及花費心力之感受評量，藉由多個面向來探討學習效果，詳細內容如下所述。

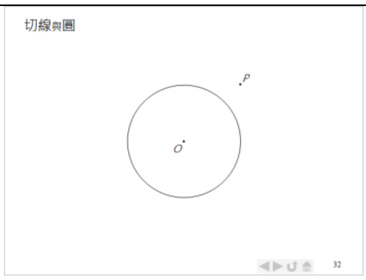
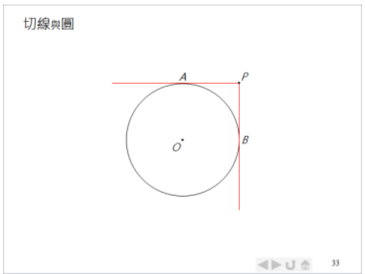
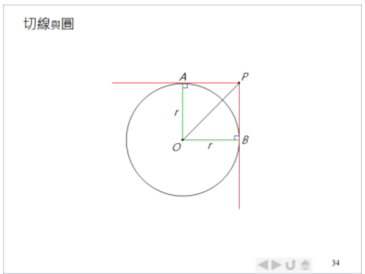
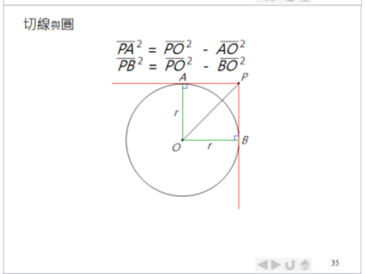
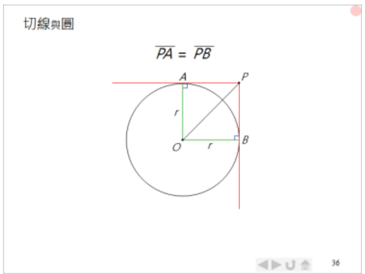
（一）「圓與切線間之性質」多媒體教材

「圓與切線間之性質」為九年一貫數學科能力指標「9-s-6 能理解直線與圓之性質」（教育部，2008），對應課本章節為數學九年級第一學期第二章（左台益，2012）。教材製作平台為 PowerPoint 2003 簡報軟體搭配 AMA（Activate Mind and Attention）外掛增益集（Lee & Chen, 2016），多媒體教材設計與五位國中數學老師及一位教學專家共同討論設計而成，並應用課堂展演所運用之注意力與視覺搜尋、認知負荷理論及多媒體學習設計原則安排各教學元素，所應用的相關設計原則如表 2 所示。

本研究之教學實驗分為使用「高元素互動」與「低元素互動」兩組，教材設計的內容完全相同，主要差異在於訊息傳遞策略的不同而已。表 2 以圓切線長性質為例，說明兩組的教材設計中都是以相關理論為原則，藉著 PowerPoint 快速及容易操作的翻頁功能，把原來複雜的幾何任務，分解到不同的投影片來呈現不同的圖形元素或步驟，由此突顯幾何圖形的結構關係，這樣的分解是對圖形或程序作有意義的切割，以降低學習者搜尋及處理訊息的認知負荷。有關內容的陳述以教師的口語引導為主，利用雙通道接受資訊的原則，讓學習者的視覺所看到的物件與聽覺所聽到的訊息作有效的整合。而訊息的呈現除了利用顏色以及突然出現的方式呈現外，其它次要的訊息也會作淡化處理，這樣的設計既要有效引導學習者的注意力，同時在必要時仍可以看見整體的訊息。各種訊息（包括文字及口語）、符號或輔助標示均依循空間、時間接近以及減少冗餘資訊等原則設計，以減少視覺搜尋的負荷及避免分散注意力，促進學習成效。

表 2

圓切線長性質之多媒體教材設計

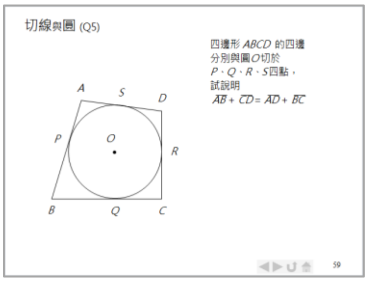
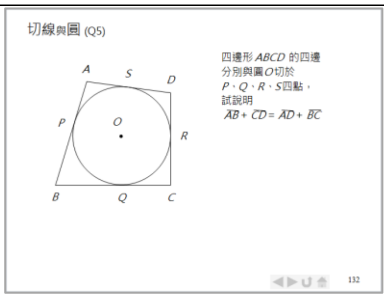
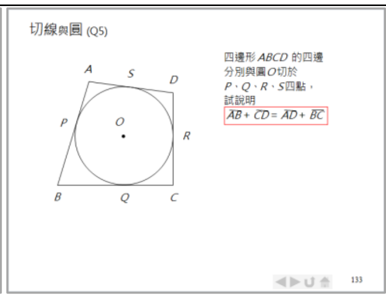
圖例	多媒體設計原則
	➢ 以雙通道接收訊息為原則，學習者以視覺觀察圖形，並以聽覺聆聽教師的講解。 ➢ 版面上除了必要的文字及圖形元素外，讓學習者能快速地掌握圓 *O* 與圓外一點 *P* 的關係，盡量減少不必要的資訊阻礙學習。
	➢ 在新的圖形元素出現時，教師的口語也同步作說明，讓學生更容易作資訊的整合。 ➢ 重要的圖形元素（如：切線）以不同的顏色表示，並利用突然出現的呈現方式，加強引導學習者之注意力，讓他們馬上掌握直線 *PA* 和 *PB* 均為圓 *O* 之切線。
	➢ 另一重要圖形元素（半徑）使用不同於圓及切線的顏色顯示，同樣以突然出現的呈現方式，讓學習者專注於半徑及其與切線之垂直關係。
	➢ 版面上只顯示相關重要的數學式子，用作幫助學生理解元素之間的關係，以避免學習者需要對圖形與文字作多餘的整合。
	➢ 相關的數學式子出現在圖形元素的附近，透過空間接近原則以避免分散學習者的注意力。 ➢ 圓切線長性質為切線與圓之間的重要性質之一，透過先對相關概念進行講解後再加以應用，是數學學習中常用的教學設計。

「高元素互動」與「低元素互動」兩組的教材設計在內容上是完全相同的，其主要差異在於訊息傳遞策略的不同。在相同的段落裏，低元素互動是指將每次在版面中增加的元素逐步呈

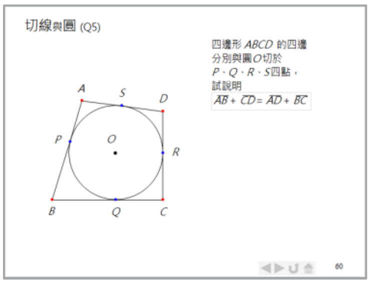
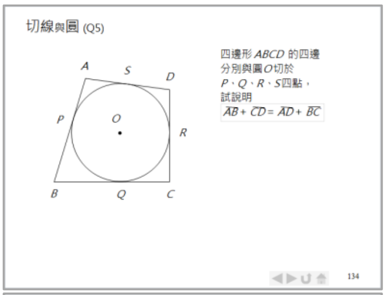
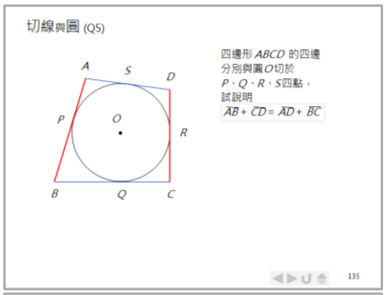
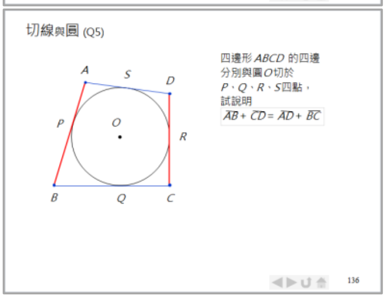
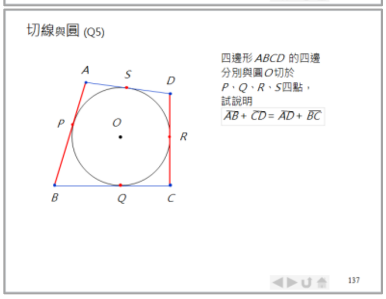
現，並以顏色改變及突然出現的方式引導學習者專注在教師口語描述的內容上。如表 3 逐步引導學習者觀察圓外切四邊形時，四邊形各頂點都可視為圓外一點，而四邊形的邊也被切點切割為四組從頂點對圓所作的切線段，每組頂點及其對圓所作的切線段，以及切線段等長的性質都獨立呈現，因此分為八張投影片來展示相關內容。此時，教師對每張投影片也只需要作較少量的口語引導，藉著顏色及突然出現的元素設計，讓學生減少視覺搜尋及整合的負荷，從而更能掌握知識的內容，表 3 以圓外切四邊形的性質為例，展示「高元素互動」與「低元素互動」兩組在教學設計上的主要差異。

表 3

圓外切四邊形的性質之教學設計

高元素互動教材	低元素互動教材
	 

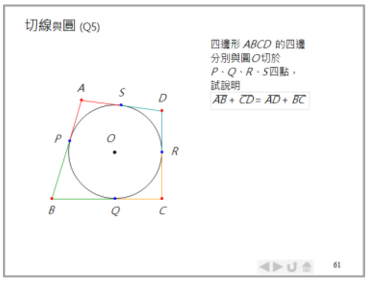
說明：引導學習者觀察圖形中圓和四邊形各邊之間的關係，從而察覺出四邊形與圓相切是解題的關鍵。

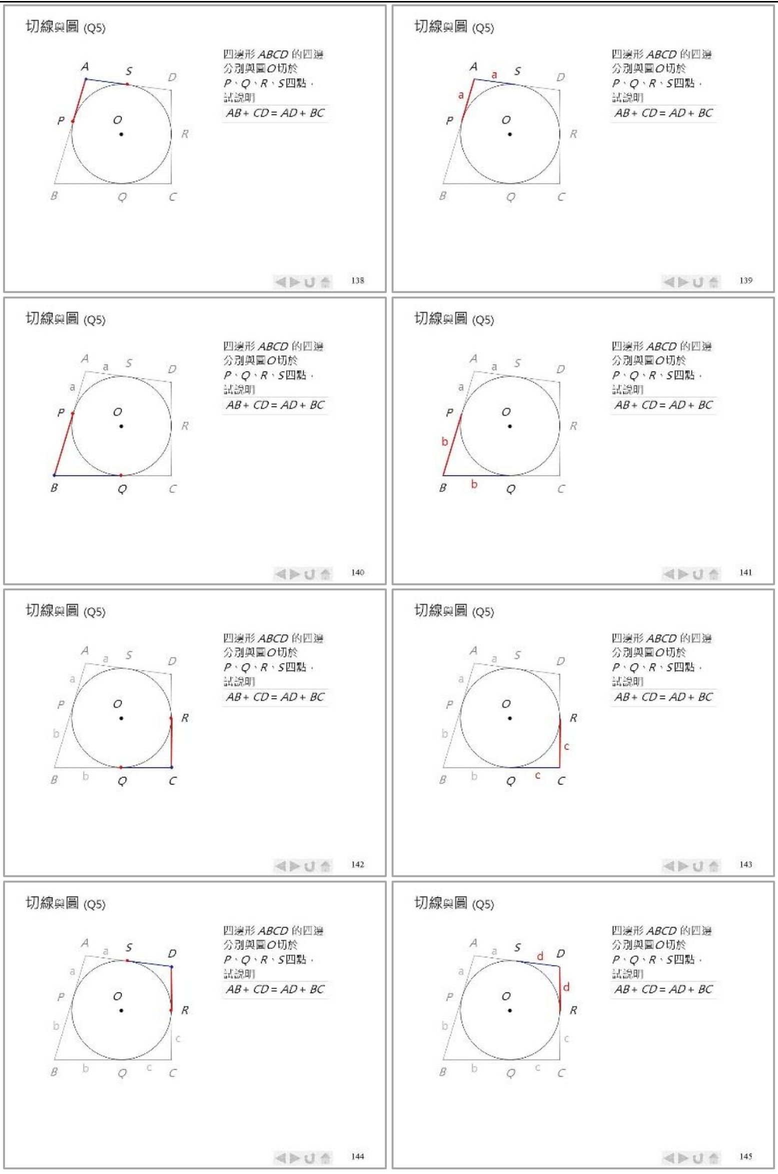
說明：引導學習者觀察到四邊形的四個頂點及四個切點，並能察覺到可以應用「過圓外一點對此圓所作的兩切線段長相等」的性質。

（續下頁）

高元素互動教材



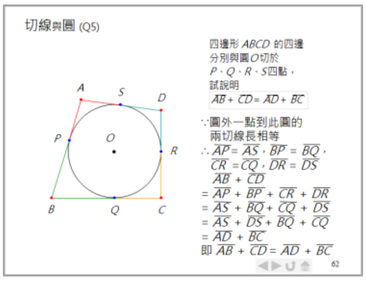
低元素互動教材

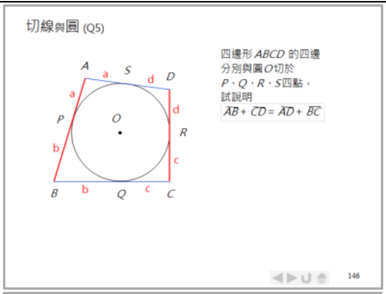


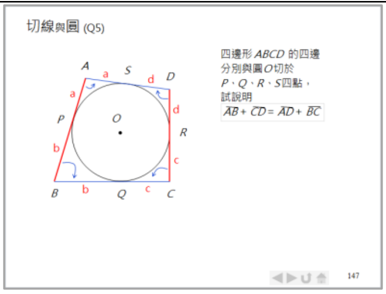
說明：讓學習者理解「過圓外一點對此圓所作的兩切線段長相等」的性質中，各元素之間的對應關係，其中無關的資訊作淡化處理。

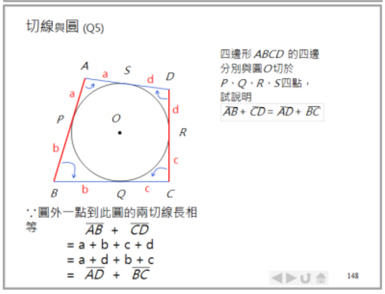
（續下頁）

高元素互動教材	低元素互動教材









說明：運用線條、記號等表達出「過圓外一點對此圓所作的兩切線段長相等」的性質，並以文字說明推理過程。

（二）「圓與切線間之性質」學習成效之評量工具

因不同學習成就學生是依據校內定期評量的平均成績作分組，為確保不同學習成就學生的起始程度一致，本研究在實驗教學前，先以紙筆測驗的方式，對各研究對象進行相關先備知識的測驗；在完成實驗教學後，同樣以紙筆測驗的方式，進行與學習內容相關的後測評量；進一步地，為了確認研究對象對知識的掌握並非靠著記憶而來，因此於教學實驗結束四週後進行延後測，其中延後測與後測的考卷內容完全相同。上述評量工具之效度採專家效度，分別與五位國中數學老師及一位教學專家共同討論審閱，以確定評量工具之有效性。為確定評量工具的適用性，因此先以同校另外兩個九年級的常態班級（共 63 位學生）進行預試，由此得到先備知識測驗卷難度介於 0.53 與 0.65 之間，鑑別度介於 0.59 與 0.88 之間；後測測驗卷難度介於 0.47 與 0.62 之間，鑑別度介於 0.76 與 1.00 之間，表示各題之難度與鑑別度均適中；而內部一致性係數（Cronbach's α）分別為 0.96 和 0.93，說明上述測驗之內部一致信度良好，適合作為評量工具。

先備知識測驗卷共有八個問題，每題五分，總分四十分。內容主要檢測學習者之先備知識，包括三角形的面積、勾股定理、點與直線或圓的概念、圓與切線的關係等，全部的題目均以填充題或計算題的形式呈現，並沒有包含需要作多步驟推理的幾何問題。

後測測驗卷由計算題及說明題兩部分組成，測驗卷共含有八個問題（每部分四題），每題十分，總分八十分。並對每題之計算及說明步驟採分段方式給分，給分之標準如表 4 所示。其中，第 1-4 題為計算題，第 1 題與教學示例內容相近，第 2-4 題為非教學示例題，主要檢測學習者是

否能應用所學的性質及知識；第 5-8 題為說明題，其內容與上課使用的教學示例相近，主要檢測學習者對推理內容的掌握程度。

表 4

後測各題之評分標準

得分	作答情形
0	空白未作答、圖上標示完全與解題無關或寫出與題目不相關的答案。
2	能嘗試描述或標示圖形中與解題相關的部份性質。
4	能看出圖形的部份關鍵要素，並以數學語言表達圖形的相關性質。
6	能看出圖形的主要關鍵要素，並以數學語言表達圖形的相關性質。
8	能看出圖形的所有關鍵要素，但在利用數學語言表達時，過程有誤或步驟不足。
10	能根據題目的要求完整且正確地利用所有關鍵要素做說明。

（三）學習效率及學習投入測量工具

有關認知負荷的測量，不易藉由標準化的測量方式獲得，Sweller 等人（2011）認為主觀測量是最常用作量度認知負荷的工具。其中 Paas（1992）建議一個單一比例的心智努力的主觀測量，使用九點制的李克特量表，要求學習者進行自我評價，雖然主觀評定量表不能提供實際時間的同步數據，但上述方式能更有效地獲取學習者的認知負荷感受，並被證實是最敏感的測量工具，可用來區分不同教學程序所產生的認知負荷，且已被廣泛使用（Sweller et al., 2011）。更進一步地，Paas 與 van Merriënboer（1993）分別將代表認知負荷感受的心智努力（mental effort）以及學習表現的原始分數轉化為 Z 分數，以心智努力（R）作為 x 軸，學習表現（P）作為 y 軸，將不同組別的學生的資料以坐標（R, P）描繪在平面坐標系中，用作描述該組別的學習效率（learning efficiency）（E），其中位於直線 $y - x = 0$ 上的點表示學習效率為 0，表示學習者所付出的心智努力與所呈現的學習表現相等。當所付出的心智努力少於學習表現時（E＞0），代表有更好的學習效率；反之，當需要付出較多的心智努力才能獲得相應的學習表現時（E＜0），則代表學習效率不佳。因此學習效率、心智努力以及學習表現可以下面公式表示：

$$E = \frac{R - P}{\sqrt{2}}$$

Paas、Tuovinen、van Merriënboer 與 Darabi（2005）利用類似的方法，以心智努力（R）作為 x 軸，學習表現（P）作為 y 軸，將不同組別的學生的資料以坐標（R, P）描繪在平面坐標系中，用作描述該組別的學習投入（learning involvement）（I）來表示動機面向的探討，其中位於直線 $y + x = 0$ 上的點表示學習投入為 0，即學習者所付出的心智努力與所呈現的學習表現剛好抵消。當所付出的心智努力與學習表現都較多時（I＞0），代表為高的學習投入；反之，當需要

付出的心智努力及學習表現都較少時（I＜0），代表學習者只有較低的學習投入。因此學習投入、心智努力以及學習表現可以下面公式表示：

$$\mathrm{I}=\frac{\mathrm{R}+\mathrm{P}}{\sqrt{2}}$$

藉由上述方式，在探討數學學習成效的同時，也藉著認知負荷感受的測量說明相關教學設計是否給予學習者更好的學習效率以及學習的投入情形。本研究在完成教學實驗後，由學習者填寫九點量表方式回答問題「你覺得要理解這單元的內容，在精神上有多費力？」，代表學習者之心智努力程度，並以後測的得分作為學習表現的指標，將上述分數轉化為 Z 分數後，藉著學習效率及學習投入的數值來探討本研究的學習效果。

四、實驗流程

整個實驗分為三個階段進行共 100 分鐘。第一階段為先備知識測驗，學習者需在 10 分鐘內完成八道圓與切線的相關先備知識問題，所得分數與學習者在八年級上學期三次數學科定期評量測驗之平均分數將分別作為檢測兩組的起始點是否一致的指標。在確定兩組研究對象之成績無顯著差異後，正式進入實驗階段，此階段分為教學及後測兩個部分，在完成教學後學生隨即回答心智努力程度的問題，整個過程約 40 分鐘完成，配合上課時間的安排，於教學實驗後的隔天進行 25 分鐘的後測。第三階段為教學實驗結束的四週之後，利用 25 分鐘完成延後測的評量。

肆、研究結果

一、學習表現分析

表 5 顯示不同「學習成就」與使用不同「元素互動」教材的四組學生，在校內數學定期評量及先備知識測驗成績之描述統計資料。從 Levene 檢定顯示相同學習成就組別之變異數相等，即相同「學習成就」學生分配到使用不同「元素互動」教材的學生起始成績之離散情形並無顯著差異；並利用獨立樣本 t 檢定，結果顯示低學習成就被分配到使用不同互動元素教材組別的學生之定期評量成績，$t(56) = 0.000$，$p > .05$，與先備知識測驗，$t(56) = 0.174$，$p > .05$，以及高學習成就被分配到使用不同互動元素教材的學生之定期評量成績，$t(56) = 0.455$，$p > .05$，與先備知識測驗，$t(56) = 0.219$，$p > .05$，均無顯著差異，因此可視兩組學生所具備的先備知識情況相若。

表 5

各組學生校內數學定期評量、先備知識測驗成績之描述性統計量

		低學習成就			高學習成就		
組別		*n*	*M*	*SD*	*n*	*M*	*SD*
高元素互動	定期評量	29	22.40	9.53	29	53.98	11.44
	先備知識測驗		12.76	12.22		29.66	8.55
低元素互動	定期評量	29	22.40	7.38	29	52.54	12.57
	先備知識測驗		12.24	10.32		29.14	9.47

註：定期評量與先備知識測驗的總得分分別為 100 及 40。

學生分別以「高元素互動」與「低元素互動」教材來學習圓與切線的相關概念後，從他們在後測及延後測的整體結果而言，使用不同元素互動教材學習圓與切線之成效並不相同。以下分別對後測及延後測中各部分作詳細的分析：

