周保男、吳重言（2014）。
立體視覺化工具融入國小表面積教學之研究：以 Google SketchUp 為例。
臺灣數學教育期刊，1（1），1-18。
doi: 10.6278/tjme.20140307.002

立體視覺化工具融入國小表面積教學之研究：以 Google SketchUp 為例

周保男　　吳重言
國立臺南大學教育學系教學科技組

本研究旨在探討接受「Google SketchUp 輔助教學（使用推拉功能與不使用推拉功能）」與「傳統講述教學」三種教學模式，對學生複合形體表面積學習成效之影響。本研究採用不等組前後測設計的實驗研究法進行教學實驗，實驗對象為臺南市某國小五年級三個班級共 84 名學生，以班級為單位，隨機分成三組。經由三週實驗教學後，實施複合形體表面積成就測驗後測。研究結果發現，「Google SketchUp 輔助教學具推拉功能模式」的學習成效優於「Google SketchUp 輔助教學不具推拉功能模式」及傳統講述教學模式，但「Google SketchUp 輔助教學不具推拉功能模式」和傳統講述教學模式在學習成效上無顯著差異。由本實驗的結果可得知，當教師將資訊科技融入數學教學時，假使資訊科技的影響力不足，其衍生的學習效果與傳統教學無異。

關鍵詞：立體視覺化工具、表面積教學、準實驗研究、資訊科技融入數學教育

通訊作者：周保男，e-mail：pnchou@mail.nutn.edu.tw
收稿：2013 年 7 月 25 日；
接受刊登：2014 年 3 月 7 日。

Chou, P. N., & Wu, C. Y. (2014).
Integrating 3D visualization tools into teaching surface area in elementary school classrooms: An example of Google SketchUp.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *1*(1), 1-18.
doi: 10.6278/tjme.20140307.002

Integrating 3D Visualization Tools into Teaching Surface Area in Elementary School Classrooms: An Example of Google SketchUp

Pao-Nan Chou　　Chong-Yan Wu
Program of Instructional Technology, Department of Education, National University of Tainan

The purpose of this study was to examine the effects of three teaching models on the effectiveness of learning the surface area of composite solids in elementary school settings: the Google SketchUp assisted instructional model with push-and-pull function, the Google SketchUp assisted instructional model without push-and-pull function, and the traditional instructional model. This is an empirical study, utilizing a nonequivalent pretest-posttest control group design. Participants were recruited from an elementary school in Tainan city, including three classes with a total of 84 fifth-graders. Each class was randomly assigned one of the three teaching models. After a three-week teaching experiment, all the participants completed a posttest on the surface area of composite solids. The results showed that students who received the “Google SketchUp assisted instructional model with push-and-pull function” performed better than students who received the “Google SketchUp assisted instructional model without push-and-pull function” and students who received the “traditional instructional model”. However, no significant difference was found in learning effectiveness between the “Google SketchUp assisted instructional model without push-and-pull function” and the “traditional instructional model”. The findings indicated that integrating information technology into mathematics education would only be effective when the tools are comprehensively implemented; otherwise, it would not significantly differ from the result of employing traditional classroom teaching strategies.

Keywords: 3D visualization tool, surface area instruction, quasi-experimental study, information technology integrated into mathematics education

Corresponding author：Pao-Nan Chou，e-mail：pnchou@mail.nutn.edu.tw
Received：25 July 2013;
Accepted：7 March 2014.

壹、緒論

檢視目前的傳統表面積教學方式，在教材內容方面，大多以平面圖畫來呈現立體圖形之概念，學生有不易理解的問題存在（王學武、蔡佳穎、陳宜均、賴蕙慈，2011）；在教具方面，有傳統紙本附件和教科書出版商所製作的教學光碟，但類型有限，製作與保存相當困難，不便於大班教學與個別操作（毛銘覬、呂長聰、黃品慈、湯中揚、劉松柏，2010；呂慧君、姚如芬，2005）；於教學活動上，偏重於算術的運用和公式的套用（陳鴻綸、曹雅玲，2005），缺乏概念實際應用。上述因素皆會影響學生數學概念的發展（Bonotto, 2003），如能利用資訊科技融入教學來處理這些問題，或許能有效提升學生的數學學習效果（NCTM, 2000）。