（一）實驗教學後之當下學習成果

實驗教學結束後的隔天，進行後測以檢測學生當下之學習成果。後測問卷分為計算及說明題兩部分，表 6 顯示後測各部分的描述性統計資料。從二因子多變量變異數分析結果顯示，Levene 檢定未達顯著性，顯示各組有同質的變異情況；然而，共變量矩陣等式 BOX 檢定達顯著，整體效果的多變量考驗顯示，「學習成就」的 Pillai’s Trace = 0.209，$p < .001$，「元素互動」的 Pillai’s Trace = 0.163，$p < .001$，「學習成就」與「元素互動」交互作用的 Pillai’s Trace = 0.983，$p = .394$。整體而言，「學習成就」與「元素互動」在本研究中沒有顯著的交互作用，但它們各自的主效果皆達顯著。單變量 F 考驗的統計結果顯示，「學習成就」在後測計算題，$F(1,112) = 90.947$, $p < 0.001$, $\eta^2 = .448$，及說明題均達顯著，$F(1,112) = 55.309$, $p < 0.001$, $\eta^2 = .331$，並顯示「學習成就」與各類問題的成績高度相關；同樣地，「元素互動」在後測計算題，$F(1,112) = 19.185$, $p < 0.001$, $\eta^2 = .146$，及說明題也達顯著水平，$F(1,112) = 17.842$, $p < 0.001$, $\eta^2 = .137$，顯示「元素互動」與計算題的成績高度相關，也與說明題達中度相關的效果。意即本研究中使用不同互動元素的教材設計與不同學習成就的學生對於學習圓與切線性質都有顯著不同的效果，由各組平均數得知，使用低元素互動教材的學習效果較佳，高學習成就學生的學習成效較低學習成就學生來得好，顯示對高學習成就的學生，使用低元素互動教材學習也有明顯的助益。

表 6

各組學生後測成績之描述性統計量

		低學習成就			高學習成就		
組別	題型	*n*	*M*	*SD*	*n*	*M*	*SD*
高元素互動	計算題	29	6.07	8.49	29	20.48	7.80
	說明題		5.93	8.34		17.52	10.08
	總分		12.00	16.39		38.00	14.36
低元素互動	計算題	29	11.90	10.16	29	29.24	9.25
	說明題		11.38	11.71		28.21	10.72
	總分		23.28	20.87		57.45	18.69

註：後測總得分為 80 分，計算題及說明題各 40 分。

（二）實驗教學四週後之延遲學習成果

為瞭解研究對象對學習內容的理解情況，於教學實驗結束四週後進行了延後測，該問卷與後測問卷內容相同。表 7 顯示延後測各部分的描述性統計資料。從二因子多變量變異數分析結果顯示，Levene 檢定與共變量矩陣等式 BOX 檢定均達顯著性，顯示各組學生的變異情況有一定的差異。從整體效果的多變量考驗顯示，「學習成就」的 Pillai's Trace = 0.483，$p < .001$，「元素互動」的 Pillai's Trace = 0.205，$p < .001$，「學習成就」與「元素互動」交互作用的 Pillai's Trace = 0.032，$p = .166$。整體而言，「學習成就」與「元素互動」在延後測中沒有顯著的交互作用，但它們各自的主效果皆達顯著。單變量 F 考驗的統計結果顯示，「學習成就」在後測計算題，$F(1,112) = 103.068$, $p < 0.001$, $\eta^2 = .479$，及說明題均達顯著，$F(1,112) = 60.882$, $p < 0.001$, $\eta^2 = .352$，並顯示「學習成就」與各類問題的成績高度相關；同樣地，「元素互動」在後測計算題，$F(1,112) = 20.141$, $p < 0.001$, $\eta^2 = .152$，及說明題也達顯著水平，$F(1,112) = 27.203$, $p < 0.001$, $\eta^2 = .195$，並顯示使用不同元素互動教材對評量成績有高度的關聯。意即本研究中所使用不同「互動元素」的教材與不同「學習成就」的學生對於圓與切線性質學習的理解效果有顯著不同，由各組平均數得知，使用低元素互動教材的學生表現較佳，高學習成就學生的表現也較低學習成就學生來得好。

表 7

各組學生延後測成績之描述性統計量

		低學習成就			高學習成就		
組別	題型	*n*	*M*	*SD*	*n*	*M*	*SD*
高元素互動	計算題	29	4.00	5.83	29	18.00	8.07
	說明題		2.90	4.59		12.62	8.30
	總分		6.90	9.88		30.62	13.14
低元素互動	計算題	29	9.03	8.12	29	27.17	11.21
	說明題		8.34	9.55		24.41	11.65
	總分		17.38	16.97		51.59	21.50

註：延後測總得分為 80 分，計算題及說明題各 40 分。

整體來說，從重複量測變異數分析可見，各變量之間的交互作用均沒有達到顯著水平。高學習成就學生較低學習成就學生有較好的學習成效是可以預期的，$F(1,112) = 94.489, p < .001, \eta^2 = .458$，且使用使用低元素互動教材較高元素互動教材學習的學生有較好的表現，$F(1,112) = 26.185, p < .001, \eta^2 = .189$，學習成就的高低與不同的元素互動教材與成績之間均是高度相關。然而，對不同學習成就的學生來說，使用低元素互動教材學習圓與切線概念時雖能較高元素互動教材然有較好的學習成效，但在四週後的評量中，兩種互動教材的使用者表現均有顯著下降的趨勢，$F(1,112) = 61.225, p < .001$。說明上述的教材設計對幫助概念保留的情況還不夠理想，且減退的情況各組相若，但從延後測總分看來，使用低元素互動教材的高學習成就學生仍能正確回答超過一半的評量問題，教學效果符合預期。

二、學習效率及學習投入分析

各組學生在完成教學實驗後，各人以填寫九點量表的方式，表達自身對理解圓與切線性質的內容，在精神上感覺需要費力的程度，表 8 顯示各組學生花費心力感受之描述性統計資料。單變量 F 考驗的統計結果顯示，Levene 檢定未達顯著，顯示各組之間有同質的變異情況；「學習成就」與「元素互動」的交互作用未達顯著，$F(1,112) = 2.582, p = .111$，顯示不同學習成就學生以不同的互動教材在學習圓與切線性質時，其花費心力感受大致相同。對於不同「學習成就」的學生，其花費心力的感受沒有顯著差異，$F(1,112) = 5.388, p = .083$，說明他們學習相關概念需要花費的心力相若；然而，「元素互動」則達顯著差異，$F(1,112) = 6.683, p = .011, \eta^2 = .056$，與花費心力感受呈中度相關。顯示使用不同的學習教材，學生所感受到要花費心力的程度不太相同，從各組的平均數得知，以低元素互動教材學習的學生，不管是對哪一種學習成就的學生，他們所花費的心力都顯示較使用高元素互動教材學習的學生少。

表 8

各組學生在花費心力感受之描述性統計量

	低學習成就			高學習成就		
組別	*n*	*M*	*SD*	*n*	*M*	*SD*
高元素互動	29	4.45	1.50	29	4.41	1.48
低元素互動	29	4.21	1.05	29	3.38	1.24

註：感受程度為 1-9 分，9 分代表非常費力。

將學生之後測總分及花費心力感受轉化為 Z 分數後，根據 Paas 與 van Merriënboer（1993）以及 Paas 等人（2005）分別換算出學習效率（E）和學習投入（I）的分數，如表 9 所示。再以各組的後測總平均分為 *x* 坐標，各組花費心力平均感受為 *y* 軸，各組的學習效率與學習投入情況如圖 1 所示。綜合學習效率及學習投入分數，可得知使用低元素互動教材的高學習成就學生屬高效率高投入，而使用高元素互動教材的高學習成就學生，他們的學習效率一般但屬於高投入的學習，而對於低學習成就的學生來說，不管使用哪一種教材，他們都只能產生低效率低投入的學習。由圖 1 的分析可見，低元素互動的教材可以讓學習者有較高的學習效率及學習投入，即使對學習成就較低的學生而言，同樣會有較好的學習效率及投入情況。

表 9

不同組別及學習成就學生之學習效率與學習投入分數

組別	學習成就	$Z_{\text{後測總分}}$	$Z_{\text{花費心力}}$	學習效率	學習投入
高元素互動	低	-0.85	0.24	-0.77	-0.42
	高	0.22	0.22	-0.00	0.31
低元素互動	低	-0.38	0.07	-0.32	-0.22
	高	1.01	-0.53	1.09	0.34

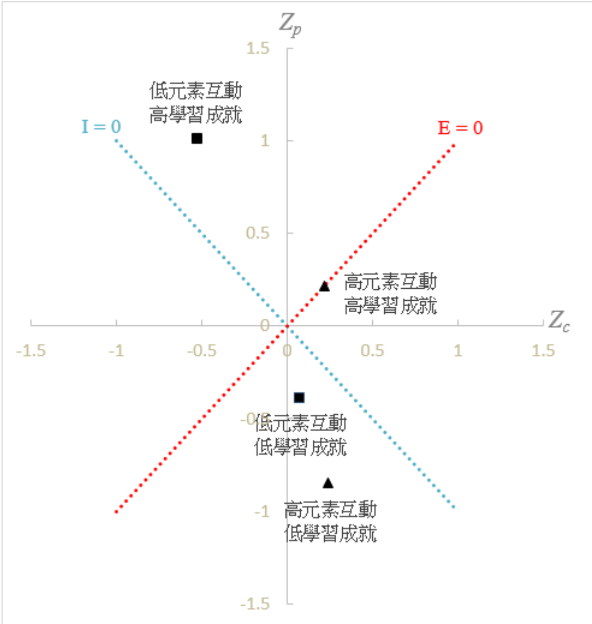


圖 1　學習效率與學習投入分數圖。E 表示學習效率；I 表示學習投入；*Zp* 表示標準化後之花費心力；*Zc* 表示標準化後之後測總分。

伍、討論與建議

本研究使用元素逐步呈現的教學設計，配合老師的口語引導來呈現圓與切線性質的教學內容，藉著控制每次圖形呈現元素量的教學方式，探討在幾何教學中對不同學習成就學生之學習成效的影響。由研究結果顯示，每次能呈現較少的圖形元素，以產生低元素互動效果的教學設計，對不同學習成就的學生，都帶來正面的學習效果、有較高的學習效率及投入的情況；並且對高學習成就學生來說，沒有因為過於細部的切割而產生了反效果，說明對圖形的概念作區塊化的切割方式，能幫助降低學習者的認知負荷從而增加學習成效，對不同學習成就的學生都是重要的教學設計參考。因為根據多媒體學習的認知理論（Mayer, 2005, 2009）的假設，個體需要將從不同通道進來的訊息作有意義的整合才能產生理解，在整合的過程中，視覺必須快速搜尋與聽覺接收匹配的資訊，因此個體的先備知識是意義產生的主要來源，也是對於不同學習成就的學生，他們的學習表現常都有顯著差異的主要原因。如果在先備知識大致相同的前提下，有效地幫助視覺搜尋重要的資訊則成為影響學習成效的關鍵。因此，根據多媒體教學設計原則來呈現版面的基本內容外，將幾何圖形的元素作區塊化處理，並以逐步呈現的方式讓學習者聚焦在重要元素上，因減少工作記憶區同時處理的元素量而有助於資訊作有意義的整合，是增加學習成效的主要原因。

從本研究結果可知，低元素互動的設計，有助於掌握當下視覺與聽覺所接受的知識內容，也讓學習者感到只需要花費較少的心力，就能理解相關的學習內容。學習效率及學習投入目前

是以學習者的自我感受為依據，以九點量表方式量化個人所投入的心智努力，其代表性以及研究方法上都有討論的空間，在未來研究中可考慮作進一步的探討。本研究先以圓切線性質為例，探討低元素互動之教學設計之學習成效，這樣的設計理念應可作為設計幾何教學的參考依據，進一步探討使用上述設計在教學現場長期實施的教學成效。然而，使用低元素互動教材進行學習雖然有一定的幫助，但學習成效在延後測中呈現減退現象，減退程度與利用高元素互動教材學習的學生相若，說明這樣的學習方式雖有助於幫助學習者作資訊的整合及組織，但對於形成長期記憶區中的知識，還必須借助其他輔助策略來達成。就如 Jamet 等人（2008）的研究中也有透露類似的情況，他們設計以顏色改變來引導學習者一步一步理解人類大腦的各個部分，研究結果顯示對於記憶保留的問題均有不錯的學習成效，但對於處理遠遷移的問題時，上述的設計則無法顯現出顯著的學習成效。本研究所使用的任務都是屬於對學習內容記憶保留的問題，或屬於將概念作近遷移的計算問題，未來研究一方面可以討論上述設計在遠遷移問題上的學習成效，另一方面在配合低元素互動的教材設計下，未來可考慮透過增加練習（van Gog & Kester, 2012）、後設認知的提問（Mevarech & Kramarski, 2003）、反思題目的結構表徵（Richland & Hansen, 2013）等方式來增強概念保留及概念應用的效果，都是進一步研究中教學設計的參考依據。

透過多媒體的輔助，為教學設計提供多元化呈現的有效平台。從多媒體設計原則，教學設計時要避免加入干擾學習的多餘資訊，然而，對於內在認知負荷的處理，更需要教學設計者根據內容及學習者特性，將資訊有效地展示出來。認知負荷理論與多媒體設計原則較多是考慮對知識結構或呈現順序的改變（如作合適的分段或切割），旨在資訊進入學習者的感官前如何作合適的處理，而較少考慮當資訊進入感官後是否能藉著多媒體的輔助來幫助學習。從研究結果發現，對含有複雜資訊的幾何內容，即使配合教師的口語引導，也未必能同時完整地掌握所有資訊。雖然使用顏色、閃爍等方式作為突顯資訊的信號，是有效幫助學習者選取資訊的方法（Mayer, 2009），然而當畫面同一時間顯示大量資訊時，要如何對突顯資訊作有效的組織，卻不是一件顯然易見的事情。本研究結果給予呈現教學內容的參考設計，包括：（1）對逐步呈現的資訊區塊化：教學設計者需要透過對數學概念的理解，將整個概念切割為只包含少量元素的有意義組織；（2）提供視覺與聽覺資訊連結適當的瀏覽空間：在陳述概念時以最簡潔的圖形為開始，如同一步一步地建構知識，相應元素應以累加的方式呈現；（3）使用視覺引導的提示：利用顏色改變或突然出現的方式引導視覺搜尋，配合口語引導以幫助學習者作有效的配對。其中 PowerPoint 簡報軟體為資訊逐步呈現提供有效快速的設計環境，搭配 AMA 外掛增益集能處理國中幾何內容與圖形相關的主要概念，建議在使用多媒體進行幾何教學設計時多加利用，而非在投影片的頁面上呈現問題及解答的簡報功能。

很多學科的學習都會配合圖示來輔助說明，而相關圖示常都含有複雜的資訊，因此會藉著動畫、顏色的變化、加入箭頭指示重點等方式，來突顯學習者需要注意的資訊內容。然而，幾何圖形的結構會被認為是複雜的，多半源自圖形從簡單線條所構成卻可以分割成很多不同的子圖，它們很多時候卻是相互重疊且在不同子圖中扮演著不同的角色，而有效的子圖分割將是解題的關鍵（Duval, 1998）。因此，幾何單元很適合將各圖像元素以逐步呈現的方式來進行教學設計，來達到突顯特定子圖及其結構的目的。如同 Luzón 與 Letón（2015）在解說簡單機率問題的設計一樣，向學習者展示解題的局部到整體的發展過程，較一次呈現所有解題內容再一步一步進行解說有較好的學習成效，這樣的設計在引導學習者注意力以降低他們在選取及組織資訊中的認知負荷有一定的幫助。未來研究針對幾何圖形從局部發展到整體的突顯方式，與在整體圖形上再以顏色或明暗來突顯元素的方式可作進一步的探討比較，為幾何教學的設計將能提供更明確的參考指引。

誌謝

本文為科技部專題研究計畫（計畫編號：MOST-101-2511-S-009-006-MY2 及 MOST 104-2511-S-009-004-MY2）的部份研究成果，在此感謝科技部之補助。

參考文獻

左台益（主編）（2012）。**國民中學數學第五冊**。臺南：南一。【Tso, T. Y. (Ed.). (2012). *Junior high school mathematics book 5*. Tainan, Taiwan: Nani. (in Chinese)】

教育部（2008）。**97 年國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。臺北：作者。【Taiwan Ministry of Education. (2008). *General guidelines of grade 1-9 curriculum of elementary and junior high school education for mathematics learning area*. Taipei, Taiwan: Author. Retrieved from http://teach.eje.edu.tw/9CC/index_new.php (in Chinese)】

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *34*(3), 66-72. doi: 10.1007/BF02655708

Atkinson, R. K. (2002). Optimizing learning from examples using animated pedagogical agents. *Journal of Educational Psychology*, *94*(2), 416-427. doi: 10.1037//0022-0663.94.2.416

Ayres, P. (2006). Impact of reducing intrinsic cognitive load on learning in mathematical domain. *Applied Cognitive Psychology*, *20*, 287-298. doi: 10.1002/acp.1245

Ayres, P. (2013). Can the isolated-elements strategy be improved by targeting points of high cognitive load for additional practice? *Learning and Instruction*, *23*, 115-124. doi: 10.1016/j.learninstruc.2012.08.002

Ayres, P., & Sweller, J. (2005). The split-attention principle in multimedia learning. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (pp. 135-146). New York, NY: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511816819.009

Baddeley, A. (1992). Working memory. *Science*, *255*, 556-559. doi: 10.1126/science.1736359

Bodemer, D., Ploetzer, R., Feuerlein, I., & Spada, H. (2004). The active integration of information during learning with dynamic interactive visualisations. *Learning and Instruction*, *14*(3), 325-341. doi: 10.1016/j.learninstruc.2004.06.006

Bostic, J., & Pape, S. (2010). Examining students' perceptions of two graphing technologies and their impact on problem solving. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *29*(2), 139-154.

Boucheix, J. M., & Lowe, R. K. (2010). An eye tracking comparison of external pointing cues and internal continuous cues in learning with complex animations. *Learning and Instruction*, *20*, 123-135. doi: 10.1016/j.learninstruc.2009.02.015

Broadbent, D. E. (1958). *Perception and Communication*. New York, NY: Pergamon Press. doi: 10.1037/10037-000

Carroll, W. M. (1994). Using worked examples as an instructional support in the algebra classroom. *Journal of Educational Psychology*, *86*(3), 360-367. doi: 10.1037//0022-0663.86.3.360

Chandler, P., & Sweller, J. (1996). Cognitive load while learning to use a computer program. *Applied Cognitive Psychology*, *10*, 151-170. doi: 10.1002/(SICI)1099-0720(199604)10:2<151::AID-ACP380>3.0.CO;2-U

Clarke, T., Ayres, P., & Sweller, J. (2005). The impact of sequencing and prior knowledge on learning mathematics through spreadsheet applications. *Educational Technology Research and Development*, *53*(3), 15-24. doi: 10.1007/BF02504794

Craig, S. D., Gholson, B., & Driscoll, D. M. (2002). Animated pedagogical agents in multimedia educational environments: Effects of agent properties, picture features and redundancy. *Journal of Educational Psychology*, *94*(2), 428-434. doi: 10.1037//0022-0663.94.2.428

Crooks, S. M., Cheon, J., Inan, F., Ari, F., & Flores, R. (2012). Modality and cueing in multimedia learning: Examining cognitive and perceptual explanations for the modality effect. *Computers in Human Behavior*, *28*, 1063-1071. doi: 10.1016/j.chb.2012.01.010

de Jong, T. (2010). Cognitive load theory, educational research, and instructional design: Some food for thought. *Instructional Science*, *38*(2), 105-134. doi: 10.1007/s11251-009-9110-0

de Koning, B. B., Tabbers, H. K., Rikers, R. M. J. P., & Paas, F.(2010). Learning by generating vs. receiving instructional explanations: Two approaches to enhance attention cueing in animations. *Computers & Education*, *55*, 681-691. doi: 10.1016/j.compedu.2010.02.027

Driver, J. (2001). A selective review of selective attention research from the past century. *British Journal of Psychology*, *92*, 53-78. doi: 10.1348/000712601162103

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland & J. Mason (Eds), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142-157). Berlin, Germany: Springer.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Gerjets, P., Scheiter, K., & Catrambone, R. (2006). Can learning from molar and modular worked examples be enhanced by providing instructional explanations and prompting self-explanations? *Learning and Instruction*, *16*, 104-121. doi: 10.1016/j.learninstruc.2006.02.007

Graig, S. D., Gholson, B., & Driscoll, D. M. (2002). Animated pedagogical agents in multimedia educational environments: Effects of agent properties, picture features, and redundancy. *Journal of Educational Psychology*, *94*(2), 428-434. doi: 10.1037//0022-0663.94.2.428

Guven, B. (2012). Using dynamic geometry software to improve eight grade students' understanding of transformation geometry. *Australasian Journal of Educational Technology*, *28*(2), 364-382. doi: 10.14742/ajet.878

Hoffman, J. E. (1979). A two-stage model of visual search. *Perception & Psychophysics*, *25*(4), 319-327. doi: 10.3758/BF03198811

Hong, W., Thong, J. Y. L., & Tam, K. Y. (2004). Does animation attract online users' attention? The effects of flash on information search performance and perceptions. *Information Systems Research*, *15*(1), 60-86. doi: 10.1287/isre.1040.0017

Hu, F. T., Ginns, P., & Bobis, J. (2014). Does tracing worked examples enhance geometry learning? *Australian Journal of Educational & Developmental Psychology*, *14*, 45-49.

Hu, F. T., Ginns, P., & Bobis, J. (2015). Getting the point: Tracing worked examples enhances learning. *Learning and Instruction*, *35*, 85-93. doi: 10.1016/j.learninstruc.2014.10.002

Jamet, E. (2014). An eye-tracking study of cueing effects in multimedia learning. *Computers in Human Behavior*, *32*, 47-53. doi: 10.1016/j.chb.2013.11.013

Jamet, E., Gavota, M., & Quaireau, C. (2008). Attention guiding in multimedia learning. *Learning and Instruction*, *18*, 135-145. doi: 10.1016/j.learninstruc.2007.01.011

Jeung, H. J., Chandler, P., & Sweller, J. (1997). The role of visual indicators in dual sensory mode instruction. *Educational Psychology*, *17*(3), 329-343. doi: 10.1080/0144341970170307

Kalyuga, S., & Sweller, J. (2004). Measuring knowledge to optimize cognitive load factors during instruction. *Journal of Educational Psychology*, *96*(3), 558-568. doi: 10.1037/0022-0663.96.3.558

Kester, L., Kirschner, P. A., & van Merriënboer, J. J. G. (2006). Just-in-time information presentation: Improving learning a troubleshooting skill. *Contemporary Educational Psychology*, *31*, 167-185. doi: 10.1016/j.cedpsych.2005.04.002

Leahy, W., & Sweller, J. (2005). Interactions among the imagination, expertise reversal, and element interactivity effects. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, *11*(4), 266-276. doi: 10.1037/1076-898X.11.4.266

Lee, C. Y., & Chen, M. J. (2016). Developing a questionnaire on technology-integrated mathematics instruction: A case study of the AMA training course in Xinjiang and Taiwan. *British Journal of Educational Technology*, *47*(6), 1287-1303. doi: 10.1111/bjet.12339

Liu, Y. (2012). Effects of integrating multimedia into the third grade mathematics curriculum to improve student learning. *Journal of Educational Technology Systems*, *43*(3), 251-271. doi: 10.2190/ET.40.3.c

Luzón, J. M., & Letón, E. (2015). Use of animated text to improve the learning of basic mathematics. *Computers & Education*, *88*, 119-128. doi: 10.1016/j.compedu.2015.04.016

Mautone, P. D., & Mayer, R. E. (2001). Signaling as a cognitive guide in multimedia learning. *Journal of Educational Psychology*, *93*(2), 377-389. doi: 10.1037//0022-0663.93.2.377

Mayer, R. E. (2001). *Multimedia learning*. New York, NY: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139164603

Mayer, R. E. (2005). Cognitive theory of multimedia learning. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (pp. 31-48). New York, NY: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511816819.004

Mayer, R. E. (2009). *Multimedia learning* (2nd ed.). New York, NY: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511811678

Mayer, R. E., & Johnson, C. I. (2008). Revising the redundancy principle in multimedia learning. *Journal of Educational Psychology*, *100*(2), 380-386. doi: 10.1037/0022-0663.100.2.380

Mayer, R. E., Mathias, A., & Wetzell, K. (2002). Fostering understanding of multimedia messages through pre-training: Evidence for a two-stage theory of mental model construction. *Journal of Experimental Psychology: Applied*. *8*(3), 147-154. doi: 10.1037//1076-898X.8.3.147

Mayer, R. E., & Moreno, R. (2003). Nine ways to reduce cognitive load in multimedia learning. *Educational Psychologist*, *38*(1), 43-52. doi: 10.1207/S15326985EP3801_6

Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (2003). The effects of metacognitive training versus worked-out examples on students' mathematical reasoning. *British Journal of Educational Psychology*, *73*, 449-471. doi: 10.1348/000709903322591181

Miller, G. A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, *63*(2), 81-97. doi: 10.1037/h0043158

Mousavi, S. Y., Low, R., & Sweller, J. (1995). Reducing cognitive load by mixing auditory and visual presentation modes. *Journal of Educational Psychology*, *87*(2), 319-334. doi: 10.1037//0022-0663.87.2.319

Muhanna, W. (2012). The effectiveness of web-based curricula on seventh grade mathematics students in Jordan. *Journal of College Teaching & Learning*, *9*(4), 267-276. doi: 10.19030/tlc.v9i4.7297

Müller, H. J., & Krummenacher, J. (2006). Visual search and selective attention. *Visual Cognition*, *14*, 389-410. doi: 10.1080/13506280500527676

Neisser, U. (1967). *Cognitive psychology*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Ogochukwu, N. V. (2010). Enhancing students interest in mathematics via multimedia presentation. *African Journal of Mathematics and Computer Science Research*, *3*(7), 107-113.

Paas, F. G. W. C. (1992). Training strategies for attaining transfer of problem-solving skill in statistics: A cognitive-load approach. *Journal of Educational Psychology*, *84*(4), 429-434. doi: 10.1037//0022-0663.84.4.429

Paas, F. G. W. C., Tuovinen, J. E., van Merriënboer, J. J. G., & Darabi, A. A. (2005). A motivational perspective on the relation between mental effort and performance: Optimizing learner involvement in instruction. *Educational Technology Research and Development*, *53*(3), 25-34. doi: 10.1007/BF02504795

Paas, F. G. W. C., & van Merriënboer, J. J. G. (1993). The efficiency of instructional conditions: An approach to combine mental effort and performance measures. *Human Factors: The Journal of the Human Factors and Ergonomics Society*, *35*(4), 737-743.

Pashler, H. (1988). Cross-dimensional interaction and texture segregation. *Perception & Psychophysics*, *43*(4), 307-318. doi: 10.3758/BF03208800

Pollock, E., Chandler, P., & Sweller, J. (2002). Assimilating complex information. *Learning and Instruction*, *12*, 61-86. doi: 10.1016/S0959-4752(01)00016-0

Ragasa, C. Y. (2008). A comparison of computer-assisted instruction and the traditional method of teaching basic statistics. *Journal of Statistics Education*, *16*(1). Retrieved from http://www.amstat.org/publications/jse/v16n1/ragasa.pdf

Renkl, A. (2005). The worked-out examples principle in multimedia learning. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (pp.229-245). New York, NY: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511816819.016

Richland, L. E., & Hansen, J. (2013). Reducing cognitive load in learning by analyogy. *International Journal of Psychological Studies*, *5*(4), 69-80. doi: 10.5539/ijps.v5n4p69

Rummer, R., Schweppe, J., Fürstenberg, A., Scheiter, K., & Zindler, A. (2011). The perceptual basis of the modality effect in multimedia learning. *Journal of Experimental Psychology: Applied*. *17*(2), 159-173. doi: 10.1037/a0023588

Scheiter, K., Gerjets, P., & Catrambone, R. (2006). Making the abstract concrete: Visualizing mathematical solution procedures. *Computers in Human Behavior*, *22*, 9-25. doi: 10.1016/j.chb.2005.01.009

Schmidt-Weigand, F., Kohnert, A., & Glowalla, U. (2010). A closer look at split visual attention in system- and self-paced instruction in multimedia learning. *Learning and Instruction*, *20*, 100-110. doi: 10.1016/j.learninstruc.2009.02.011

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science*, *12*, 257-285. doi: 10.1016/0364-0213(88)90023-7

Sweller, J. (1994). Cognitive load theory, learning difficulty, and instructional desegn. *Learning and Instruction*, *4*, 295-312. doi: 10.1016/0959-4752(94)90003-5

Sweller, J. (2010). Element interactivity and intrinsic, extraneous, and germane cognitive load. *Educational Psychology Review*, *22*, 123-138. doi: 10.1007/s10648-010-9128-5

Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive load theory*. New York, NY: Springer. doi: 10.1007/978-1-4419-8126-4

Sweller, J., & Chandler, P. (1994). Why some material is difficult to learn. *Cognition and Instruction*, *12*(3), 185-233. doi: 10.1207/s1532690xci1203_1

Sweller, J., Chandler, P., Tierney, P., Cooper, M. (1990). Cognitive load as a factor in the structuring of technical material. *Journal of Experimental Psychology: General*, *119*(2), 176-192. doi: 10.1037/0096-3445.119.2.176

Sweller, J., & Cooper, G. A. (1985). The use of worked examples as a substitute for problem solving in learning algebra. *Cognition and Instruction*, *2*(1), 59-89. doi: 10.1207/s1532690xci0201_3

Treisman, A. (1986). Features and objects in visual processing. *Scientific American*, *255*(5), 114-125. doi: 10.1038/scientificamerican1186-114B

Treisman, A. M., & Gelade, G. (1980). A feature-integration theory of attention. *Cognitive Psychology*, *12*, 97-136. doi: 10.1016/0010-0285(80)90005-5

van Gog, T., & Kester, L. (2012). A test of the testing effect: Acquiring problem-solving skills from worked examples. *Cognitive Science*, *36*, 1532-1541. doi: 10.1111/cogs.12002

Wolfe, J. M. (1998). Visual search: A review. In H. Pashler (Ed.), *Attention* (pp. 13-77). London, UK: University College London Press.

Yantis, S., & Jonides, J. (1984). Abrupt visual onsets and selective attention: Evidence from visual search. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *10*(5), 601-621. doi: 10.1037//0096-1523.10.5.601

Yantis, S., & Jonides, J. (1990). Abrupt visual onsets and selective attention: Voluntary versus automatic allocation. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *16*(1), 121-134. doi: 10.1037/0096-1523.16.1.121

Liu, C. Y., & Chin, E. T. (2016).
Developing eleventh graders' conjecturing and justifying power on generalization of binary number patterns.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *3*(2), 31-53.
doi: 10.6278/tjme.20161005.002

Developing Eleventh Graders' Conjecturing and Justifying Power on Generalization of Binary Number Patterns

Chih-Yen Liu [1] Erh-Tsung Chin [2]

[1] Mathematics Teaching and Research Center Graduate Institute of Science Education, National Chunghua University of Education

[2] Graduate Institute of Science Education, National Chunghua University of Education

This study is due to investigate five eleventh graders of how they developing conjecturing and justifying power in the context of binary number pattern-finding problems. The framework of the research is situated in the social perspective which considers that the development of students' conjecturing and justifying power should be much relied on interactions, dialogues and argumentations within peers. Qualitative case study design and analysis strategy is adopted in the study for constructing a holistic viewpoint of students' mathematical conjecturing and justifying behavior. Research results show that students' inherent capabilities could be revealed when they are engaged in an atmosphere of conjecturing. Besides, students could not only apply specializing and generalizing strategies flexibly but also propose impressive justifications to make others convinced during the process of conjecturing. All of the findings seem to imply that relational understanding is crucial for students to develop their conjecturing and justifying power.

Keywords: conjecturing, generalizing, mathematical inquiry, specializing

Corresponding author：Chih-Yen Liu，e-mail：unique.cs@msa.hinet.net
Received：29 February 2016;
Accepted：5 October 2016.

劉致演、秦爾聰（2016）。
發展十一年級學生臆測及辯證能力—以二進位數字樣式探究活動為例。
臺灣數學教育期刊，**3**（2），31-53。
doi: 10.6278/tjme.20161005.002

發展十一年級學生臆測及辯證能力ー以二進位數字樣式探究活動為例

劉致演[1]　　秦爾聰[2]

[1]國立彰化師範大學科學教育研究所中等數學教學研究中心

[2]國立彰化師範大學科學教育研究所

本研究針對五位十一年級學生參與為期四週的課外數學探究活動進行觀察，藉以了解學生如何在解決數字樣式問題的過程中發展臆測及辯證能力。研究架構以社會學習面向為基礎，主要考量學生的臆測及辯證能力發展於同儕間之互動、對話與論證等學習行為。另本研究以個案研究為主進行資料蒐集及分析，從而瞭解學生數學臆測及辯證學習行為發展過程。研究結果顯示，學生在臆測情境氛圍中能夠有機會揭露並發展內在的數學能力，此外，學生在數學臆測的過程中不僅能彈性運用特殊化及一般化策略，更能提出令人驚豔的說明為其數學想法進行辯證。根據研究發現「關係式理解」對於學生臆測及辯證能力之發展至為關鍵。

關鍵詞：臆測、一般化、數學探究、特殊化

通訊作者：劉致演，e-mail：unique.cs@msa.hinet.net
收稿：2016 年 2 月 29 日；
接受刊登：2016 年 10 月 5 日。

I. Introduction

“Teaching to the test” is a globally common phenomenon of classroom teaching. In Taiwan, performance of paper and pencil tests of mathematics might still be the only way for assessing students’ achievements so far. Although Taiwanese students’ mathematical performance in TIMSS 2011 was remarkable, we still face the dilemma that high achievers were possessing non-positive attitudes towards mathematics learning (Martin, Mullis, Foy, & Stanco, 2012). Recently, the concept of “flipped classroom” is conceived as a promising thought of teaching approach. Such approach supports instructors playing their most important role of guiding their students to thinking deeply. Therefore, the student role could be shifted from a passive recipient to an active constructor of knowledge. This inspiration seems to echo the spirit of inquiry-based classroom. When students are engaged in inquiry activities, they could learn mathematics by means of “doing” autonomously, such as solving challenging problems, exploring relationships and patterns, forming conjectures and examining it, and communicating mathematical thoughts to others (Baroody & Coslick, 1993). Besides, teaching of mathematics should help students think actively and build new mathematical knowledge through problem solving. In particular, teacher’s role in choosing worthwhile problems and mathematical tasks is crucial (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). In addition, inquiry teaching could enhance mathematics understanding and thinking (Fennema, et al., 1996; Wood & Seller, 1997). Furthermore, it could foster students’ creativity and ability of problem solving (Kwon, Park, & Park, 2006). Apart from that, there are four features for a tendency towards reform in mathematics teaching and learning in which are rich mathematical tasks, relating mathematics to real life experience and practices, learner-centered practice, and inquiry-based classrooms (Adler & Lerman, 2003). While inquiry based approaches have been drawing much attention in recent years globally, it is clear that conjecturing plays a crucial role in mathematical inquiry (Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid, & Yevdokimov, 2007). Moreover, “communication can support students’ learning of new mathematical concepts as they act out a situation, draw use objects, give verbal accounts and explanations, use diagrams, write and use mathematical symbols” (NCTM, 2000, p. 61). Lin (2006) proposes that a good lesson must provide opportunities for learners to think and construct their own knowledge actively, and “conjecturing” might be the important strategy for involving learners to do so. It is not merely the core of mathematizing, but the driving force for mathematical proficiency. In short, we are inspired by synthesizing these remarkable insights and try to organize a study to see how students develop conjecturing and justifying power actively in an inquiry-based classroom. Consequently, two research questions are proposed: (1) How do students apply conjecturing thinking for solving problems? (2) How do students develop conjecturing and justifying power when they are engaged in the number pattern generalizing activity?

II. Theoretical backgrounds

1. Mathematical inquiry

Recently, both science and mathematics learning standards focus on their attention of inquiry for either promoting students to construct knowledge actively in process of problem solving, reasoning, and communication or encouraging students to explore patterns and relationships in data analysis, formulating conjectures, logic thinking and solving non-routine problems. (American Association for the Advancement of Science [AAAS], 1990, 1993; NCTM, 1989, 2000; National Research Council [NRC], 1989). “Doing mathematics” should be considered as an inquiry process in mathematics learning. In order to develop mathematical thinking and the autonomy to solve challenging mathematical problems, students need to “do mathematics” (NCTM, 1989, 2000; NRC, 1989). Moreover, doing mathematics entails solving challenging problems, exploring patterns, formulating conjectures and examining them out, drawing conclusions and communication ideas, patterns, conjectures, conclusions and reasons (Baroody & Coslick, 1993). In brief, mathematical inquiry encourages students to construct mathematical knowledge actively and it must be underpinned by stances of constructivism. One of the hypotheses of constructivism is that knowledge is actively constructed by the cognizing subject, not passively received from the environment (Kilpatrick, 1987). Somehow, mathematical knowledge is not always constructed radically. Instead, sociocultural approaches contend that human thinking is inherently social in its origins (Kieran, Forman, & Sfard, 2001). Elbers (2003) replies the ideas with social perspective, he considers that when students are engaged in a community of inquiry, they could freely interact and collaborate with each other, and might have ample opportunities to make their own mathematical constructions and to discuss them in a social process of reflection. Empirical study result stands for these arguments as well. For example, Francisco (2013) holds a study with a group of six high school students working together on a challenging probability task as part of a larger, after-school, longitudinal study on students' development of mathematical ideas in problem-solving settings. The result shows that social settings, especially, collaborative activities can help promote students' mathematical understanding by providing opportunities for students to critically reexamine how they make claims from facts and also enable them to build on one another's ideas to construct more sophisticated ways of reasoning.

2. Conjecturing and justifying

Conjecturing is an important part of an inquiry based approach (Cañadas, et al., 2007). Especially when individual confronts contexts of problems, he/she will actively propose conjectures, later, testing the conjectures, seeking counter examples for refuting it, and generalizing patterns of problems from systematical specializing strategy (Lakatos, 1976, 1978; Mason, 2002; Mason, Burton, & Stacey, 2010; Polya, 1954). Lakatos (1976, 1978) advocates that mathematics is quasi-empirical as he thinks that mathematics is a dialogue when people negotiate with it. In addition, mathematics is not flawless, it always needs to be renegotiated or reconstructed when facing possible challenges or much more stringent criteria. Lakatos concludes that theoretical knowledge can be established in the process of conjecturing and refutation. Mason and Johnston-Wilder (2004, p.141) argue that “mathematicians rarely solve the initial problems they set themselves. Most often they specialize, they conjecture, they modify and remodify until they find a problem they can do”. Above all, it is reasonable to acknowledge that conjecturing is an ongoing process which is built on specializing and generalizing as an ascent and descent (Polya, 1954). As a result, Mason et al. (2010) propose an idea to describe the conjecturing process. They consent that the process of conjecturing hinges on being able to recognize a pattern, or depending on being able to make a generalization. In short, the conjecturing process could be described as a cyclic process of articulating a conjecture, checking the conjecture, refuting/accepting the conjecture, and recognizing the pattern (see figure 1).

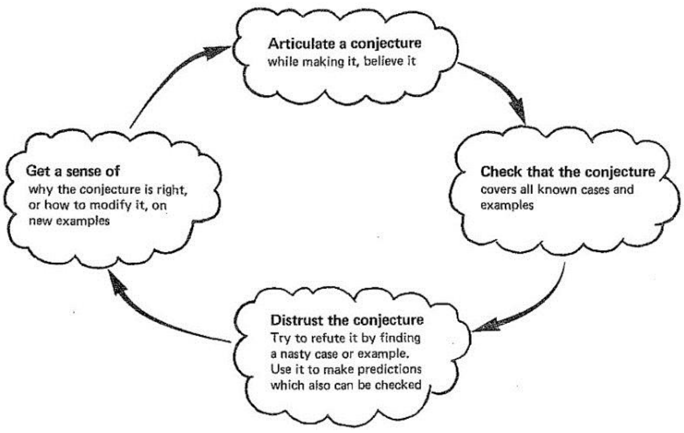


Figure 1 Conjecturing process. Reprinted from *Thinking mathematically* (p. 59), by J. Mason, L. Burton, & K. Stacey, 2010, Harlow, UK: Pearson Education Limited.

Moreover, generalizing and specializing are the two sides of a coin, in accordance with this view point, Mason (2002) points out two perceptions particularly, which are seeing the particular in the general and seeing the general through the particular. In addition, mathematics is perceived as the science of pattern and relationship. Consequently, exploring patterns, relations and functions is an essential focus of mathematics learning (AAAS, 1990; NTCM, 2000). Actually, generalizations are both objects for individual thinking and means for communication (Dörfler, 1991). For that reason, pattern-finding tasks in generalization can be considered as an important activity for getting students involved in a conjecturing atmosphere. Mason et al. (2010) synthesize these viewpoints, they think that specializing and generalizing are the backbone of the conjecturing process. Particularly, the problem solving phases, such as "entry", "attack", and "review" are owed much on specializing and generalizing (see figure 2). In addition, they see the "attack" phase is very much related to justifying and convincing, and it is also a crucial phase to seeing structural links.

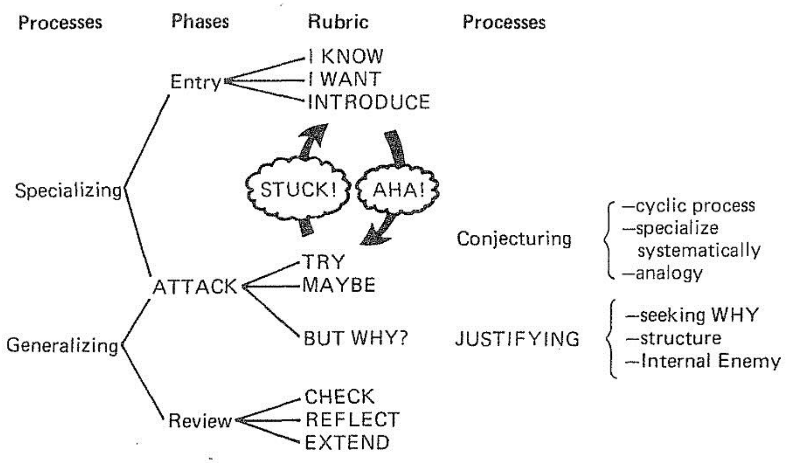


Figure 2 Backbone of conjecturing. Reprinted from *Thinking mathematically* (p. 77 & 95), by J. Mason, L. Burton, & K. Stacey, 2010, Harlow, UK: Pearson Education Limited.

Despite that the significance of conjecturing has been recognized by plenty of researchers (Davis, Hersh, & Marchisotto, 1995; Lakatos, 1976, 1978; Mason, et al., 2010), it could be recognized that evolving a conjecturing process in patterning approaches is one thing, justifying it for convincing others is quite another; even when students are able to generalize a pattern or a rule, few are able to explain why it occurs (Coe & Ruthven, 1994). Since that once you find the pattern, you need to state it carefully and clearly to convince yourself, convince a friend, and even to convince a skeptic (Mason et al., 2010). Mason (2002) further states that once a conjecture is made, it needs to be challenged, justified, and possibly reconstructed. Blanton and Kaput (2002) propose that justification induces a habit of mind whereby conjectures in order to establish a generalization. Moreover, Stylianides (2007) concludes that justifying is using statements accepted by the classroom community and employs forms of reasoning that are valid and known to classroom community, as well as it is communicated with forms of expression that are appropriate and known to the classroom community. Consequently, conjecturing accommodates fruitful opportunities for reasoning in behalf of justifying conjectures. As a result, Zack and Graves (2001) adopt a sociocultural perspective to investigate discourse and its role in how children and teachers make meaning of mathematics in a fifth grade inquiry-based classroom for exploring the relationship between discourses and knowing Therefore, "participating in a conjecturing atmosphere in which everyone is encouraged to construct extreme and paradigmatic examples, and to try to find counter-examples involves learners in thinking and constructing actively" (Mason & Johnson-Wilder, 2004, p.142). To sum up, when students are engaged in the context of inquiry-based conjecturing activity, they need to articulate the conjecture and specialize the conjecture systematically to validate it. Furthermore, they also have to propose an effective pattern based on the process of generalization to persuade themselves and others clearly and carefully. Even more, if the situation becomes complicated, they need to build on specializing and generalizing as an ascent and descent, in an ongoing process of conjecturing.

III. Methodology

1. Research setting

This study is conducted for developing eleventh students' conjecturing and justifying power on pattern-finding problems. Since the study is implemented in an inquiry-based classroom, the pattern-finding activity is orchestrated in steps of presentation of a problem, whole-class discussion about the methods for solving the problem, and summing up by the teacher (Shimizu, 1999). Further, qualitative case study approach (Yin, 2009) is adopted in this study.

The pattern-finding activity is designed to support students' development of conjecturing and justifying power. There are six tables of numbers (Figure 3) from 1~63 that are constructed by transforming of number systems from decimal to binary in students' worksheet. For instance, decimal number 10 could be represented as the binary number 1010, that is, number 10 is equal to (1)*23+(0)*22+(1)*21+(0)*20. Among the six tables, table 1 contains the binary numbers with the first digit is 1. The rest may be deduced by analogy, such as table 5 contains the binary numbers with the fifth digit is 1. Hence number 10 can be found in tables 2 and 4 only. Some of the research subjects have learned the binary system in the "information and technology" lessons, but not with this case. Hence, randomly placing the numbers in each table but not sequencing them in order might increase the degree of difficulty of generalizing the hidden pattern. In addition, there are three questions designed in this game: (1) What properties can you find from these six tables? (2) Can you induce any generality of the tables from the properties you found? (3) Can you propose any conjecture of how the game works and justify your conjecture?