溫嘉榮（2003）認為「資訊科技融入教學」即是將資訊科技整合於教材、教具及教學活動中，使資訊科技成為老師與學生於課室活動中的教與學工具，解決傳統教學上的不足。例如，在教材內容及教具上，資訊科技能處理多樣類型的檔案，如圖片、文字、影片、音訊等，以多樣式的多媒體型態呈現教學；在教學活動上，資訊科技能經由電腦模擬讓教學事件更具探索性，而擬真的操作情境，更可促進學生思考推理與問題解決（鐘樹椽、程璟滋，2005）。

過去的研究文獻發現，透過資訊科技融入數學科教學，可將抽象概念予以視覺化、具體化與多樣化的呈現，利於學習者理解，並能提升學習者的學習動機與學習效果（Moyer, Bolyard, & Spikell, 2000），且因提供經驗分享與交流的功能，更可提升教學品質與效能（Newby, Stepich, Lehman, & Russell, 2006; Roblyer, 2003; Roblyer & Edwards, 2000）。近年來，在資訊科技融入數學科教學範疇中，以運用立體視覺化工具（結合視覺化效果與互動式科技）為主要趨勢。實證研究顯示此類工具能快速、有效提供充分的直覺化情境，讓學生透過建構立體圖形、翻轉圖形與觀看圖形的不同視角，協助學生了解立體幾何中難以理解的部分，並予學生發展空間能力的機會（Accascina & Rogora, 2006; Baki, Kosa, & Guven, 2011; Christou, Jones, Mousoulides, & Pittalis, 2006; Liang & Sedig, 2010）。

在立體視覺化工具的選擇上，動態幾何軟體（The Geometer's Sketchpad, GSP）、GeoGebra、萬用揭示板（Magic Board）、Cabri 3D 及 Google SketchUp（GSU）為數學教育界熟知的五種工具軟體。目前以 Cabri 3D 及 GSU 最能符合人機介面操作與表面積教學（施保成，2011），然而，Cabri 3D 為付費軟體，在不容易取得的條件下，已被免費的 GSU 取而代之。在過往的相關研究中，不少研究者已嘗試將 GSU 導入表面積教學（施保成，2011；陳冠宇，2012）。然而，在研究所探求的教材上，偏重基本的幾何形體展開圖，教材內容的廣度不夠深；在科技輔助教學上，亦並未進一步運用軟體中所具有的「推拉」功能，來融入「運用圖形表面的推拉，使形體恢復為完整圖形後，再來計算表面積」（如圖 1）之解題策略。

GSU 中的推拉功能如同視覺動畫，強調圖像視覺化的作用（Kaput, 1992）。在 Tversky、Morrison 與 Betrancourt（2002）的研究中，相較於靜態圖像呈現，視覺動畫扮演減輕學生認知負荷的角色。而在 Wu 與 Shah（2004）的研究中，視覺動畫可用來演示幾何變化歷程，節省學生記憶資源的使用。由此可知，若能應用 GSU 的「推拉」互動功能，以動畫的過程來演示複雜的複合形體，轉變為簡單的幾何圖形（如長方體與正方體）的過程，或許可簡化學生解題時的步驟與複雜性，進而提升數學學習效果。

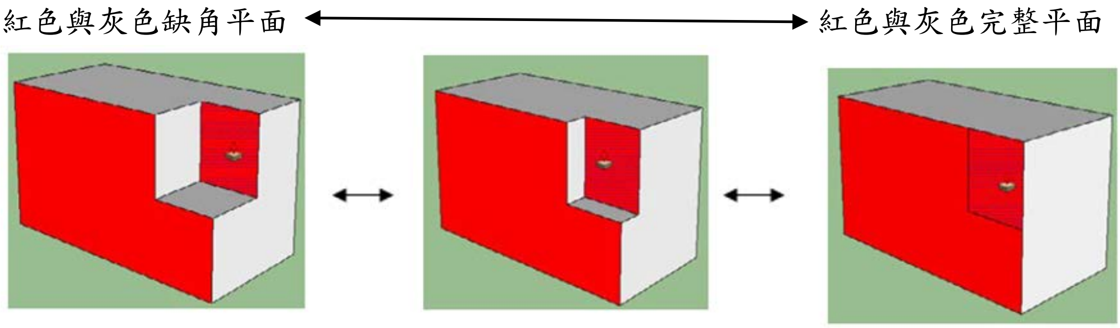


圖 1　表面平移功能示意圖

基於上述的背景說明及研究動機，本研究以複合表面積為主要研究教材，採用準實驗研究法，隨機分派不同教學方式於三個國小班級，實施為期 3 節課（120 分鐘）的教學實驗，深入分析立體視覺化工具（GSU）中的「推拉」功能。研究目的在於探討接受「GSU 輔助教學（使用推拉功能與不使用推拉功能）」與「傳統講述教學」三種教學方法，對學生複合形體表面積單元的學習成效之影響。