No. 1

17	19	61	43	25	27	57	31
1	51	37	7	9	11	13	15
33	35	5	39	29	23	45	47
49	3	53	55	41	59	21	63

No. 2

50	51	10	43	58	15	62	63
2	27	6	7	54	22	14	38
18	19	11	23	26	3	30	31
34	35	59	39	42	55	46	47

No. 3

15	5	44	37	12	13	39	4
20	21	61	23	28	29	38	53
52	31	54	47	60	22	62	63
36	7	30	14	6	45	46	55

No. 4

46	13	26	63	28	11	30	31
12	62	42	43	44	45	29	47
56	8	58	59	60	61	41	27
57	9	10	24	40	25	14	15

No. 5

61	17	62	60	20	21	22	23
48	49	50	19	52	53	57	55
24	25	26	27	28	29	58	31
56	54	30	59	51	16	18	63

No. 6

58	33	59	32	36	51	41	39
40	38	42	43	56	48	34	47
63	49	50	37	52	57	54	55
44	53	61	46	60	35	62	45

Figure 3 Number tables for pattern-finding activity

2. Participants

Fourteen eleventh graders participate in a four-week extra-curricular program aimed to develop the power of conjecturing and justifying. Students are purposefully selected from seven different senior high schools with varied achievements. In addition, five of the students have chosen to be research subjects due to their fruitful performances. These schools are all located in the suburb of central Taiwan. The teacher of this study is one of the authors, who holds the viewpoint that students should construct mathematical knowledge actively and students' self-efficacy of math-learning might be fostered in the community of inquiry.

3. Number pattern generalizing activity

The activity is held throughout two phases, the first phase is started with a game asking a student to select a number from 1~63 and bear it in mind firstly, and then showing the student these six number tables sequentially for she/he to examine whether the selected number is in the table or not. In the end, the teacher notifies the student the accurate number she/he selected. After playing the game for several rounds, students are engaged in personal construction for formulating ideas to initialize group discussion. At the end of personal session, we interview the students who have proposed conjectures in their own ideas; four of research subjects are purposefully select with maximum variation sampling strategy. Each critical case carries highly potential ideas of solving the hidden pattern of activity and can be seen a capable peer for leading collaborative learning. As regards the second phase, students are reorganized into four heterogeneous groups for following four selected representative students respectively (Louise, Isaac, Wendy and Bob) to find out the hidden patterns. Secondly, teacher walks around groups and poses productive questions for students. Finally, students' findings are integrated and validated through classroom community.

4. Data collection and analysis

Across a 4-week period, the whole activity procedures are videotaped and all the critical, extreme or unique, and revelatory cases are interviewed simultaneously while proceeding of group discussion at the second phase. Most of questions focus on the progress of students' development of specializing and generalizing power. All audio recordings are later transcribed verbatim. Further, field notes of class observation are taken during classroom video recordings and later expanded to help the researcher understand and orchestrate the story line of the study outcomes. Students' worksheets and reflections are also collected for interpretation of students' conjecturing behavior. Multiple evidence sources (Patton, 1987) are collected for constructing validity and triangulating evidence. Furthermore, all data are connected to a series of evidenced chain for enhancing reliability (Yin, 2009).

As regards data analysis strategy, first of all we generalize results systematically from the phenomenon observation (Strauss & Corbin, 1990). Secondly, students' mathematical conjecturing behavior are analyzed with theory driven. Competitive expositions are formulated from the results of critical cases. Finally, we take cross-case analysis and base on the level of findings of four groups respectively to construct a holistic view of students' conjecturing and justifying power on the pattern-finding activity.

IV. Data Analysis and Findings

Students are highly interested in the first phase of the activity. Most of them are amazed that how the teacher can get the right answer each time? Six students propose their primitive conjectures respectively. After that, four of them are selected to be a representative for leading the group discussion due to that they could propose their primitive conjectures clearly and carefully. Results show that their conjectures might be clues of whether they could solve the puzzle or not. For instance, Louis finds the base numbers of six tables with different approaches, Wendy finds the algorithm of the binary number based on her findings of the pattern for the number tables, and Bod proposes a global perspective of articulating how the game works. The four representatives refine their primitive conjecture in the second phase through attacking and reviewing the problem. Especially, they also try to give their justifications to other group members from reflecting, extending and defending the conjecture, in which they go ascent and descent in an ongoing conjecturing process by the strategies of specializing and generalizing.

1. Results

Each group conducts their investigations in a specific way respectively. Despite they take different approaches to generalize patterns which are hidden in the activity, their results seem to be connected to each other although four groups are working independently.

Louise leads the group discussion based on her very first findings, and she is the first representative who presents their group discussion results. In the first phase, Louise finds that the smallest numbers in the six tables are 1, 2, 4, 8, 16 and 32 respectively, and any number between 1-63 might be composed of these six numbers. Isaac's group discovers the same findings as Louise's group does, but they go even further. They create a dichotomy method to sieve the guessed number out. Both Louise and Isaac find the numbers which are shown or not are followed by some particular patterns. Most of the students reorganize the sequence of numbers as ascent at once in the first phase of activity. Further, according to reconstruction of number tables, some groups apply the idea of checklist for generalizing the number patterns (see figure 7). Above all, using checklist for students is a facile approach which is also effective in observing hidden patterns. As in the case of this study, students could go a step further to see the relationship among the numbers.

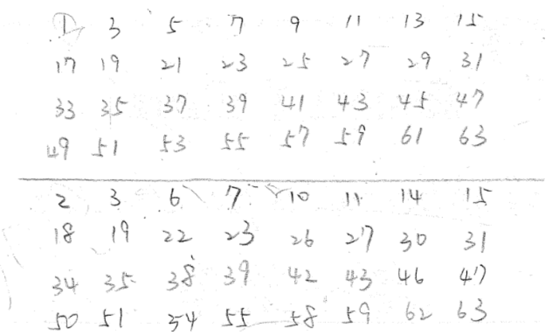


Figure 4 Part of Bob's group reconstruction of the sequence of numbers

As we compare the presentations of different groups, we could find that Wendy's group takes a quite different approach to generalize the pattern of numbers. They even find that numbers can be changed alternatively between binary and decimal systems. The followings are the transcriptions of interview with Wendy while she presents their work.

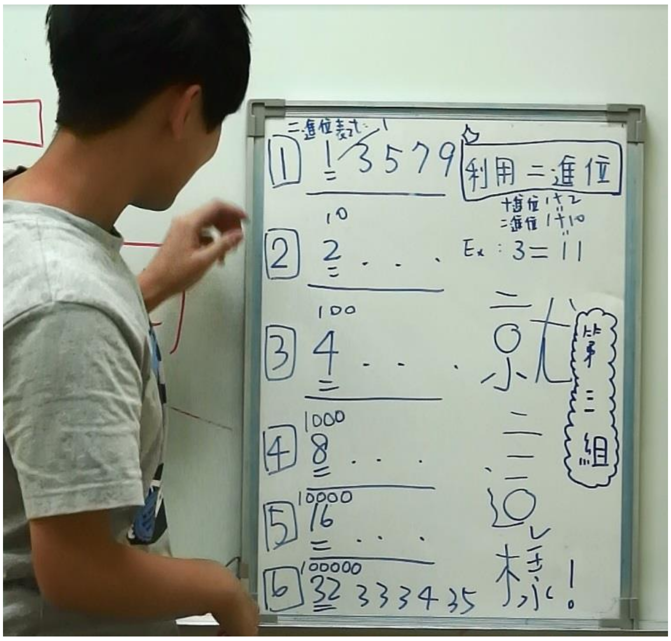


Figure 5 Presentation of Wendy's group

Teacher: Please tell us about your findings.

Wendy: Well, we reorganize numbers increasingly and find the first numbers in the six tables are 1, 2, 4, 8, 16, and 32 respectively. Then we transform these numbers from decimal to binary. Thus 2 can be represented as 10, 4 as 100, 8 as 1000, 16 as 10000, 32 as 1000000.

……

Teacher: Ok, what if we take 37 for example?

Wendy: 37 is 32 plus…..uh…., 4 and 1? Uh, thus 1 is in table 1, 4 is in table 2 and 32 is in table 6.

Teacher: And, how it relates to the binary system?

Wendy: Because binary system seems to be echoed to the pattern of numbers in the six tables.

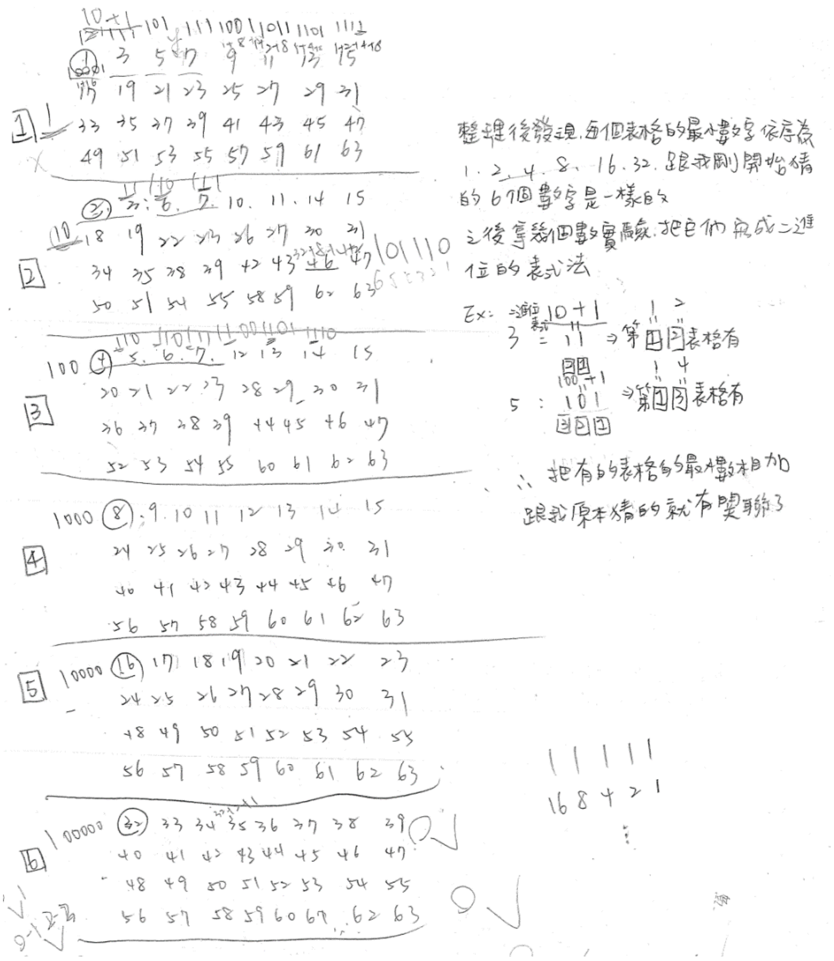


Figure 6 Wendy's exploration of relation of number tables and binary system

We also notice that the idea of checklist is very much related with Wendy's insight in the first phase of the study.

Teacher: Do you find the pattern of numbers in these six tables?

Wendy: May I write it down?

Teacher: Sure. You can talk while you are writing.

Wendy: I find a relation between the number and whether it is shown in these tables or not.

Teacher: Please show us how it works.

Wendy: For example, 37 is shown in tables 1, 3, 6. I see that table 1 to 6 represents numbers of 1, 2, 4, 8, 16, 32 respectively. Then I add 1, 4 and 34, and get 37.

Teacher: How do you find the rule?

Wendy: Well, I enumerate each possible number at first.

Teacher: And how do you find these six numbers 1, 2, 4, 8, 16, 32?

Wendy: It suddenly comes to my mind.

Teacher: Can you elaborate clearly?

Wendy: Uh, I think there are something must be added together while you are demonstrating. Then I pick a number randomly for checking, and it is proved that I am right.

Teacher: Where do you get such ideas?

Wendy: By "intuition".

Teacher: Excellent.

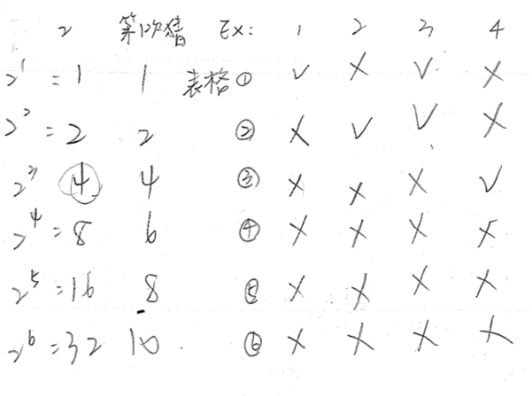


Figure 7 Wendy's group expressing the generality by using checklist

Wendy's conjectures could be seen as a response for Fischbein (1987), who recognizes that plausible conjectures are based on preliminary analysis. Hence conjectures might be seen as expressions of intuitions. Somehow we can see that Wendy does not take a wild conjecture, rather, she builds the final results at second phase according to her plausible conjectures. Besides, we find some evidences of how such plausible conjectures shed the lights for students' pattern-generalizing. According to Wendy's reflection after group discussion, there are some interesting outcomes as follows:

> I start to list the number 1 to 9 at the beginning, and try to hypothesize the base numbers of these tables are 1, 2, 4, 6, 8, and 10, and then add them up if it's checked in the table. Somehow I find that it is wrong. Then I try to hypothesize the base numbers are 1, 2, 4, 8, 16, and 32, respectively, and then I find it is consistent with my conjecture. I try to check some other numbers (small then 63), and find that it works. So I think I've found the secrets of the number pattern. In addition, I guess it must somehow relate to binary numbers thus I reconstruct the number tables and carry on for examining (see Figure 6). By the way, binary system is a topic which I learned from information technology class. It really surprises me that it can be applied to this game. [Wendy's reflection at the second phase]

Apart from Wendy's group, Bob's group generalizes the pattern of the binary which hidden in the tables in a different perspective. They successfully use the checklist and make some marks on the list as signals of binary transformation. Further Bob's group members use the representation to explain how binary numbers and decimal numbers can be interchanged flexibly.

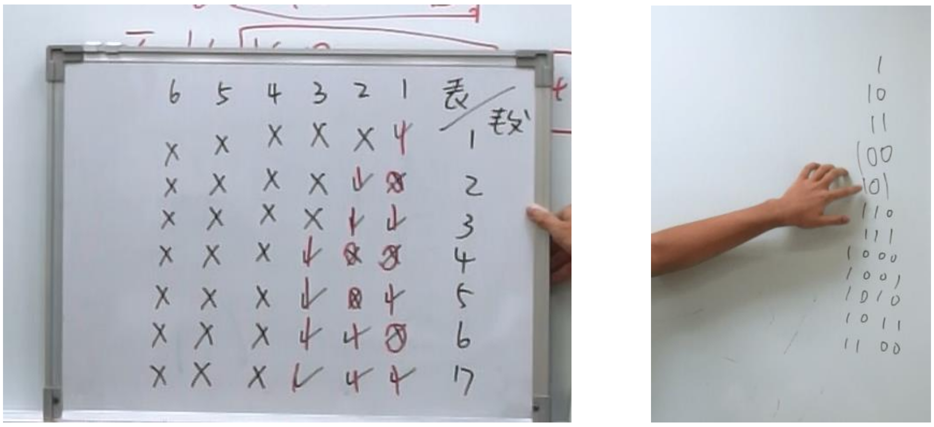


Figure 8 Bob generalizes a pattern of binary system

Bob: We use ticks for symbolizing the number which is checked in the number table and see it as binary digit 1. Similarly, we use crosses for standing the numbers which are unchecked in the number table and presume them as a binary digit 0. Then decimal numbers 2, 3, 4 and 5 can be interchange as 10, 11, 100, and 101.

Teacher: Bob, do you find any particular pattern of numbers related to numbers in the tables?

Bob: Yes, it is about the number whether is checked or unchecked in the table.

Teacher: Would you please show us?

Bob: Sure. We find that if you transform decimal numbers 1, 2, 3,…and 12 to binary numbers as 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011 and 1100. Then you can see all these numbers of the first digit with the pattern 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1 and 0 (e.g., the first digit of Table 1, and see it as vertically). This phenomenon explains why there are only odd numbers in the first table. And as you see these digits could correspond to decimals and to control whether it exists in the table or not.

Teacher: Excellent. How about the second digit of binary?

Bob: As you can see that the second digits of binary number start from decimal number 2. The pattern is of the form as 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1 and 0. This pattern corresponds to table 2 which makes decimal numbers echoing as x, 2, 3, x, x, 6, 7, x, x, 10, 11, x and so on. According to such phenomenon, we can make sense of the findings of Louise and Isaac.

Teacher: So do you find any relationship of transformation between decimal and binary?

June: Firstly, we see the six tables from the first to the sixth corresponding to decimal numbers of 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 and 2^5. As the transformation between decimal and binary, for instance, if we transform binary number 10 to decimal we can add $1*2^1$ and $0*2^0$ then we get decimal 3. On the other hand, if we pick decimal 7, then we can see the number shows in tables 1, 2 and 3. Similarly, we can get decimal 7 equal to the result of $1*2^2+1*2^1+1*2^0$.

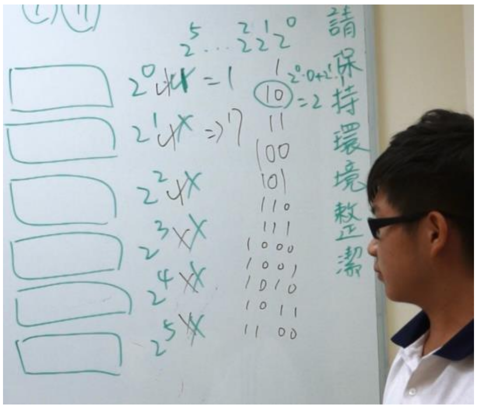


Figure 9 June (the second representative) illustrate the transformation within decimal and binary

There are two interesting twists of pattern-generalizing process of Bob’s group. First one is that June asks for a reorganized number table by sequentially in the very beginning of second phase, but he has been asked for doing it by himself. It seems an ordinary action of student’s working triggering a further exploration of their findings. After June reorganizes the number tables, he does a checklist with symbols of tick and cross. Meanwhile, when Bob sees the checklist, he shouts out suddenly “It’s a binary number system”. It seems that Bob’s group finds the Holy Grail of this game; however, they are frustrated in solving the relation between binary and decimal.

June: I think it relates to addition. It can be found that number 1 is only checked with 2^0, and 2^1 can be checked with decimal numbers 2 and 3. Further, 2^2 can be checked with decimal numbers 4, 5, 6 and 7 and so on (ref. Figure 9).

Bob: It looks like a binary system. (It seems not drawing attention.)

June: Numbers seem to be added by the powers of 2.

Bob: It looks like a binary system for me. (Bob tries to draw other's attention again.)

June: Why?

Bob: This is 000001(×××××✓), this is 000010(××××✓×), this is 000100 (×××✓××), this is 000110 (×××✓✓×) and this is 000111(×××✓✓✓). (Based on the checklist.)

David: Oh! And then?

Bob: Yes, then 000111, 001000, 001001, 001010.

……

Teacher: Now you find the rule for transform base-2 to base-10. Are the rules related to the tables?

Bob: Are these number tables related to the rule? Why?

Teacher: More specifically, do you see the hidden pattern of numbers within these six tables?

June: First of all, we need to rearrange numbers ascent in each table respectively. Then we can see an interesting phenomenon. For example, if a decimal number can be changed into a binary number 11, then it can be checked in table 1 and table 2. Again, if we get a binary 101, then it will be checked in table one and table three.

Teacher: Well done. Who finds this secret?

June: Bob does.

Teacher: Bob, how do you find it?

Bob: We can start the procedure from decimal number 1. Since 2 to the zero power is 1, then we can see that numbers in table 1 are formed in an discontinuous series bur patterned in 1, x, 3, x, 5, x, 7…..And the second table represents the 21 which is 2, the number series starts from 2, and with the pattern of 2, 3, x, x, 4, 5, x, x. Further, the third table represents the square of 2, that is 4. Thus the number series in table starts from 4, and with the pattern of 4, 5, 6, 7, x, x, x, x, 12, 13, 14, 15, …..

David: Bob, you mean binary is related to tables?

Bob: I can see the pattern but I still try to realize the reasons.

June: My question is why we need to multiply certain value with each digit of binary then add them up to get decimals? How does it work?

Bob: Base-2 and base-10, I think. I get the formula from IT class, but just don’t know how to explain the tables and the interchange of binary number and decimal number.

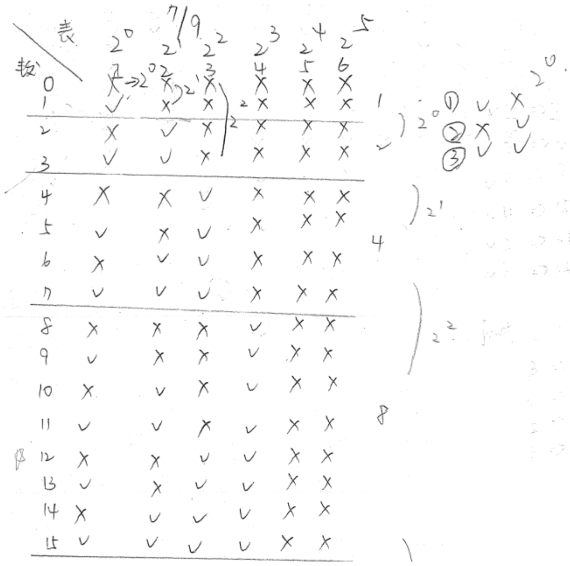


Figure 10 June’s work on generalizing the pattern of binary

In the end of discussion, Bob’s group does not produce any further exploration between tables and the algorithm of binary, which has been proposed at least four times in the discussion. The reason appears trivial as they just miss the key concept of place value for base-ten. NCTM (2000, p.78) proposes that “in prekindergarten through grade 2 all students should use multiple models to develop initial understandings of place value and the base-ten number system”. Even more, Ausubel (1968) considers that the most important single factor influencing learning is what the learner already knows. The knowing might be vicarious experiences in other academic subject areas or truly experiential knowledge developed from personal experiences outside school or in practical school subjects (Stillman, 2000). Although binary is the number system which students might not be familiar with, it frustrates Bob’s group for missing the ideas of place value, but students more or less tries to employ their knowing for inferring they do not know, so “to know is one thing, to do is another” is very much appreciated in such circumstances. Additionally, Wendy and Bob explore patterns of binary differently. Wendy takes the perspective from base-ten, while Bob base-two. Wendy applies the combination of base numbers for finding the pattern while Bob explores more profoundly with the combination of checklist, numbers in tables, and the powers of 2.

2. Discussion

(1) Specializing and generalizing are two sides of a coin

Specializing-generalizing might be one of the most important strategies while students are engaged in an inquiry-based conjecturing activity. According the viewpoint of Popper (1972), when individual is frustrated in adversity with unknown situation; he or she will try to propose a tentative solution by following results of endless error trying. Even more, backward to previous process recursively when he or she is confronted with new problems. In the discussion of Bob’s group, as June and David are lack of knowledge of binary, Bob provides them with specialized examples and try to generalize a pattern for transformation between decimal number and binary number according to the numbers’ pattern in tables. Secondly, when they are confronted with the challenging problem, Bob and June offer many tentative solutions for giving explanations either in formulation of binary or numbers’ appearing patterns. Just like Wendy, she tries to seek the base number of each table by several trying, and attempts to match the rule for checking the guessed number, and to generalize the pattern from the results of specializing, and apply the generality for addressing her findings by specializing the cases. As what is noted previously, it could be seen as the empirical evidences for responding to Mason (2002), that seeing the particular in the general and seeing the general through the particular, as well as a reply to Dörfler (1991), that generalizations are both objects for individual thinking and means for communication. But we conclude such stance premised much on the student who can freely employ with both strategies.

(2) Students’ justifying power evolve within sociocultural perspectives

Wendy and Bob both propose the binary system for serving explanations of the pattern of the game which they find. Their finding progress is helped a lot with their episodic prior knowledge of binary. When their propositions are challenged, Wendy and Bob respond in different directions. Wendy can elaborate her findings not merely subtlety but also flexibly by using base numbers such as 1, 2, 4, 8, 16, and 32 for representing decimal number in the binary system. She takes an approach which starts from the perspective of decimal numbers to seek the binary transformation and exemplifies with a reasonable representation. But when Wendy is challenged to show the relation between binary and the game she just attributes to the intuition. On the contrary of Wendy, Bob takes the perspective of binary algorithm for explaining how decimal numbers can be arranged in the tables with certain patterns. Further, he exemplifies that how the arrangement connects to the interchange between binary and decimal numbers. When Bob is choked with the challenge to address the origins of the transformation he does not try giving any explanation immediately. Rather, he works with June back and forth iteratively at least four times in group’s inquiring. As Isaac and Louise see their patterns clearly, they can apply strong statement for backing their persuasion without hesitation. In addition, Bob also tries do make sense of other groups’ findings such as Isaac and Louise base on their conjecturing results. As the disclosure of Zack and Graves (2001), each child’s ideas are made up in part of someone else’s’ ideas and in part of their own.

Additionally, their understanding can be connected within discourse. Such realization could also be verified in our research, students construct understandings not merely with discourse, rather, inquiry questions and justification are also employed as well. Furthermore, in Bob's case, he takes a different conjecturing subject in the second phase when he sees June's checklist, and he can see things in a unique way, such as he sees the digits of binary number in different perspective. Such phenomenon reminds us that Polya (1954, pp. 7-8) builds on specializing and generalizing as an ascent and descent, in an ongoing process of conjecturing:

….[an inductive attitude] requires a ready ascent form observations to generalizations, and a read descent form the highest generalizations to the most concrete observations… First, we should be ready to revise any one of our beliefs. Second, we should change a belief when there is a compelling reason to change it.

Furthermore, Vygotsky (1978, p.86) proposes that the distance between the actual developmental level as determined by independent problem solving and level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in collaboration with more cable peers. Apart from that, Schoenfeld (1989) argues that students' problem solving behavior not merely relies on their sense of mathematics as a discipline in the situation, rather it is driven by the beliefs which they possess. Undoubtedly, Bob is a capable peer, who is able to see things insightfully and flexibly to change his belief when there is a compelling reason to change it. Also June could be seen as a rival for Bob, such rival who is able to learn things quickly and always try to seek any opportunities for filling up the blank in an ongoing process of discourse, then making the results of discussion fruitfully. Somehow we could see students' mathematical conjecturing behaviors are much more relied on the socio-perspective, since "the goal of a sociocultural approach is to explicate the relationships between human action, on the one hand, and the cultural, institutional, and historical situations in which this action occurs, on the other" (Wertsch, del Río & Alvarez, 1995, p. 11).

V. Conclusions

1. Conjecturing process is based on specializing and generalizing

The results of this study disclose that, while students are engaged in an atmosphere of conjecturing, most of them could apply the strategies of specializing and generalizing flexibly for observing patterns. Based on the results of specializing and generalizing, some students might continue to make plausible conjectures and justify them confidently. The study is orchestrated in social settings, for that reason, students could freely interact and collaborate with each other, and have ample opportunities to make their own mathematical constructions in conjecturing process. Therefore, collaboration within peers plays a vital role. Such collaboration could foster students to make sense of certain proposition which is bridged with dialogue and discourse.

2. Scaffolding is essential for justifying

Teacher's scaffolding is crucial for the development of conjecturing process, planning questions carefully could lead students to reveal and explore their conjecturing thoughts specifically. In brief, teaching is to create an environment for learning mathematics and orchestrate participants to engage in the context of inquiry. In addition, teaching is to elicit and interpret what students do and know (Cobb, 2000; Fennema et al., 1996). Besides, teachers need to conduct and organize students' findings and sequence the presentation order for helping students realize the phenomenon of problem from different perspectives. Due to most of the participants lacking experience of engaging in such inquiry-based conjecturing activity, some of them need to polish their addressing skill for helping others make sense of their justifications. Ernest (1995) notes that conversation or dialogue can been seen as a central metaphor for knowledge and mind, nevertheless, spoken words do not equal to thoughts in the mind. Although there is still a group missing the key concept for resolving the challenged issue, we notice that most of the students could infer analogy and prompts which are provided by the teacher. Furthermore, this activity seems to improve the research subjects' disposition towards learning mathematics.

3. Suggestions

We would suggest that this kind of activities should offer ample opportunities for students to enhance communication skills for further bridging discourse and understanding. Even more, it might be a good example for the integration between mathematics and information technology class, especially for the introduction of binary system. As students' former learning experience appears to be excessively focused on instrumental understanding without any extra energetic thinking, the study is orchestrated for developing pupils' conjecturing and justifying power as well as for facilitating students' learning of mathematics towards relational understanding (Skemp, 1987). Finally, the results of the study might offer some empirical evidence for the claim of Lin (2006), which is "Conjecturing is the centre and pivot of all phases of mathematics learning – including conceptualising, procedural operating, problem solving and proving, and provides the driving force for developing these phases of mathematics learning".

References

Adler, J., & Lerman, S. (2003). Getting the description right and making it count: Ethical practice in mathematics education research. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 441-470). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. doi: 10.1007/978-94-010-0273-8_15

American Association for the Advancement of Science. (1990). *Science for all Americans: Project 2061*. New York, NY: Oxford University Press.

American Association for the Advancement of Science. (1993). *Benchmarks for scientific literacy: Project 2061*. New York, NY: Oxford University Press.

Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. New York, NY: Holt, Rinehart and Winston.

Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1993). *Problem solving, reasoning, and communication, K-8: Helping children think mathematically*. New York, NY: Macmillan Publishing Company.

Blanton, M., & Kaput, J. (2002, April). *Developing elementary teachers' algebra "eyes and ears": Understanding characteristics of professional development that promote generative and self-sustaining change in teacher practice*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.

Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L, Reid, D., & Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning*, *5*(1), 55-72.

Cobb, P. (2000). The importance of a situated view of learning to the design of research and instruction. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 45-82). Westport, CT: Ablex.

Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal*, *20*(1), 41-53. 10.1080/0141192940200105

Davis, P. J., Hersh, R., & Marchisotto, E. A. (1995). *The mathematical experience.* Boston, MA: Birkhäuser.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer. doi: 10.1007/978-94-017-2195-0_4

Elbers, E. (2003). Classroom interaction as reflection: Learning and teaching mathematics in a community of inquiry. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 77-99. doi: 10.1023/B:EDUC.0000005211.95182.90

Ernest, P. (1995). The one and the many. In L.P. Steffe & J. Gale (Eds.), *Constructivism in education* (pp. 459-486). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R., & Empson, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 403-434. doi: 10.2307/749875

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Francisco, J. M. (2013). Learning in collaborative settings: Students building on each other's ideas to promote their mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 417-438. doi: 10.1007/s10649-012-9437-3

Kieran, C., Forman, E., & Sfard, A. (2001). Learning discourse: Sociocultural approaches to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *46*(1-3), 1-12. doi: 10.1023/A:1014276102421

Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics education. In J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the eleventh conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1, pp. 3-27). Montreal, Canada: PME.

Kwon, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Educational Review*, *7*(1), 51-61. doi: 10.1007/BF03036784

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171472

Lakatos, I. (1978). A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics? In J. Worrall & G. Currie (Eds.), *Mathematics, science and epistemology* (pp. 24-42). New York, NY: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511624926.003

Lin, F. L. (2006, December). *Designing mathematics conjecturing activities to foster thinking and constructing actively*. Paper presented at the meeting of the APEC-TSUKUBA International Conference, Tokyo, Japan.

Martin, M. O., Mullis, I. V. S., Foy, P., & Stanco, G. M. (2012). *TIMSS 2011 international results in science*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2004). *Fundamental constructs in mathematics education*. London, UK: RoutledgeFalmer. doi: 10.4324/9780203465387

Mason, J. (2002). Generalisation and algebra: Exploiting children's powers. In L. Haggerty (Ed.), *Aspects of teaching secondary mathematics: Perspectives on practice* (pp. 105-120). London, UK: RoutledgeFalmer.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (2nd ed.). Harlow, UK: Pearson Education Limited.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Research Council. (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington, DC: National Academy Press.

Patton, M. Q. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation*. Newbury Park, CA: Sage.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning, Volume II: Patterns of plausible inference*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Popper, K. (1972). *Objective knowledge: An evolutionary approach*. New York, NY: Oxford University Press.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 338-355. doi: 10.2307/749440

Shimizu, Y. (1999). Aspects of mathematics teacher education in Japan: Focusing on teachers' roles. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *2*(1), 107-116. doi: 10.1023/A:1009960710624

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematic*s. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stillman, G. (2000). Impact of prior knowledge of task context on approaches to applications tasks. *Journal of Mathematical Behavior*, *19*(3), 333-361. doi: 10.1016/S0732-3123(00)00049-3

Strauss, A., & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques*. Newbury Park, CA: Sage.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289-321.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wertsch, J. V., del Río, P., & Alvarez, A. (1995). Sociocultural studies: History, action and mediation. In J. V. Wertsch, P. del Río and A. Alvarez (Eds.), *Sociocultural studies of mind* (pp. 1-34). Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139174299.002

Wood, T., & Sellers, P. (1997). Deepening the analysis: Longitudinal assessment of a problem-centered mathematics program. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(2), 163-186. doi: 10.2307/749760

Yin, R. K. (2009). Case study research: Design and methods (4th ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Zack, V., & Graves, B. (2001). Making mathematical meaning through dialogue: "Once you think of it, the Z minus three seems pretty weird". *Educational Studies in Mathematics*, *46*(1-3), 229-271. doi: 10.1023/A:1014045408753doi

張其棟、楊晉民（2016）。
翻轉學習在大學微積分課程之實現與初探。
臺灣數學教育期刊，3（2），55-86。
doi: 10.6278/tjme.20161005.003

翻轉學習在大學微積分課程之實現與初探

張其棟[1]　　楊晉民[2]
[1]逢甲大學應用數學系
[2]國立臺中教育大學數學教育學系

翻轉教室（flipped classroom）的教學模式儼然成為近年來教學改革重要的方向與理念，其主要概念是將教室內教師講解和教室外學生作業兩者翻轉。學生課前在家收看教師預錄或指定之教學影片，在教室進行問題探討、作業解題或致力於較高階之批判性思考活動，以增加學生在教室內主動學習、參與或同儕合作學習的機會。本研究旨在進行翻轉學習在大學微積分課程之研究，選定某大學一年級 72 位學生之微積分課程進行翻轉教學，透過探究學生在課程相關表現，冀能提供有意進行微積分翻轉教學教師參考。選定之微積分教材內容涵蓋曲線下面積、微積分基本定理和代換積分等概念，教材編撰依據認知負荷理論和多媒體學習認知理論，教學活動設計採學生中心進行設計，以讓學生確實觀看影片、增加課程參與、善盡個人責任等方向設計。研究工具採用課間形成性評量、分組合作評量和自編問卷探究學生對於微積分的學習結果和學習態度。研究結果顯示本研究所規劃之教學活動，學生在問卷分數和開放性問題質性描述部分都給予正向的肯定。大部分的學生形成性評量成績到後期亦有穩定的發展。隨著學生越來越瞭解課程實施方式，參與程度也逐步升高，在分組活動中對於同儕互動、團體榮譽等方面也更能夠認真看待自己應負的責任。

關鍵詞：教學模式、微積分、數學教學、翻轉教室、翻轉學習

通訊作者：楊晉民，e-mail：jinnminyang@mail.ntcu.edu.tw
收稿：2016 年 1 月 29 日；
接受刊登：2016 年 10 月 5 日。

Chang, C. T., & Yang, J. M. (2016).
Flipping the classroom in a calculus course.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *3*(2), 55-86.
doi: 10.6278/tjme.20161005.003

Flipping the Classroom in a Calculus Course

Chi-Tung Chang[1] Jinn-Min Yang[2]
[1] Department of Applied Mathematics, Feng Chia University
[2] Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education

The flipped classroom has become a prominent direction for teaching-related reforms in recent years; the main idea is to flip the activities "teachers teaching in classroom" and "students completing their assignments outside of classroom." In other words, before the class, students watch instructional videos (at home) assigned or prerecorded by their teachers so that the students can discuss problems that they have encountered, or engage in higher-order critical thinking activities in class. The flipped classroom aims to facilitate active learning, student participation, and peer collaborative learning in class. The present study investigated the implementation of flipped learning in a university calculus course, in which flipped teaching was employed in a class that contained 72 freshman students. By studying the students' performance following the implementation of flipped classroom, this study provided referential information to teachers who are interested in introducing flipped teaching in their calculus class. Furthermore, course content selected included area under the curve, fundamental theorem of calculus, and integration by substitution. Course materials were compiled according to cognitive load theory and cognitive theory of multimedia learning. Regarding teaching activities, student-oriented teaching activities were adopted to ensure that students watch videos, participate in class, and fulfill their responsibilities as students. Interclass formative assessments, grouping and cooperative assessments, and self-compiled questionnaires were employed to investigate students' calculus learning outcome and attitude. The study results revealed that students showed positive responses in the areas of questionnaire score and qualitative description of open questions. In addition, the majority of the students' formative assessment scores improved steadily later on in the course. Furthermore, as students learned more about the course implementation method, their participation gradually increased; during group activities, they also interacted more frequently with their peers, upheld their group honor, and viewed their responsibilities with a more serious attitude.

Keywords: instructional model, calculus, mathematics teaching, flipped classroom, flipped learning

Corresponding author：Jinn-Min Yang，e-mail：jinnminyang@mail.ntcu.edu.tw
Received：29 January 2016;
Accepted：5 October 2016.

壹、緒論

資通訊科技（information and communication technology, ICT）的快速進步促使網路學習的發展更加蓬勃與快速。2006 年可汗學院（https://www.khanacademy.org/）利用網路傳送的便捷與錄影重複利用成本低的特性，在網路上提供免費的世界級教學，提供學生隨時隨地根據自己的需要進行非同步（asynchronous）學習（黃政傑，2014）。2007 年，美國科羅拉多州伍德蘭公園高中科學課教師柏格曼（Jonathan Bergmann）與山姆斯（Aaron Sams），在其教授之高中科學課程錄下他們的 PowerPoint 簡報教學短片，給無法到課的學生透過網路進行學習，後來這樣的方法受到各界重視，翻轉學習（flipped learning）、翻轉教室（flipped classroom）或倒轉教學（reverse instruction）的教學模式開始成為盛行（Bergmann & Sams, 2012; Fulton, 2012; Hamdan, McKnight, McKnight, & Arfstrom, 2013b; Lage, Platt, & Treglia, 2010; Yarbro, Arfstrom, McKnight, & McKnight, 2014；駐洛杉辦事處教育組，2013）。

以教師中心（teacher-centered）的教學模式，課堂主要時間都是由教師主導整個課程內容與教學活動，因此，大部分學生在教室內主動參與、分享和討論的時間較少，課後再藉由回家作業來練習課堂所學，對於練習又必須藉由下一次上課才能與教師進行討論。翻轉學習或翻轉教室的教學模式主張教師講解和學生作業兩者翻轉（EDUCAUSE, 2012），也就是學生在家藉由網路先學習教師預錄或指定之教學短片，然後在教室進行作業解題與較深度的討論。換句話說，整個翻轉教學過程將結合師生面對面的同步（synchronous）學習與線上非同步（asynchronous）的網路學習成為混合式學習（blended learning）環境（黃政傑，2014）。根據翻轉學習的概念所進行之教學，更能營造教學環境為學生中心（student-centered）之主動學習的場域（Pierce & Fox, 2012），教師可以鷹架與深化學生的概念學習。學習翻轉後，學生先利用課餘時間進行線上學習，課堂時間則是教師運用來協助學生進行問題理解或問題解決（problem-solving）等對應 Bloom 認知層次中較高層次能力的學習（Estes, Ingram, & Liu, 2014; Hamdan, McKnight, McKnight, & Arfstrom, 2013a），或偵測學生在想法上的錯誤（EDUCAUSE, 2012）。翻轉學習網（flipped learning network [FLN], http://flippedlearning.org/）更提出翻轉學習必須建構在 F-L-I-P 四大支柱上始能具備成效，其中 F 表示彈性的環境（flexible environment）、L 表示學習文化（learning culture）、I 表示明確的內容（intentional content）、P 表示專業的教學者（professional educator）（FLN, 2014）。翻轉學習對教師來說意味著額外且專業的工作（EDUCAUSE, 2012; FLN, 2014），教師必須花費時間安排、設計甚至於後製錄製之教學短片，通常 30 分鐘的教學短片必須花費約 3-4 小時始能完成（Kadry & El Hami, 2014）；對學生而言，意味著自身對學習之責任與彈性的增進，主動學習機會的增加與學習內涵的深化（Arnold-Garza, 2014）。Bergmann（2013）建議教師欲從事翻轉

教學時，先自問為何要翻轉、製作教學影片的工具是什麼、教學元件存放的位置在哪裡、學生如何存取教學元件等問題都能克服後，才開始進行翻轉學習。

Aronson 與 Arfstrom（2013）指出翻轉學習對於大學教學特別的合適，尤其是初次嘗試使用翻轉教學之教師。大學生不論是設備與網路操作、資料的獲取、理解與自我學習能力的擴張等方面都已趨於穩定與成熟。此外，大學也提供穩定的軟、硬體設備，讓學生在翻轉教室執行時，所面臨的數位落差與社經落差等影響學生學習的外在條件都可以縮小，因此相當適合翻轉教學之模式。美國密西根大學教師 Scott Freeman 研究顯示能將學生的學習被當率（failure rate）從 17%提升到只剩下 4%；加拿大溫格華 British Columbia 大學研究結果顯示學生出席率增加 20%，參與率增加 40%（Aronson & Arfstrom, 2013）。

微積分（calculus）是大學基礎且重要的學科之一，被廣泛地運用在科學、經濟學、管理學和工程學等各個研究領域，同時也在其他大學數學科目，例如機率論、最佳化、偏微分方程、分析等大量被使用（Muzangwa & Chifamba, 2012）。傳統微積分課程對於因故缺課的學生易在學習上產生落差，若沒有於課後短時間內自行研讀就容易有累積效果，隨著課程的加深、加廣而嚴重影響後續的學習成效。對於準時到課的學生，若沒有複習亦容易隨著時間遺忘重要概念而影響學習成效。對於大學微積分課程之翻轉教學研究中，Jungić、Kaur、Mulholland 與 Xin（2015）研究調查顯示學生對於教學影片的接受度亦相當高，也認為翻轉教室可以有較多時間討論問題，與教學者互動的時間會比較多。Sahin、Cavlazoglu 與 Zeytuncu（2015）從問卷發現學生對於不同類型的教材中，相當依賴翻轉錄影教材，理由是可以快速備課。他們亦發現翻轉教室的學生小考分數比非翻轉教學學生高一些。這些研究對於數位課程錄製尚未引入認知負荷理論（cognitive load theory, CLT）和 Mayer（2001, 2014）多媒體學習認知理論（cognitive theory of multimedia learning, CTML）以使學生學得更好作為考量。微積分不只是一門訓練演算能力的課程，因其本身包含許多邏輯演繹和多重表徵等內涵，因此相當適合作為讓學生進行分享、討論與合作的課程。換句話說，大學微積分課程相當適合翻轉教學模式的進行。

根據上述，本研究認為大學微積分課程相當適合翻轉教學模式的進行。因此，針對某大學一年級學生微積分課程進行研究，來解析大學生在微積分翻轉教室之學習情形。本研究之目的如下：

一、開發暨設計適合大學微積分翻轉教學之數位教材與學習活動；

二、了解大學生在微積分翻轉教學之解題表現；

三、探究大學生對於微積分翻轉教學的態度。

貳、文獻探討

一、翻轉教室

2007 年，美國科羅拉多州伍德蘭公園高中科學課教師柏格曼（Jonathan Bergmann）與山姆斯（Aaron Sams），在其教授之高中科學課程錄下他們的 PowerPoint 簡報教學短片，給無法到課的學生透過網路進行學習，後來這樣的方法受到各界重視，翻轉學習（flipped learning）、翻轉教室（flipped classroom）或倒轉教學（reverse instruction）的教學模式開始成為盛行。此種教學模式大幅改善了學生的成績，同時也提升了學生的學習動機和學習態度，獲得良好的教學成效（Fulton, 2012）。翻轉教學不是只是觀看教師指定的錄影的線上學習，而是必須考量學生上課前、上課時和上課後三個階段都設計學生中心教學活動的教學模式。

傳統的教學希望學生能夠進行課前預習，課堂認真聽教師講解，然後課後藉由作業練習所學，但課前預期之成效往往不如預期。因此，「翻轉教室」將學習模式調整為以學生為中心，學生課前自學、課堂互動或解題、課後進行延伸學習，其中自學形式包括：觀看課堂教學錄影、聆聽課堂講授錄音（podcast）、精讀進階版的電子書（e-book）內容，以及與同儕們在線上合作學習等等，學生可以自己掌握教材內容、學習步調與學習風格，而教師的角色則從知識的「教導者」轉型為學習的「引導者」，讓學生以實作、合作學習的形式進行交流互動，甚至為現實問題提出可行的解決方案，使學生對學科內容有更深入的理解與應用，達到學習遷移的目的（劉怡甫，2013）。