貳、文獻探討

一、雙碼理論

Paivio（1986）所提出的雙碼理論（Dual-Coding Theory）為用來解釋人類接受與處理訊息表徵的學說。依據雙碼理論，人類的認知系統分為兩個子系統：語文系統（verbal system）和非語文系統（nonverbal system），前者處理和儲存與語文有關的訊息，後者則處理非語文的訊息，主要為視覺圖像訊息（但也含嗅覺、觸覺或情感訊息）。在兩個子系統內部間，共有三種連結關係，分別是：表徵性連結、參照性連結與關聯性連結。

表徵性連結是指人接受外界刺激後，直接引發的表徵作用。例如，人類接受到語言訊息時，語言系統會產生一個以語文來描述的意象，此即是語文的表徵性連結。參照性連結指的是透過語文或圖像雙向的刺激，使兩子系統間透過相互參照而產生連結。關聯性連結指的是同一系統中，自動依照性質、型態、種類、特徵或其他分類原則，將互有關聯的元素組織在一起，而形

成的連結關係（Paivio, 1986）。

應用雙碼理論於學習上，可得知影像在認知學習中扮演重要的角色，尤其是學習概念時，視覺化影像或工具可提供極大的助益。尤其在數學教育中，經由視覺化可將抽象的概念與關係具體化，有助於相關概念的思考及學習（Liang & Sedig, 2010）。數學教育家 Duval（2002）更是提出「需理解，就須視覺化」（there is no understanding without visualization）的看法。

Norman（2004）在其「情感設計」一書中強調，人類是視覺化的動物，非常習慣視覺化所呈現的資訊效果，如簡易的表格資訊就可吸引人類注意。Chen（2002）認為，視覺化學習主要是將大量不易理解的資料壓縮成簡易概念，方便學習吸收資訊。Dwyer（2007）在回顧一身所做的實驗教學中表達對視覺化學習的推崇，他認為在教學設計上，視覺化學習是對學習者最有效也最有助益的學習方式。

近期所流行的立體視覺化工具即是結合影像視覺化學習與科技應用，主要功用在於提供充分的直覺化情境，讓學生透過建構立體圖形、翻轉圖形與觀看圖形的不同視角，協助學生了解立體幾何中難以理解的部分，並予學生發展空間能力的機會。Christou 等人（2006）即斷言使用立體視覺化工具，可加強學生的動態視覺化能力、提升數學三維概念與空間概念。

在本研究中，選擇運用 GSU 立體視覺化工具輔助複合形體教學，配合老師講解與提問作引導，讓語文和動態影像系統同步呈現。為加強子系統間的參照性連結，教學活動中安排學生親自操弄 GSU，用來觀察與探索表面平移與互補的現象，以連結「表面平移和互補的字義」與「動態圖像互補之歷程與結果」。而為強化子系統間的關聯性連結，在教學活動中，透過 GSU 的推拉功能，把複合形體轉換為基本的幾何形體（長方體或正方體），以利學生對圖形之間（基本幾何形體和複合形體）的關係進行歸類與連結。

二、認知負荷理論

認知負荷理論由 Sweller（1988）所提出，用以解釋個體在學習和解決問題時，認知資源分配與運用的情形，並作為教學時資訊呈現的原則。Chandler 與 Sweller（1991）以認知負荷理論為基礎，說明在教學活動中，一旦設計不當會形成外在認知負荷，使學習者注意力分散，降低學習成效。

Tarmizi 與 Sweller（1988）的研究中，即指出幾何教學活動中，將圖像訊息與文字訊息分開說明時，學習者在自身有限的認知資源中，除了要不斷地在圖文間進行搜尋、連結，作心理整合（mentally integration），還要學習相關的幾何概念，如此會干擾到學習成效；相對地，將圖文訊息作物理整合（physically integration），適度地同步呈現，能協助學生將有限的認知資源集中於學習幾何概念，毋須在圖文訊息間作心理整合，進而提升學習效果。