翻轉教室的概念並不是新穎的教學方法，也不是要取代老師，或以影片取代回家功課，而是能讓學生從傳統被動的知識接收者成為主動的學習者，讓教師成為學習的設計師與輔助者（Pappas, 2012）。Bergmann 與 Sams（2012）指出翻轉教室可以幫助比較忙的學生、學習較為掙扎的學生，同時允許學生可以暫停與重播教學過程、增加師生互動、讓教師更瞭解學生、增加學生與學生間的互動、改變班級管理…等優點。當然，翻轉教室也有缺點，例如：對教師而言，會增加額外負擔來設計教室內和教室外的課程組合；對學生而言，數位落差或家庭社經落差可能會造成學生的焦慮與負擔。Honeycutt（2012）整理之傳統教學和翻轉教學比較（詳如表 1），表中亦清楚的表達了翻轉教學是學生中心學習模型的實現。

表1

傳統教學和翻轉教學之比較

傳統教學	翻轉教學
教師為焦點 （我該如何呈現訊息？）	學習者為焦點 （我該如何協助學習者獲取訊息？）
重結構與次序	重彈性與動態
單向溝通	多向溝通
教師主動，學習者被動	教師與學習者皆主動
教師決定教學內容	教師與學習者共同決定教學內容
教師在講台上講解	教師從旁引導學習
內容導向	活動導向
有效率的	有效益的
教師是資料的呈現者	教師是學習的促進者
較強調低階批判性思考技巧 （知識轉譯與理解）	較強調高階批判性思考技巧 （知識運用、整合與評鑑）

資料來源：修改自 *The lecture vs. the flip*, by B. Honeycutt, 2012. Retrived from https://barbihoneycutt.com/the-lecture-vs-the-flip/

二、微積分翻轉教室

微積分（calculus）在 17 世紀由牛頓和萊布尼茲所發明，是數學的一個重要分支。微積分是大學基礎且重要的學科之一，其被廣泛地運用在科學、經濟學、管理學和工程學等各個研究領域，同時也在其他大學數學科目，例如機率論、最佳化、偏微分方程、分析等大量被使用（Muzangwa & Chifamba, 2012）。

微積分翻轉教學可以讓學生學得更好，改變課程準備方式、課程參與更加活絡（Jungić et al., 2015; Sahin et al., 2015）。Sahin 等人（2015）從對於微積分翻轉教室研究三次問卷中發現學生對於不同類型的課前備課教材使用傳統教科書、翻轉教學影片、閱讀其他文件和觀看其他影片的累積比率分別為 34%、92%、46%和 32%，可見學生會比較依賴翻轉錄影教材。另外，有 85%學生覺得翻轉學習能夠讓他們學得更好。Jungić 等人（2015）經過四學期微積分翻轉研究結果發現在五點量表的問卷中，學生對於能夠學得更好是給予 3.86 分的肯定。該研究也指出所支出之人事費用和其他雜支金額約為 15000 元加幣，並指出轉換到翻轉教學在時間和金額投資與傳統教學比較起來都顯著增加。

三、認知負荷理論

將特定的工作加在個體的認知系統時，所產生心智上的負荷量稱為認知負荷（Sweller, van Merriënboer, & Paas, 1998）。人類處理訊息的工作記憶（working memory）是有限的，因此若待處理訊息互動性強，需相互參照才能瞭解，則將耗費短期記憶（short-term memory）容量，產生更大的認知負荷（cognitive load），導致學習上負荷量的問題。認知負荷的來源有三，分別為內在的認知負荷（intrinsic cognitive load）、外在的認知負荷（extraneous cognitive load）與增生的認知負荷（germane cognitive load）。學生學習的認知負荷受下列三要素影響：（一）學習教材的本質（nature of the material），即教材內容的難易程度，也就是內在的認知負荷；（二）學習教材的組織（organization），即教材內容的呈現方式，如教材的編排、重點強調、使用操作都會成為學生學習的負擔，就是外在的認知負荷；（三）若教材內容的呈現方式進行適當的脈絡編排以吸引學生專注於學習內容，增進學生基模的建構、組織與調適，即會產生增生認知負荷。內在的認知負荷為教材本身的難度，不能透過教材設計而有所影響；而外在的認知負荷，則可透過有效的教材設計之改良，成為增生的認知負荷來促進學習（Paas, Renkl, & Sweller, 2003）。

四、多媒體學習認知理論

Mayer（2001）根據 Paivio（1986）所提出的雙通道理論、Baddeley（1992）提出的工作記憶體理論和 Wittrock（1989）的生成學習理論（generative-learning theory），以及自己所提出的選擇-組織-整合之主動學習理論提出多媒體學習認知理論的三個基礎假設，如下表 2 所示。

表2

多媒體認知學習理論之三個假設

假設	說明
雙通道	人類擁有處理語音與視覺訊息的不同通道
記憶體容量有限	在處理語音與視覺訊息的記憶體容量是有限的
主動學習	學習需要在語音與視覺通道中大量的認知處理

資料來源：修改自 *Multimedia learning* (p. 44), by R. E. Mayer, 2001, New York, NY: Cambridge University Press.

Mayer（2001）基於探究學生對於多媒體教材的學習結果提出多媒體學習原則，提出九項多媒體學習原則，讓使用多媒體教學的教學者有了基本的圭臬。Mayer（2014）整理出許多學者提出的多媒體學習原則，就已經高達二十餘項之多，表 3 列出幾種本研究多媒體教材設計時常用之原則。

表**3**

多媒體學習原則

原則	說明
多媒體原則（multimedia principle）	學生對多媒體教材的學習效果比單獨文字學習的學習效果好。
空間接近原則（spatial contiguity principle）	多媒體教材相關的文字與圖形最好能放在鄰近的地方，對於學習的效果較佳。
時間接近原則（temporal contiguity principle）	學習者學習時聽到與看到之相關影像的間隔短，有助於建立與強化文字及影像間的連結。
連貫原則（coherence principle）	資料呈現要相關，與學習主題無關的文字、圖形與聲音等內容最好不要放入學習內容中。
切割原則（segmentation principle）	若將學習內容分割成數個小片段，可以減少每次呈現的訊息量，讓學習者可以有充足的時間從每一個片段中選擇、組織與整合訊息後再進入下一片段，學習者能更有效的分配與使用認知資源。
訊號原則（signaling principle）	學生學習多媒體教材時，如果含有協助如何處理教材的信號（例如：使用文字顏色），學生的了解程度比較好。

資料來源：摘錄並修改自 *Multimedia learning* (p. 184), by R. E. Mayer, 2001, New York, NY: Cambridge University Press. 及 *The Cambridge handbook of multimedia learning* (2nd ed.) (p.139), by R. E. Mayer (Ed.), 2014, New York, NY: Cambridge University Press.

參、研究設計與實施方式

本研究依據研究背景、目的與相關文獻之探討後，進行微積分錄影教材設計、教學活動設計，並採用形成性評量、小組合作與評量與問卷調查法進行資料蒐集與分析。

一、研究對象

本研究乃針對某私立大學工學院大學一年級學生微積分課程進行研究，計有 72 位學生參與本研究。解題成效評量分別於每次上課前進行約十分鐘的形成性評量，以瞭解學生對於指定的錄影教學是否理解。為讓學生間能夠進行數學對話與同儕合作，本研究採分組報告，共分為八組，每組約八至十人，由學生自行組隊並分配任務。每組在形成性評量之後針對指定之錄影教學進行報告，完畢後進行組間與組內互評。翻轉學習態度量表於期末完成，其他資料蒐集乃藉由線上教學收看分析、線上即時回饋測驗系統等資料，來解析大學生在微積分課程翻轉教室之

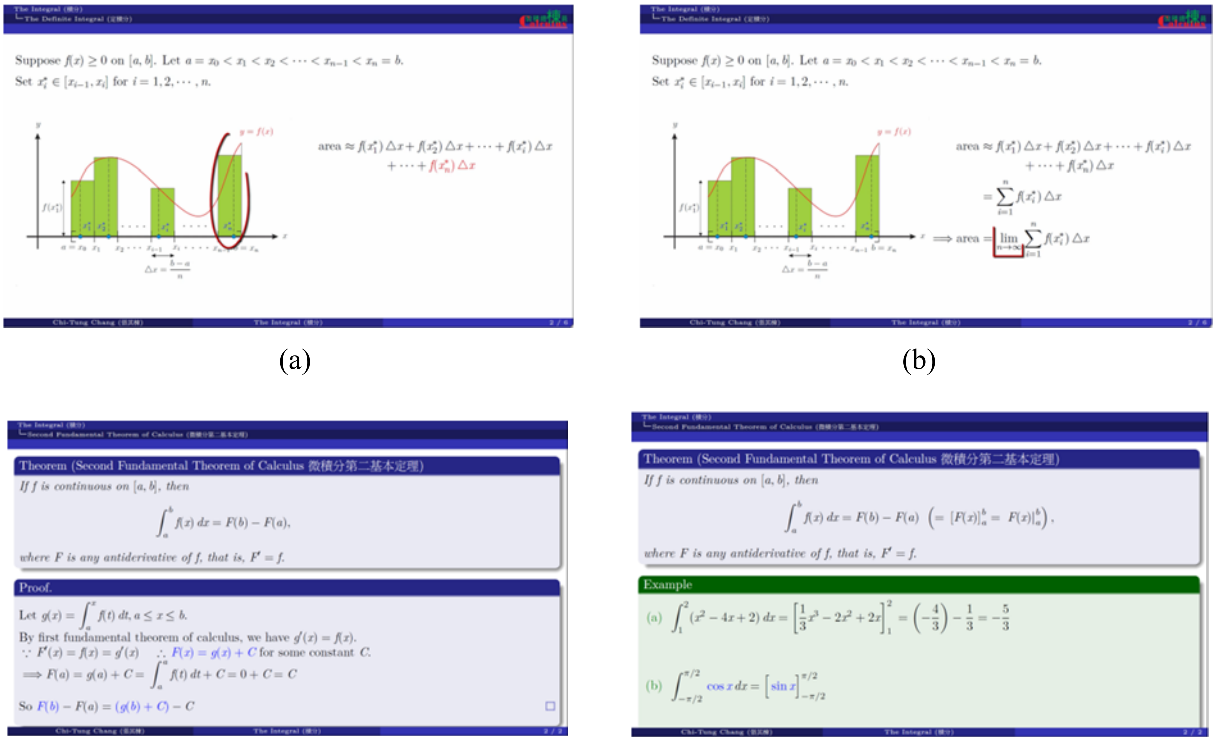
各項表現與態度。

二、微積分翻轉課程開發

本研究翻轉教室活動之課程為三學分基礎微積分（calculus）學年課程，每週有四堂課的授課時間，本研究微積分翻轉課程開發步驟有教材設計、教學網站設置、課前預習、課堂活動、課後回饋等，茲說明如下。

（一）教材設計

本研究所採用之授課內容為上學期微積分 I（calculus I）的部分，進行的主題為「積分及其應用」的單元，共計六次十一堂課持續兩週半的時間。本教材編製乃研究者根據課程安排進行教學投影片製作，畫面的設計、編排與動畫呈現，主要依據多媒體學習認知理論（cognitive theory of multimedia learning, CTML）所提出之原則（Mayer, 2001, 2014）與認知負荷理論（cognitive load theory, CLT）（Sweller, Ayres, & Kalyuga, 2011）的原則來進行教材設計，並由兩位研究者針對投影片內容進行討論修改後錄影。為降低學生認知負荷，教材設計應避免資料一次呈現太多，造成工作記憶體的過度使用。以圖 1(a)與(b)為例，區塊式設計是根據 CTML 之「切割原則」，將資料進行適度切割，避免在同一個畫面上呈現太多文字，可讓學生視覺通道聚焦合適的學習內容，再依據「多媒體原則」、「空間接近原則」和「時間接近原則」即時將對應的概念搭配圖像，使學生可以與文字或數學式相互參照，快速理解教材，並配合動畫分批呈現畫面內容，輔以語音講解由語音通道來處理部分訊息，以減少學生學習時大腦內工作記憶體的使用，以降低其心智負荷量，增進學生學習；使用不同顏色並適時圈選註記的方式，則是根據 CTML 之「訊號原則」具有提示重點的效果，讓學生聚焦這些重點。使用投影片進行數學教學時，若教學過程超過一頁範圍時，學生就必須記住前一頁的結果，才能理解後續推理，毫無疑問這樣安排將會增加學生認知負荷，因此再次利用空間接近原則與時間接近原則，如圖 1(c)和(d)所示，保留前頁所推導的主要定理與公式，同樣將其置於畫面上方，可讓學生立即參考前頁得到的結果加以解題，無須將其記憶腦中，減少工作記憶體之使用，降低學生認知負荷。此外，「連貫原則」可檢視投影片使用之多媒體是否合宜，避免濫用多媒體徒增工作記憶體使用而增加學生學習之認知負荷。



(a) (b) (c) (d)

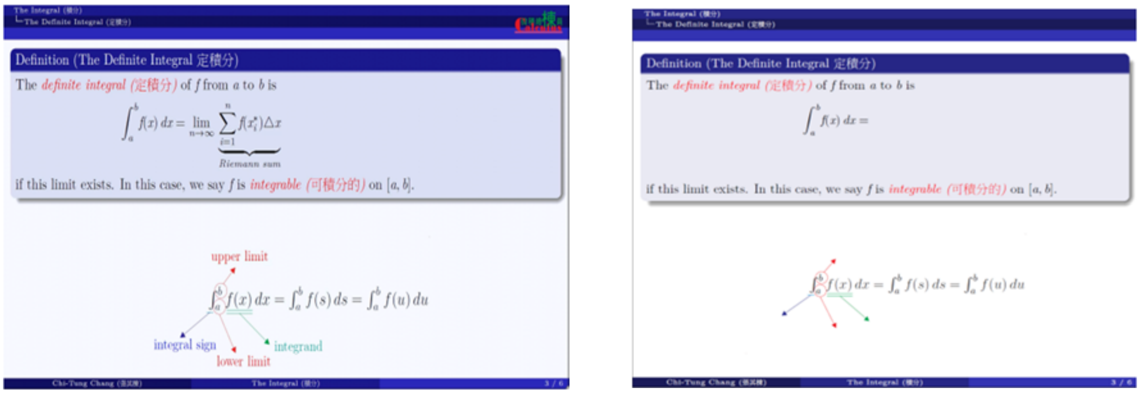
圖 1 符合多媒體學習理論和認知負荷理論之微積分教材設計

（二）錄影製作

根據設計好之教材以 Camtasia Studio 進行教材錄影後，再利用多媒體編輯軟體將教學錄影與其他資源整合，後製成最後教學錄影檔並上傳至教學網站，以利學生進行線上學習。

（三）網站建置

教師除錄製教學影片外，並規劃與使用 Google site 架設微積分教學網站「微積總棟員」（https://sites.google.com/site/calculusteaching/），影片則置於教師的 Youtube 頻道（https://www.youtube.com/channel/UCpSfs4lkqCUzLM1Sv76nK0Q）上，參與學生可以同時在該網站與該校課程網頁 iLearn 系統上取得教學影片的連結，計有十一支影片，平均長度約為十分鐘。此外，在教學網站也同時提供了講義的下載，而講義的內容為影片中播放之投影片再刪去關鍵字詞的方式製作，方便學生觀看教學課程時進行要點註記，強化學生學習，詳如圖 2(b)所示。本研究將網站建置在 Youtube 上，主要是因為可以利用其後端統計功能探究學生學習狀況。



(a) (b)

圖 2　教學網站講義設計

（四）課前預習

參與課程學生需於課前利用錄製之教學影片學習當週預定的進度。本研究教學活動影片上線的時程如表 4。教學影片於教學活動十天前上傳教學網站，並告知學生於線上學習後做筆記。另外，由於本研究採用分組報告，負責報告的小組需進行組內協調，並準備上臺報告的事宜。

表4

本研究教學活動影片上線的時程

週次	星期	教學與報告內容	上架影片（週五）
預備(-2)			精彩選輯、曲線下的面積 定積分、定積分的基本性質
預備(-1)			微積分第一基本定理、微積分第二基本定理
1	週五	曲線下的面積	代換積分法、奇偶函數的定積分、曲線所圍區域的面積(I)、曲線所圍區域的面積(II)
2	週三 週五	定積分、定積分的基本性質 微積分第一基本定理 微積分第二基本定理	函數的平均
3	週三 週五	代換積分法 奇偶函數的定積分 曲線所圍區域的面積(I) 曲線所圍區域的面積(II)	
4	週三	函數的平均	

三、資料蒐集與處理

（一）課堂活動

教師從當週預定要預習的影片中取材進行出題，並於課堂一開始即實施測驗。 隨堂測驗實施完畢後，立即由老師提供參考解答進行檢討，再請分配報告當次教材之小組上臺進行報告，並回答臺下同學的提問，接著教師進行補充與總結，最後進行線上即時回饋的 Kahoot!測驗。

1. 隨堂測驗

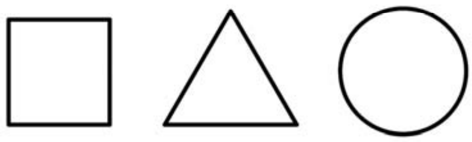
每次課堂活動一開始立即進行隨堂測驗，共計十次，每次滿分為十分，作答時間為十分鐘，測驗結束後教師會提供參考的解答（如圖 3 與圖 4），讓同學們檢視與訂正自己的作答情形。

微積分 (一) - Quiz 1

班級：________ 學號：________ 姓名：________

Question: *Just write down the answer!* (10 points)

Solution:



評分標準：畫出正方形得3 分、畫出三角形得3 分、畫出圓形得3 分，有依正確的順序由左至右畫出這三個圖形再得1 分。

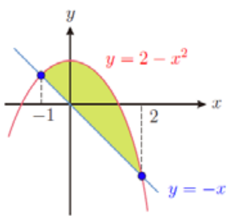
圖 3　第一次測驗「曲線下的面積」單元的試題與參考解答

微積分 (一) - Quiz 8

班級：________ 學號：________ 姓名：________

Question: Find the area between the curves $y = 2 - x^2$ and $y = -x$. (10 points)

Solution:



Note that

$$y = 2 - x^2 = -x \iff x^2 - x - 2 = 0$$

$$\iff (x+1)(x-2) = 0 \iff x = -1 \text{ or } 2. \quad \ldots\ldots\ldots (2 \text{ points})$$

Hence

$$\text{area} = \int_{-1}^{2} [(2 - x^2) - (-x)]\,dx \quad \ldots\ldots\ldots (3 \text{ points})$$

$$= \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2} \quad \ldots\ldots\ldots (3 \text{ points})$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{9}{2}. \quad \ldots\ldots\ldots (2 \text{ points})$$

圖 4　第八次測驗「曲線所圍區域的面積(I)」單元的試題與參考解答與評分標準

2. 小組報告

國民中小學九年一貫數學學習領域課程綱要（http://teach.eje.edu.tw/9CC2/9cc_92.php）與十二年國民基本教育數學領域課程綱要草案（http://12basic-forum.naer.edu.tw/）都指出：數學是一種語言，融合在人類生活世界的諸多面向，精鍊的數學語句，則是人類理性對話最精確的語言。對數學課程而言，利用精鍊、理性與合乎邏輯的數學語言進行同儕間的數學對話，其重要性是毋庸置疑的。而翻轉教學亦希望在教室內進行增加學生主動學習、主動參與、分享、討論、或同儕教學機會的活動。有鑒於此，本研究利用小組報告來實現，希望營造參與、溝通、分享與合作的氛圍。表 5 列出各組分配的報告教材主題，每次都有負責的組別上臺報告分配到的當次教材，每組報告時必須歸納重點，還得自發地適時補充教學影片沒有提到的題材，並回答臺下同學們的提問，教師亦適時引導與修正小組報告方向以掌控時間與進度，其中第一次與第四次的教材由教師示範報告與補充，讓報告的組別能夠有依循的方向，使得過程更加順利。由課後的回饋顯示報告者的表現會影響同學們回顧相關教材的成效，好的報告者會使用吸引臺下同學們的目光的策略，例如：補充較多的知識、快速回答同學們的提問，或拋出問題來引起大家的興趣。

表5

各組分配的報告教材

組別	週次（星期）	報告內容	組別	週次（星期）	報告內容
	1（週五）	曲線下的面積（教師示範教學）	6	3（週三）	代換積分法
2	2（週三）	定積分	7		奇偶函數的定積分
3		定積分的基本性質	8	3（週五）	曲線所圍區域的面積(I)
	2（週五）	微積分第一基本定理（教師示範教學）	9		曲線所圍區域的面積(II)
5		微積分第二基本定理	10	4（週三）	函數的平均

3. **線上即時回饋測驗系統 Kahoot!**

Kahoot!（https://getkahoot.com/）是一個允許教師和學生進行知識分享的遊戲式線上即時回饋測驗平台，教師可於其上建立具有文字、圖片、影像之小考或問卷，學生則可藉由平板電腦、智慧型手機或筆記型電腦等設備來共同參與，該系統並提供對錯即時回饋與簡單的統計資料，並依學生作答反應時間與正確性給予計分與排名。本研究透過教師事先設計題目，以競賽的模式檢視學生學習成效。根據學生回饋的反應，顯示同學們最喜歡這項活動，因為能夠快速應用所學的知識，回答螢幕上的提問，藉此加強印象，不僅如此，對於答對獲得高分的同學，更因此得到成就感，產生學習的動力，教師也可以利用每次答題後對應選項的選答人數，瞭解大部分

學生學習的盲點，並即時釐清或回顧重要的觀念。而在題庫的設計，則刻意加入教材以外的有趣題目，例如老師的名字、教學網站的名稱，啟發同學們再次探索網站的好奇心與意願，藉此提升學生興趣與回顧教材，而學生們事後的回饋也說明達到正面的效果。圖 5 為本次教學設計的 Kahoot!遊戲片頭畫面，圖 6 為研究者所設計之 Kahoot!遊戲介面，上方顯示題號與題目，下方則提供四個選項以供選擇，左側為倒數的時間，有 30 秒可以作答，愈快作答且正確，則積分愈高，而右方則顯示現在已經作答的人數。同時，從畫面中可以發現該系統也使用數學符號，雖不像一般使用 Latex 文字美觀，但已可適用於數學科教學。另外，也可使用 Latex 系統編製題目再轉存為圖檔方式呈現題目來解決數學表徵的問題。

圖 5　Kahoot!線上即時回饋系統畫面

圖 6　配合課程設計之 Kahoot!問題畫面

（二）課後回饋

1. 小組報告與互評

本研究設計組間互評計分項目區分為教材熟悉度、台風、步調掌控與臨場應對等四個向度（dimension），所以各組都有依這四個向度進行評量，可提高各組針對同一組評分結果的一致性。

2. 隨堂測驗批閱

各組必須批閱負責報告單元所對應的隨堂測驗。教師會在課堂測驗結束時，立即解說參考的解答與配分方式，並給予參考答案後（如圖 7），再由負責小組協助批閱，事後交由教師覆閱，因此各組批閱的品質都相當高。同時，從學生事後的質性回饋瞭解同學們亦發現可藉此機會，觀察同儕常犯的錯誤，可助避免日後相同錯誤的發生。惟仍然有同學為公平性感到憂心，但還是可以接受同學們批閱的結果。有同學瞭解到大概批閱二十份左右的試題，就能夠對於給分有一致性的效果。

微積分 (一) - Quiz 6

班級：＿＿＿＿＿＿＿＿ 學號：＿＿＿＿＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿

Question: Evaluate $\int x(3x^2-1)^3\,dx$. (10 points)

Solution:

Let $u = 3x^2 - 1$ and we get $du = 6x\,dx$. Therefore

$$\begin{aligned}
\int x(3x^2-1)^3\,dx &= \frac{1}{6}\int (3x^2-1)^3 \cdot 6x\,dx \\
&= \frac{1}{6}\int u^3\,du \quad \text{.......... (4 points)} \\
&= \frac{1}{6}\times\frac{1}{4}u^4 + C \quad \text{.......... (4 points)} \\
&= \frac{1}{24}(3x^2-1)^4 + C \quad \text{.......... (2 points)}
\end{aligned}$$

圖 7　第六次測驗「代換積分法」單元所對應的試題與參考解答

3. 組內成員互評

為了讓小組同學們有機會檢視自己與其他組員的貢獻和參與度，本研究融入組員互評之機制，除了分數的評比之外，也請同學們寫下對同組員的意見與看法。為讓學生確實反應分數與意見，由學生直接將評分結果交給授課教師後進行統計與歸納。

4. 問卷調查

為了解參與學生對於翻轉教室的想法，本研究採李克特量表（Likert scale）進行問卷調查。問卷內容主要以線上教學資源、課堂活動與翻轉反思三個面向為主軸，其中線上教學資源又分教學影片與教學網站兩個主題；課堂活動又分隨堂測驗、小組報告與線上即時回饋系統三個主題來進行題目設計，每個題目採非常同意、同意、無意見、不同意、非常不同意五種選項，並於計分時依序給予 5、4、3、2 和 1 分。表 6 與圖 8 分別表示問卷設計架構與本研究設計之問卷與統計結果。

表6

問卷設計架構一覽表

面向	主題	對應試題
線上教學活動	教學影片	1 - 6
	教學網站	7, 8
課堂活動	隨堂測驗	9, 10
	小組報告	11, 12
	線上即時回饋系統	13, 14
翻轉反思		15 - 18

翻轉教室透過大家分工合作，已經圓滿結束囉！謝謝大家全力配合，也藉此留下美好有趣的回憶，希望同學們都可以從中體驗到自主學習的精神與效益，為了瞭解活動的成效，請各位填寫以下的問卷，作為往後教學的參考與改善。

說明：請在對應的欄位打勾	非常同意	同意	沒有意見	不同意	非常不同意	
1. 教學影片的提供讓學習更有彈性，不受時空限制	27	35	0	0	0	(4.44)
2. 教學影片的內容可以讓我有效地掌握對應單元的重點	28	32	2	0	0	(4.42)
3. 教學影片的呈現清楚簡潔，令人一目瞭然	27	33	2	0	0	(4.40)
4. 教學影片所提供的範例，可以明確展示相關概念的使用時機	26	34	2	0	0	(4.39)
5. 線上教學的設計可以引起興趣，提高學習動機	23	35	4	0	0	(4.31)
6. 整體而言，活動提供的教學影片是良好的線上學習教材	29	30	3	0	0	(4.42)
7. 教學網站『微積總棟員』為觀看教學影片提供良好的管道	31	31	0	0	0	(4.50)
8. 探索教學網站『微積總棟員』可以提升線上學習的興趣	25	35	2	0	0	(4.37)
9. 隨堂測驗的設計可以反應出線上學習的成果	18	39	5	0	0	(4.21)
10. 批閱隨堂測驗讓我藉由觀察他人的解題，加深學習的印象	14	35	13	0	0	(4.02)
11. 藉由上台報告的準備，可以消化線上課程所學的知識	22	31	9	0	0	(4.21)
12. 透過聆聽同學的報告，能夠回憶教學影片的內容，加強印象	18	30	14	0	0	(4.06)
13. 課堂上快問快答的遊戲可以引起興趣，提高學習動機	31	25	6	0	0	(4.40)
14. 課堂上快問快答的遊戲可以快速地檢視學習的成效	28	29	5	0	0	(4.37)
15. 本次活動讓我與同學有更多的互動，增加討論課業的機會	20	27	14	1	0	(4.06)
16. 整體而言，我在參與本次活動中獲益良多	27	28	7	0	0	(4.32)
17. 我願意再次參與翻轉教室的教學活動	29	23	9	1	0	(4.29)
18. 經過本次體驗，我願意運用線上資源，進行各方面的學習	28	27	7	0	0	(4.34)

圖 8　翻轉教室問卷與統計結果

表 7 摘要出本研究課前、課中與課後師生活動，由表中與上方論述可以瞭解三階段中學生與老師所扮演的角色。課前，教師的角色是負責錄影教材設計與教材品質把關和學生分組事宜；

課程進行時（課中）負責小考考題設計、課程補充與學習引導和 Kahoot!即時回饋測驗系統題目與活動設計；課後則與負責批改的小組討論解答與評分準則，設計組間和組內互評表，以及最後的問卷設計。由上可知，教師的工作繁重，其目的主要是配合學生中心概念的翻轉教學設計，讓學生在課前、課中與課後都有自己的工作與應盡之職責，同時也必須參與同儕活動與互動。本研究對於課程前、中、後階段都經過思慮，導入的活動都以學習理論為支架來確保翻轉學習之效益，尤其是教材設計以多媒體學習理論和認知負荷理論為核心，融入自評與互評的分組活動都是目前相關研究中尚未被運用的方式，也是本研究之創新。上述鉅細靡遺之設計是學生中心的翻轉教學能夠成功的要件。

表7

課前、課中與課後師生活動摘要表

課前		課中		課後	
教師	學生	教師	學生	教師	學生
教材設計	觀看線上課程	考題設計	小考	提供解答與評分要點	小考批改與相關資料整理
教材錄製	教學輪值小組工作分配	課程補充	小組教學	設計組間互評表	組間互評
教材上網		引導與補充	問題與討論	設計組內互評表	組內匿名互評
學生分組		活動與考題設計	Kahoot! 線上即時回饋測驗	問卷設計	填寫問卷
考題設計					

肆、研究結果與討論

一、課程出席率

透過比較實施翻轉教室隨堂測驗卷的回收份數與本學期學生課堂出席記錄，翻轉教學使學生準時到課率由 88%提升至 91%。然而翻轉教室的隨堂測驗是於課程一開始立即實施，平時的點名則是在課堂中隨機的時間舉行，故搭配教學者於教學現場的觀察，準時到課率會大於 3%，這與加拿大溫格華 British Columbia 大學研究結果顯示學生出席率增加的結果一致（Aronson & Arfstrom, 2013）。

二、錄影課程觀看率

根據圖 9 與圖 10 統計結果顯示，大部分同學都能夠在活動前一天觀看預定的教學影片，以準備隔日活動的實施，觀看次數有時會略低於或是略高於參與人數，依據之後的瞭解，有部分

同學會一同觀看影片導致觀看次數略低，而有部分同學會重覆觀看影片以複習，使得觀看次數提升。

圖 9 翻轉教室活動中所有影片觀看次數統計

圖 10 翻轉教室活動中所有影片觀看時間（以分鐘為單位）統計

為了解學生是否有確實觀看教學影片，研究者在其中兩支教學影片中，設計了測驗的提示，第一個是「曲線下的面積」單元為第一個實施並進行隨堂測驗的教材，亦擔任從傳統板書授課至翻轉教學的過渡教材，因此於教學影片最後公佈第一次測驗的試題（圖 11），有看影片就知道只須依序畫出正方形、三角形與圓形，就可以得到第一次測驗的分數。YouTube 定義觀眾續看率（https://support.google.com/youtube/answer/1715160?hl=zh-Hant），並以之為影片能否持續吸引觀眾的整體指標，該指標又分為絕對觀眾續看率和相對觀眾續看率，本研究採用絕對觀眾續看率（以下簡稱續看率），可以展現以秒為單位，影片中時間點k的觀看次數佔該影片觀看總次數的百分比，亦即

$$\text{影片中第 } k \text{ 秒的續看率} = \frac{\text{影片中第 } k \text{ 秒的觀看次數}}{\text{該影片觀看總次數}} \times 100\%$$

由公式可以看出：如果時間軸某個片段（例如：重要概念）被重播，則該片段的續看率會上升，甚至可能超過 100%，若觀眾點選時間軸跳過某個片段，則該片段的續看率會下降。從本研究學生續看率的數據可以得知，同學們都有留意到這個提示，並於事後分享這是個有趣且極富創意的點子。而在第二個「曲線所圍區域的面積(I)」單元由於涉及較為繁複的運算，因此也在影片提示對應的題目，讓同學們及早練習和準備，事後同學們也表示這讓他們在這個計算複雜的單元，提供了明確的方向與自信。圖 12 顯示教學影片「曲線下的面積」的續看率統計，在 3 分 40 秒左右提示出現時有明顯的上升。圖 13 為教學影片「曲線所圍區域的面積(I)」中間的提示，圖 14 為教學影片「曲線所圍區域的面積(I)」的續看率統計，可以發現：在 9 分 30 秒左右提示出現時有明顯的上升，甚至還突破 100 %。

圖 11　教學影片「曲線下的面積」最後的提示畫面

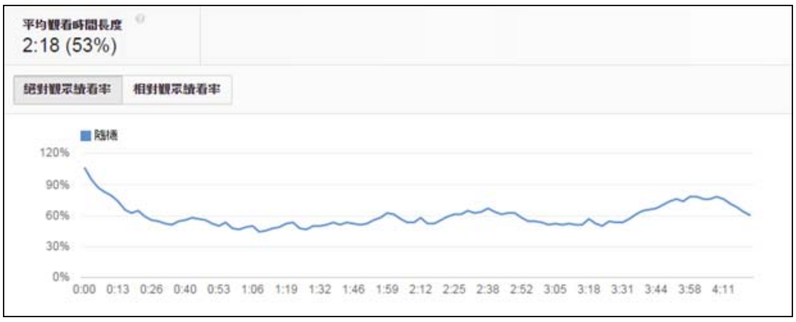


圖 12　教學影片「曲線下的面積」的續看率統計

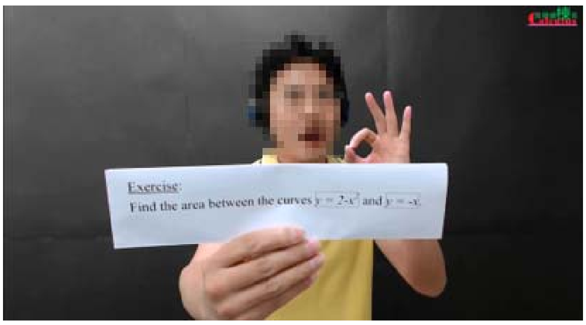


圖 13　教學影片「曲線所圍區域的面積(I)」中間的提示畫面

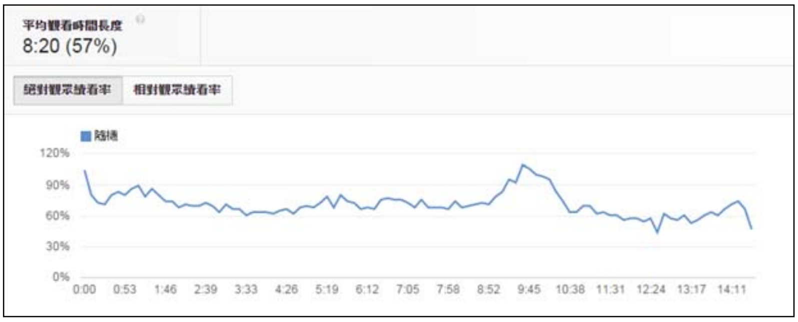


圖 14　教學影片「曲線所圍區域的面積(I)」的續看率統計

三、隨堂測驗結果

圖 15 為學生在這十次測驗的表現情形，從圖中可以推論，一開始學生不瞭解翻轉教學模式運行方式，因此對於觀看影片應該是相當認真，且能夠注意影片中的每個細節，在第一次「曲線下的面積」單元測驗的表現相對較好，不過第二次到第六次測驗成績相對於第一次有下降但持平的趨勢，但當同學們越來越熟悉這個教學模式之後，第七次到第十次測驗的成績能呈現穩定逐步提升的趨勢，且標準差則大致相同，顯示事前觀看影片的翻轉教室教學方式的效益可以逐漸顯現。此外，這樣的設計最顯而易見的就是準時到課比例的提高，僅有少數同學會遲到或請假。

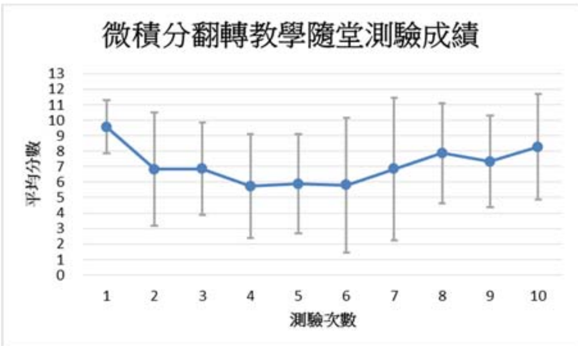


圖 15　十次隨堂測驗的平均與標準差

四、小組報告與組間互評

在小組報告的組間互評方面，結果顯示有部分組別給他組的分數皆偏高，或是皆偏低，不過相對而言，大家對於表現較佳或是不理想的組別會有相近的看法。各組評分同時也必須條列出報告組別表現的優缺點（圖 16），教師亦結算各組的評分並統整對應的意見，再回饋給報告的組別（圖 17），根據事後學生的反應，都能為報告的小組提供極具價值的參考，而較後報告的組別，更能夠因為回饋單的填寫過程，藉由觀察前面他組的表現，找到適合的報告模式。圖 18 為各組評分之結果。

微 積 分 分 組 報 告 回 饋 單

回 饋 者 第 十 組	組 員	[redacted]	評 比 (100%) (A)+(B)+(C)+(D)
報告組別	第 二 組		91
報告主題	定積分		

各項評比 (滿分 25)	教材熟悉度 (A)	台 風 (B)	步調掌控 (C)	臨場應對 (D)
	20	24	23	24

備註：以下請設定字體大小為 12 書寫，直敘或條列式均可，內容請勿超過本張 A4 大小。

意 見 回 饋：(請寫優缺點至少共五項)

1. 有梗，講課輕鬆易懂
2. 音量夠大，坐在倒數第二排都聽得很清楚
3. 台風穩健，講解速度適中
4. 結尾有點倉促，有點可惜
5. 有有獎徵答，很酷
6. 首當其衝的組別卻能有良好的表現，應該要加點分數

圖 16　第十組針對第二組上臺報告表現所填寫的回饋單

微 積 分 分 組 報 告 回 饋 統 整

報告組別	組別編號	第 二 組							評 比 (100%) [平均分數]	
	報告主題	定積分								
組 員	[redacted]								92.11	
成績分布 (填入順序為亂數)	88	96	95	97	92	98	88	91	84	

意 見 回 饋：

1. 台風穩健又幽默風趣，對於學生發問可以適當回答並清楚講解。
2. 與大家互動頻繁，不會讓台下的學生昏沉。
3. 贅字不多，講話很順暢。
4. 可以加強數學常用的英文字彙與語法。
5. 有獎徵答很不錯，準備小禮物引起同學的回應，老師！我肚子餓了！
6. 有時候會扯到一些別的地方，稍微偏離主題。
7. 與台下的互動頻繁，會帶動場面不讓同學覺得無趣，氣氛熱烈。
8. 有常使用的口頭禪『這個』、『那個』、『嗯…對』、『對不對』，可以稍加留意。
9. 有停下腳步詢問台下同學是否有問題，瞭解大家的學習狀況。
10. 隱約感覺還是稍微緊張。
11. 對教材相當熟悉。

圖 17　經教師統整各組給第二組的回饋單後，發還給第二組的回饋意見

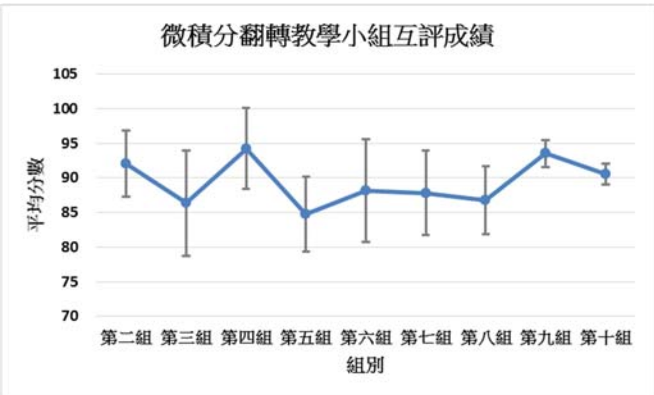
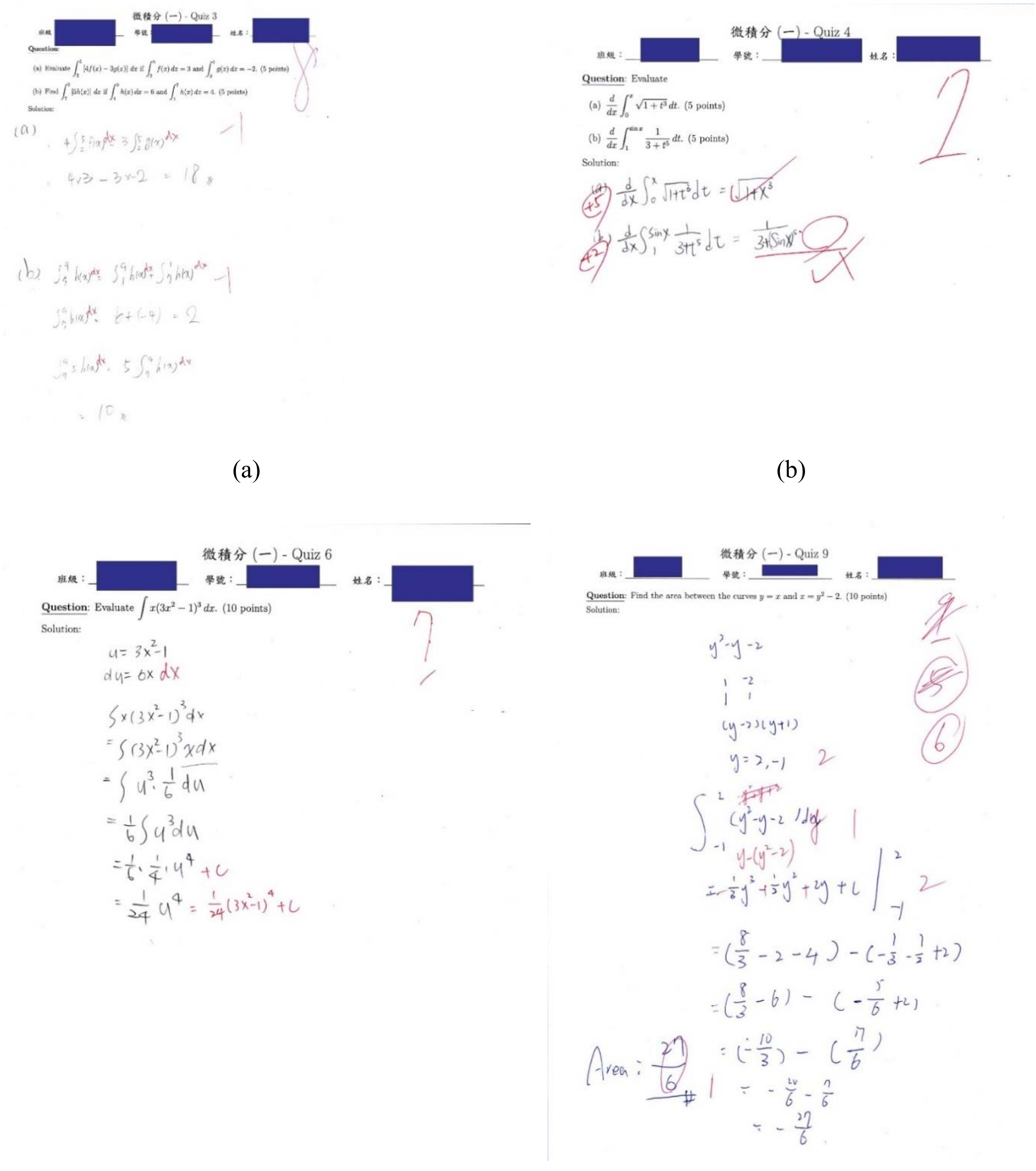


圖 18　各組評分結果

五、學生常見解題錯誤

藉由分組批改同學考卷，學生可以發現同學常見的錯誤如下圖 19 所示。



(a)　(b)　(c)　(d)

圖 19　學生常犯錯誤

圖 19(a)為第三組批閱第三次測驗「定積分的基本性質」單元某位學生作答的結果，從圖中可以瞭解部分學生在書寫積分符號時，會遺漏後方 *dx* 符號。圖 19(b)為第四次測驗「微積分第一基本定理」單元某位學生作答的情形，顯示出未乘以上界函數之導數。圖 19(c)為第六組批閱第六次測驗「代換積分法」單元某位學生作答的結果，可以看出兩個常見的錯誤，忘記加上積分常數 C，並將變數 *u* 以變數 *x* 的表示法代回。圖 19(d)為第九組第九次測驗「曲線所圍區域的面積(II)」單元某位學生作答的結果，當中顯示兩個常見錯誤，被積分式中被減式與減式的錯置，且誤將後方的符號 *dy* 書寫成 d*x*。