Kaput（1992）和 Tversky 等人（2002）的研究中，以認知負荷理論說明電腦軟體所呈現動

畫能將事件發生的關鍵性過程與程序完整呈現，內容能涵括更多時間性（temporal）、次序性（consequent）與空間性（spatial）的訊息，所以個體在觀察動畫所呈現之具時間性、次序性與空間性的訊息時，可直接將歷程予以記憶，無須如同觀看靜態圖像時，需再投入有限的認知資源作轉換。Wu 與 Shah（2004）的研究中，也支持此論點，提出運用動畫來演示幾何圖形變化的歷程與結果時，可有效降低學習者的認知負荷，節省運用視覺空間工作記憶的資源。

綜合上述，可知在幾何教學活動中，單純使用靜態圖像來說明具時間性、空間性的概念時，會因資訊的呈現方式有限，使學習者需產生大量的動態心理圖像（dynamic mental image）後，再操作、分析與處理，如此會占用極大的認知資源，影響其建構幾何概念；當運用動畫來輔助時，學習者可直接將認知資源專注於動畫所承載者，避免認知資源分散，進而提升學習效果。此為本研究運用 GSU 中推拉功能之理論基礎，擬透過此功能，達成資訊間的物理整合，以動畫的形式，來演示表面平移與互補之具有時間性、空間性、次序性的現象，來減少學習者之認知負荷，並予學生將有限的工作記憶資源投入於觀察、探索、連結基礎幾何圖形和複合形體圖形間之關係，並建構其解題策略。

三、資訊科技融入表面積教學之相關研究

本研究以下列二個層面分析過去相關研究：

1.研究方法：過去的研究多為準實驗設計，具符合教學現場的真實情境，並運用統計（共變數分析）來控制，加以排除實驗組與控制組學生學前能力之不同。例如：程柏豪（2006）以準實驗研究法，探討「資訊科技融入體積與表面積教學」和「傳統教學」，對學生的學習成效之影響。施保成（2011）以準實驗研究法比較「GSU 輔助教學」和「傳統講述」對國小五年級學生學習複合形體表面積之成效差異。上述二項的研究結果皆顯示資訊科技的使用有助於表面積的學習（實驗組優於控制組）。

2.軟體與技術層面：早期的研究以使用套裝軟體為主，教師須具備一定的程式設計能力，始可自行設計、修改與調整。例如：李俊頡（2011）將國民小學六年級柱體表面積單元融入互動式電子白板教學，與傳統黑板教學作成效比較。近期的研究以使用立體視覺化工具為主，教師無須具備程式設計基礎，即能自行繪製與運用，並能讓每位學生親自操作與練習，在推廣、操作上極富彈性。例如：陳冠宇（2012）使用 GSU 對國小學童在數學空間幾何進行補救教學。Accascina 與 Rogora（2006）嘗試利用 Cabri 3D 導入幾何教學。Obara（2009）使用動態幾何軟體（GSP）引導班上的學生，求出四角錐和圓錐體兩種形體的表面積。Baki 等人（2011）比較 Cabri 3D 與傳統教具在數學教學上不同。上述四項研究的結果皆證實立體視覺化工具可提升學生學習成效。

回顧過往文獻內容，在研究參考價值上，準實驗研究為可行的研究方法，利於比較不同教學方式；立體視覺化工具的使用為可靠的研究工具，益於導入課堂數學教學。然而，建立於過往研究的基礎，本研究發現，現今文獻對於複合形體表面積的探討仍顯不足，使用免費軟體 GSU 輔助教學者亦不多，而採用 GSU 者未能發揮軟體的實質功能（如推拉功能）。本研究即考量上述幾點因素，欲補足文獻中所缺乏的部份。

參、研究方法

一、研究設計

本研究採不等組前後測實驗設計，進行實驗教學，探討「GSU 輔助教學（使用軟體中的推拉功能與不使用軟體中的推拉功能）」和「傳統講述教學」三種教學方法對於學童學習複合形體表面積成效之差異。本研究設計如表 1 所示。