六、學生對翻轉教學問卷分析

本次問卷信度值（Cronbach α）為 0.90，效度採內容效度，由兩位研究者進行討論與設計。問卷回收採匿名繳交，共回收 62 份問卷。

（一）敘述統計

問卷統計結果顯示這三個面向的平均分數分別為 4.41、4.21 與 4.25，而整體平均分數為 4.31，顯示大家對於翻轉教室的滿意度都很高（詳如圖 8）。根據問卷問題，整理學生在每題的同意百分比（選擇同意和非常同意之比例）與各面向之平均同意百分比（選擇同意和非常同意之比例之平均）分別如表 8 和表 9 所示。表 8 顯示除了第 10、12 和 15 題外學生的同意百分比都相當的高。由圖 8 問卷可以看出，除了第 15 題有一位學生表達本研究活動無法增加和同學互動與討論課業的機會外，剩下的都至少選了「沒有意見」。整體來說，學生對於整體的翻轉教學活動安排，應該都可以接受也喜歡這樣的教學活動與課程內涵。表 9 提供從面向與主題來檢視學生態度。由表 9 中可以發現學生對於教學影片和教學網站的滿意度非常高，顯示這樣的方法可以更有彈性的學習，而課程內容設計和提供的範例清楚簡潔又不失生動，可以引起學生學習興趣，提高學習動機。相對其他主題，小組報告的同意百分比雖然比較低但也有 81.5%，顯示組內工作分配和成員相互合作需要磨合，但大部分仍同意藉由向同學講解課程的方式可以讓自己對於課程內容更能夠融會貫通並強化印象。最後一項翻轉反思顯示約 84.3%的學生覺得能從課程中獲益，並願意再次參與翻轉教室。

表8

問卷問題同意百分比（%）

題目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
%	100	96.8	96.8	96.8	93.6	95.2	100	96.8	91.9	79.0	85.5	77.4	90.3	91.9	75.8	88.7	83.9	88.7

表**9**

問卷設計架構一覽表

面向	主題	對應試題	平均同意百分比
線上教學活動	教學影片	1 - 6	96.5%
	教學網站	7, 8	98.4%
課堂活動	隨堂測驗	9, 10	85.5%
	小組報告	11, 12	81.5%
	線上即時回饋系統	13, 14	91.1%
翻轉反思		15 - 18	84.3%

（二）質性回應

根據學生在開放性問題的回應，茲整理如下：

1. 小組合作

（1）各組對於組員表現共識高

小組合作中，組員間對於組長和上臺報告的同學或認真的同學會給予肯定；然對於表現不佳的同學也會勇於評定。

S:這次的「翻轉教室」很有趣，個人覺得組長很辛苦，再來就是紀錄的人，還有報告的人，因為他們要多花時間去準備額外的事項，所以分數應該要提高一點。

S:XXX 為報告人，故分數為 10 分；XXX 為組長，但在處理事務上有些許問題，故 9 分。

S:XXX 的台風很不錯，多半都是以他為主在主持。

S:XXX 為組長，要注意很多事；XXX 為上台做很多準備；XXX 負責回饋單，key 上電腦。

（2）對於小組合作能夠確實反應貢獻度

組內互評提供同學確實反應部分組員不負責任之作為，並對於用心的組員給予大力讚揚與高分，說明同學們都能認真客觀的評價組員的貢獻，亦有同學對自己或是整個小組的努力表達肯定給予鼓勵。因為組員人數較多，也容易進行交互參考，互評讓組員努力更真實被呈現。

S:3 位組員完全沒見過參與討論。

S:可能是因為我們這組都是重修生（不同系）的關係，所以有些地方沒辦法配合得很好，但從行動中能感受出大家事實上都是相當程度的用心，很開心能參與翻轉教室這個活動，受益良多。

S:大家對於此活動十分用心、盡力。

S:男的帥，女的美，每個人都有完成應盡的職責，也感謝老師用心準備的教學影片。

S:組員都有盡到自己應負的責任，老師也很辛苦，提供如此棒的課程給我們體驗。（豎起大姆指的圖案）

（3）同學能進行反思，並重新檢視自己應盡的義務與改進方向。

S:老實說我覺得自己沒幫上什麼忙，只有改考卷而已...翻轉教室這個活動很好玩，謝謝老師！

S:我能做的事應該可以更多，希望大家體諒。

（4）團隊合作學習的不同體驗

部分同學反應事前根本無法想像微積分這門傳統的數學課，可以透過小組合作的方式學習，讓他們有可以交流的機會，相互討論，使得彼此在能力上都有提升，這也和問卷第 15 項的統計結果，有 75.8%的學生同意這個觀點相呼應。尤其是上臺發表與測驗的批閱更是不同的體驗，讓同學們可以試著從教師的觀點來學習與成長，提供不同的視野，問卷第 10-12 題統計結果也具體反應出學生的看法。

S:這個活動很棒，可以讓我們自主學習很多，不只課業上，還有團體上的，第一次體驗這種活動。

S:謝謝老師給我們這次機會，也第一次體驗上台的臨場緊張感，希望可以再次參與翻轉教室。

S:謝謝老師設計這個活動，讓我可以體驗小組的分工合作。

2. 翻轉教學

（1）可以不受時空限制進行學習

依據圖 8 翻轉教室問卷第 1 項的填答，所有同學們都同意透過線上觀看教學影片的方式，可以讓學習不受時空地點的限制，給予他們很大的自由度，由學習者拿回掌控權，根據自己的步調進行學習。對於教學影片的呈現與成效，大家都給予肯定正面的評價，包括內容的設計與

呈現的方式都是吸引學生目光的重要的環節，反應於問卷第 2~4 項的提問中，平均高達 96.8%的學生填選非常同意或是同意。不僅如此，有不少學生對於講義的提供也有正向的肯定，可以不必流於機械式快速地抄寫筆記，只要在講義上的填空處寫上答案或標示重點即可，這增加學生在教學影片上的專注力。

S:翻轉教室讓我有很多學習機會，原先在家都在玩電腦，因為翻轉教室一上課就進行測驗，所以在家一定會花二、三十分鐘讀書，沒有讀書就沒有加分機會，而上課時學習效果很不錯。

S:老師影片中的講解生動有趣，希望之後還有類似的活動。

S:翻轉教室讓我們不會那麼排斥微積分，至少會覺得上課是很有趣的，而且效率很高，因為事前在家先看教學影片，上課搭配小考，再次覆習，並加上玩遊戲，我覺得效果比平常上課還要好。

S:我覺得微積分翻轉教室還不錯，因為在家裡會先預習，不懂的地方可以 replay 弄到懂為止，而且不必自己抄筆記，只要在講義上加注與標示對應的重點，會比較方便，而之前上課抄寫板書，可能聽了就過去了，因此有時聽不太清楚。我覺得這個活動很好，加油！

（2）教學網站「微積總棟員」提供良好的平臺

對於一個有規劃與理念的教師，既有的 iLearn 系統也許無法滿足原有的想法，教學網站「微積總棟員」的架設，讓學生可以系統化取得教學影片，也設計同學可以探索的細節或是蘊涵學習者會感到興趣的資訊，都獲得正向的效果。由問卷第 7 題的統計結果可知所有的同學都同意教學網站確實佔有重要的地位。

（3）線上測驗 Kahoot!帶來新鮮感

大部分同學反應 Kahoot!遊戲的進行是帶動課堂最活潑也最高潮的部分，藉由即時的回饋與競賽，同學們都展現高度的興趣，參與的意願都很高昂，反應也很熱烈。由於題目的設計，讓於課前有充份準備的同學能夠在短時間作答，因此競爭有時相當激烈，部分題目融入小小的陷阱，有些同學為了搶快作答可能會答錯，不時傳來此起彼落的驚嘆聲，讓課室氣氛輕鬆有趣；有同學反應題目中穿插教材以外的問題，例如老師的名字、教學網站的名稱等，是最為有趣的，天外飛來一筆的提問讓同學轉換心境，達到畫龍點睛的效果。這些反應問卷第 13、14 題分別獲得 4.40 與 4.37 的高分。

S:我覺得這次翻轉教室的課程很有趣、很好玩，尤其是 Kahoot，每次都有參與還拿了一次第一名。

S:覺得好棒！希望之後還能有這樣的課程。

S:謝謝老師的用心，影片很精美；Kahoot 也很好玩！

（4）認識教師設計活動的用心，並激發學習的熱情

多數學生皆在意見回饋中肯定教師於本活動的用心設計與規劃，藉由正向的帶領同學們克服於學習型態轉變與嘗試所遭遇的疑慮和不安，進而全心投入，享受自主學習的樂趣，提升活動的參與度並從中得到正面的收穫與體驗，整體而言，有 88.7%的學生認為於本活動獲益良多，亦有 83.9%的學生願意再度參與翻轉教室活動。

S:從知道不論是後製、剪接、動畫和拍攝都（老師）自己一手包辦，真心打從心底覺得了不起，也希望自己可以朝棟哥邁進。真是太強啦！Keep going！

S:這次的活動可以讓我對微積分增加興趣，不再受限於板書。

S:這是個很有意思的活動，非常實用，老師您所耗費的大量前置作業時間心力，非常值得。

S:老師的用心，我看了很感動，為了一個活動規劃了很久，也很慶幸我可以參加這個活動，謝謝老師。

S:觀看你微積分總棟員的影片，每次的開頭，都讓我有想繼續看下去的衝動，我覺得效果還不錯！就像是看你的 MV 一樣，希望以後還可以再看到，謝謝老師！

S:謝謝老師的用心，影片很精美；Kahoot 也很好玩！

伍、結論與建議

本研究對大學微積分課程進行翻轉教學進行探究，主要目的在開發暨設計適合大學微積分翻轉教學之數位教材與學習活動、了解大學生在微積分翻轉教學之解題表現和探究大學生對於微積分翻轉教學的態度。本研究引入認知負荷理論和多媒體學習理論的概念來設計課程，期能讓學生在教材學習上能夠減少認知負荷，並增進微積分基模的建構、調適和連結；在教學活動中，設計學生中心的合作學習，讓學生可以練習以數學為語言的溝通過程，並能夠在小組合作中認真參與，正視自己在團隊中所應扮演的角色，並導入組間互評和組內互評的機制，讓不同組別之間可以進行觀摩，同組之間對於彼此的責任也可以交互參照，減少鄉愿的評定。對於學生學習方面，每節課開始的小考可以督促學生學習指定的教學錄影，課間引入線上即時互動回

饋系統 Kahoot!不僅有重點提示和回憶課程的效果，還能活絡課堂氣氛，改變一般微積分課程通常是嚴肅的印象。

一、結論

（一）翻轉教學確實有助於學生學習，改變教室內外學習之氛圍。翻轉教學課外非同步學習讓學生可以採自我步調式（self-paced）學習，學生都給予正面的回饋。教室內的學習活動經過適當的安排也可以營造問題討論、學生參與、同儕互動、團體合作更多的環境，這些都與 Jungić 等人（2015）的問卷調查結果類似。Sahin 等人（2015）從對於微積分翻轉教室研究問卷中發現學生對於不同類型的教材，例如：傳統教科書、翻轉教學影片、其他文件等，學生會比較依賴翻轉錄影教材，理由是可以快速備課。這也反應當有比較好又快速的備課方法，學生喜歡選擇這樣的方式。惟上述兩研究並未探究學生在這方面學習之質性描述，難以實際瞭解學生想法，而本研究則可以從學生的描述中更瞭解學生想法，作為未來繼續施行時重要參考與依據。另外，本研究並未邀請數位學生進行更深入的訪談，以發現更深、更廣的問題，將於未來進行後續研究時納入必要安排的活動。

（二）翻轉學習數位教材設計時將認知負荷理論與多媒體學習理論納入考量，確實能夠讓學生接受數位教材、感受教師用心與降低學習時的認知負荷。許多研究顯示實施翻轉教學最困難的部分，莫若於事前的準備，包括教材的編製、錄製與後製、平台的設置與課程的規劃，其中又以教材的製作最為艱辛，每一項都必須投注大量的時間與心力（Aronson & Arfstrom, 2013; EDUCAUSE, 2012; Flipped Learning Network, 2014）。目前翻轉學習的文獻鮮少針對課程內容進行配合的設計，以 Jungić 等人（2015）一文中只有教師手寫、手繪的截圖，對於學生筆記並未進行設計，而 Sahin 等人（2015）也只有問卷結果分析，相關教學流程、教材設計或錄影方式也未提及。本研究無論在教材設計、教材品質和學生講義都融入理論依據，可確保線上教學品質，同時為保留數學手寫的優點，設計學生筆記檔案，利用教學檔案和筆記檔案之差異，讓學生可以一邊聽一邊手寫，以增進學習品質並成為驅動學生仔細觀課的因素之一。

（三）翻轉學習教學活動融入小組合作，有助於同學間之溝通與學習。小組活動一般最讓人詬病的就是組內學生得分一致，對努力與不努力的學生給予齊頭式平等的評定，本研究藉由組內成員匿名互評機制，採質性和量化評定並重，發現透過彼此間評定交互參照更能瞭解個別學生的努力程度與在團隊中的角色責任。這樣的設計目前在文獻中並未被運用，從本文中可以發現這樣的設計確有打破小組合作齊頭式平等以及學生間為了和諧態度鄉愿的情形。從學生的意見中可以發現，對於認真負責的同學給予嘉許，對於低度參與的同學也會直接表達意見。此外，對於參與度不佳的學生教師可以直接掌握，並進行適時輔導。

（四）適時加入互動式評量可以活絡上課氣氛。隨著科技進步，雲端概念正風行草偃之際，許多免費網路平台之功能也越來越強，許多類似 Kahoot!之線上即時回饋評量系統結合手機、平板電腦或筆記型電腦在 Wi-Fi 環境下組合成競爭式或遊戲式學習環境，確實有助改善一般數學課程沈悶、嚴肅的氣氛。Kahoot! 與 Jungić 等人（2015）使用的按按樂（clicker）都是即時回饋系統（interactive response system, IRS）可立即蒐集學生反應，也可促進教室學習氣氛。

（五）採用穩定學習平台並使用後端分析程式，有助於學生學習和教師瞭解學生線上學習。影音檔案佔用網路頻寬甚巨，尤其必須考量可能需要提供大量使用者同時上線問題，本研究之教學課程架設在 Youtube 上讓教學影音串流（streaming）可以穩定的傳送，不至影響學生在學習情緒，也可以藉由後端程式瞭解學生收看情形和收看時間。大數據概念方興未艾，未來藉由後端程式進行分析，或許可發掘更多有用訊息來修正翻轉學習之諸多環節，使之更臻完善。

（六）隨堂測驗是驅動學生按規定收看線上教學的重要機制。如文中所呈現，學生因為一上課就進行測驗，所以一定會花時間學習，效果比一般教學還好。若學生線上觀課後，規定使用線上選擇題進行測驗（Jungić et al., 2015），只能蒐集每個題目對於學生的選答情形和數概念對於學生的難易程度，卻難以知曉學生是否認真作答，且對於學生個別或群體所犯之錯誤類型（error pattern）或迷思概念（misconception）也難以發現，因此本研究選擇使用課前小考，實驗中從網站後端程式可以發現學生在課前一天續看率很高，是驅動學生認真觀課的重要技巧之一。

二、建議

（一）教材製作宜組團隊分工合作，相互支援，以減輕教學者負擔。翻轉教學程序繁複包括教材的編製、錄製與後製、平台的設置與課程的規劃等，因此若能組成團隊一起合作，將可以減輕負擔，提升品質。如 Jungić 等人（2015）指出翻轉教學需要經費不少，因此若有經費預算支持為佳。

（二）需有穩定的平臺與介面，若有後端收看行為分析軟體者為佳。本研究使用 Youtube 平臺雖然穩定，但是後端分析軟體無法對於個別學生的學習進行監控以探勘更多有用的訊息。因此，若可選用提供大量使用者同時上線之穩定串流伺服器和監控學生學習行為的後端分析軟體是更好的選擇，不過這些軟硬體設備耗費大量經費。

（三）需融入強化學生觀看影片的誘因。在本研究中採用影片中植入認真觀課學生才看得到的有趣問題、學生筆記和教學影片使用的投影片存在差異等技巧，學生發現後覺得有趣，對後續的學習也有正向效益。另外，若系統後端分析軟體可以記錄個別學生學習情形，則也可藉由告知學生相關記錄，作為驅動認真觀課的重要因素。

（四）需注意學生數位設備落差之問題。本研究使用學生喜歡的電子設備結合 Kahoot!來活絡教室氣氛，然而未必每位學生皆有相關設備，必須於翻轉教學前告知學生，並調查沒有相關

設備的學生，屆時教師宜協助或提供設備予學生，以解決數位設備落差的問題。

（五）需注意學生參與度不佳與期中課程退選問題。每種教學法都會無法適應每位學生，因此有少部分學生對課程和團體的參與率很低，會影響個人成績和團隊成績。另外，研究實驗對象為大學生時，少數學生會於期中進行課程退選，教師對於人數和小組成員之組成必須更注意。

參考文獻

駐洛杉辦事處教育組（2013 年 8 月 8 日）。研究顯示翻轉學習確有成效。**教育部電子報**。取自 http://epaper.edu.tw/old/windows.aspx?windows_sn=13316【Education Division, Taipei Economic & Cultural Office in Los Angeles (2013, August 8). Research shows flipped learning does work. *MOE EPAPER*. Retrieved from http://epaper.edu.tw/old/windows.aspx?windows_sn=13316 (in Chinese)】

黃政傑（2014）。反轉教室的理念、問題與展望。**臺灣教育評論月刊**，**3**（12），161-186。【Hwang , J. J. (2014).The flipped classroom and its concepts, problems, and perspectives. *Taiwan Educational Review Monthly*, *3*(12), 161-186. (in Chinese)】

劉怡甫（2013）。**2013 地平線報告—高教篇報導**。取自：http:// http://ocw.fju.edu.tw/elearning/index.php?option=com_content&view=article&id=154:2013&catid=28:current-users&Itemid=55。【Liu, Y. F. (2013). *NMC horizon report - 2013 higher education edition*. Retrived from http:// ocw.fju.edu.tw /elearning/index.php?option=com_content&view=article&id=154:2013&catid=28: current-users&Itemid=55 (in Chinese)】

Arnold-Garza, S. (2014). The flipped classroom teaching model and its use for information literacy instruction. *Communications in Information Literacy*, *8*(1), 7-22.

Aronson, N., & Arfstrom, K. M. (2013). *Flipped learning in higher education*. Retrived from http://flippedlearning.org/wp-content/uploads/2016/07/HigherEdWhitePaper-FINAL.pdf

Baddeley, A. (1992). Working memory. *Science*, *255*, 556-559. doi: 10.1126/science.1736359

Bergmann, J. (2013, August 19). *Ten questions you should ask before you flip your classroom*. Retrived from http://jonbergmann.com/new-to-the-flipped-classroom-10-things-to-consider-before-you-start/

Bergmann, J., & Sams, A. (2012). *Flip your classroom: Reach every student in every class every day*. Washington, DC: International Society for Technology in Education.

EDUCAUSE. (2012, February 7). *7 things you should know about flipped classrooms*. Retrived from http://net.educause.edu/ir/library/pdf/ELI7081.pdf

Estes, M., Ingram, R., & Liu, J. C. (2014, July 29). *A review of flipped classroom research, practice, and technologies*. Retrived from https://www.hetl.org/a-review-of-flipped-classroom-research-practice-and-technologies/

Flipped Learning Network. (2014, March 12). *Definition of flipped learning*. Retrived from http://flippedlearning.org/definition-of-flipped-learning/

Fulton, K. (2012). Upside down and inside out: Flip your classroom to improve student learning. *Learning & Leading with Technology*, *39*(8), 12-17.

Hamdan, N., McKnight, P., McKnight, K., Arfstrom, K. M. (2013a). *A review of flipped learning*. Retrived from http://flippedlearning.org/wp-content/uploads/2016/07/LitReview_FlippedLearning.pdf

Hamdan, N., McKnight, P., McKnight, K., & Arfstrom, K. M. (2013b). *The flipped learning model: A white paper based on the literature review titled a review of flipped learning*. Retrived from http://flippedlearning.org/wp-content/uploads/2016/07/WhitePaper_FlippedLearning.pdf

Honeycutt, B. (2012). *The lecture vs. the flip*. Retrived from https://barbihoneycutt.com/the-lecture-vs-the-flip/

Jungić, V., Kaur, H., Mulholland, J., & Xin, C. (2015). On flipping the classroom in large first year calculus courses. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(4), 508-520. doi:10.1080/0020739x.2014.990529

Kadry, S., & El Hami, A. (2014). Flipped classroom model in calculus II. *Education*, *4*(4), 103-107.

Lage, M. J., Platt, G. J., & Treglia, M. (2010). Inverting the classroom: A gateway to creating an inclusive learning environment. *The Journal of Economic Education*, *31*(1), 30-43. doi: 10.2307/1183338

Mayer, R. E. (2001). *Multimedia learning*. New York, NY: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139164603

Mayer, R. E. (Ed.) (2014). *The Cambridge handbook of multimedia learning* (2nd ed.). New York, NY: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139547369

Muzangwa, J., & Chifamba, P. (2012). Analysis of errors and misconceptions in the learning of calculus by undergraduate students. *Acta Didactica Napocensia*, *5*(2), 1-10.

Pappas, P. (2012, June 7). *The flipped classroom: Getting started*. Retrived from http://www.slideshare.net/peterpappas/the-flipped-classroom-getting-started

Paas, F., Renkl, A., & Sweller, J. (2003). Cognitive load theory and instructional design: Recent developments. *Educational Psychologist*, *38*(1), 1-4. doi: 10.1207/S15326985EP3801_1

Paivio, A. (1986). *Mental representations: A dual coding approach*. Oxford, UK: Oxford University Press.

Pierce, R., & Fox, J. (2012). Vodcasts and active-learning exercises in a “flipped classroom” model of a renal pharmacotherapy module. *American Journal of Pharmaceutical Education*, *76*(10), 1-5. doi: 10.5688/ajpe7610196

Sahin, A., Cavlazoglu, B., & Zeytuncu, Y. E. (2015). Flipping a college calculus course: A case study. *Journal of Educational Technology & Society*, *18*(3), 142-152.

Sweller, J., van Merriënboer, J. J. G., & Paas, F. G. W. C. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, *10*(3), 251-296. doi: 10.1023/A:1022193728205

Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive load theory: Explorations in the learning sciences, instructional systems and performance technologies* . New York, NY: Springer. doi: 10.1007/978-1-4419-8126-4

Yarbro, J., Arfstrom, K. M., McKnight, K., & McKnight, P. (2014). *Extension of a review of flipped learning*. Retrived from http://flippedlearning.org/wp-content/uploads/2016/07/Extension-of-FLipped-Learning-LIt-Review-June-2014.pdf

Wittrock, M. C. (1989). Generative processes of comprehension. *Educational Psychologist*, *24*(4), 345-376. doi: 10.1207/s15326985ep2404_2