表 1

不等組前後測實驗設計

組別	前測	實驗處理	後測
實驗組 1	O_1	X_1	O_2
實驗組 2	O_1	X_2	O_2
控制組	O_1	X_3	O_2

X1：實驗組 1 接受「GSU 輔助教學（使用軟體中之推拉功能）」之實驗處理，教學時間共計 3 節課，120 分鐘。

X2：實驗組 2 接受「GSU 輔助教學（不使用軟體中之推拉功能）」之實驗處理，教學時間共計 3 節課，120 分鐘。

X3：控制組接受「傳統講述教學（使用傳統紙本教具與口述）」之實驗處理，教學時間共計 3 節課，120 分鐘。

O1：複合形體表面積成就測驗前測。

O2：複合形體表面積成就測驗後測。

二、研究架構

本研究以教學方法為自變項，以複合形體表面積成就測驗分數為依變項，教師者、教學時間、教材、測驗時間列為控制變項，其研究架構如圖 1 所示。

自變項	→	依變項
1. GSU輔助教學（兩種） 2. 傳統講述教學		1. 複合形體表面積成就測驗分數

↑

控制變項
1. 教師特質 2. 教學時間與進度 3. 教材 4. 測驗實施 5. 學生的先備能力（前測結果）

圖 2　研究架構圖

三、研究變項

茲將本研究所涉及的變項，分別說明如下：

（一）自變項

分為 GSU 輔助教學（實驗組 1 和實驗組 2）與傳統講述教學（控制組）。

（二）依變項

複合形體表面積成就測驗分數：學習者於教學後進行此項測驗，此項成績愈高，代表學生的學習成效愈高。

（三）控制變項

1.教師者：本研究在進行實驗教學時，兩組的教學者為同一人。

2.教學時間與進度：三組的教學時間皆為一節課 40 分鐘，進度一致。

3.教材：實驗組與控制組的教學內容皆一致。

4.測驗實施：實驗組和控制組於測驗實施時，作答時間長度與地點一致。

5.學生的先備能力（前測結果）：透過共變數分析（ANCOVA），以統計方法排除不同組別學生先備不一的情形。

四、實驗效度控制

實驗研究法的實驗教學過程，受試者可能會受到同時事件、個體成熟、差異的選擇、受試者流失、統計迴歸等外在因素影響，造成實驗效度不佳，影響實驗結果的推論，這些因素應加以控制。以下分述之：

1.同時事件：實驗期間，受試者會遭遇某些實驗處理外的事件，這些事件可能會造成干擾而影響實驗結果。在本實驗設計中，實驗組與控制組為同學校同年級的學生，在這因素上會有相同的經驗，故可控制此因素的影響。
2.成熟：受試者在實驗期間，生理與心理都會產生變化。本研究中，實驗組與控制組的年紀、接受實驗教學時間一致，故本實驗設計可以控制此因素的影響。
3.測驗：雖然學生在成就測驗前測的經驗有助於後測分數的提高，但本實驗於教學活前兩週即進行前測，且並未公佈正確答案，試卷也全數回收，因此學生並無記憶效果，故本實驗的設計可以控制此因素的影響。
4.測量的工具：測量過程中，前測與後測的內容或難度有差異，可能會影響實驗的結果。本實驗前測與後測皆使用同一份試卷，因此可以控制此因素的影響。
5.差異的選擇：採用兩組以上的實驗設計時，研究者須顧及不同組別受試者在各項特質上是否相同。本實驗應用共變數分析加以控制排除學生先備能力方面的差異，故此因素能獲得控制。
6.受試者的流失：要維持內在效度的，須避免研究樣本在實驗期間的流失。本實驗進行期間，無任何受試者退出實驗，故此因素得到控制。
7.統計迴歸：當實驗者以某項心理特質的極端分數選擇研究對象時，受試者第二次受測的分數趨向於團體平均數。本研究的以班級為單位，選擇實驗對象，故可避免此因素的影響。

五、研究工具

（一）GSU 軟體

GSU 軟體有付費版本與免費版本，本研究選用免費版本，版號為 8.0.14346；其基本的功能，能符合研究的需求。在軟體操作介面上，其工具列主要為大型圖像化按鍵，如圖 2 所示。教學者與學生點選按鍵後，即可對立體圖形作以下操縱：翻轉、切換視角、表面上色、表面平移與邊長測量。工具列能夠自訂，透過隱藏不相關之操作按鈕，降低學生操作時的難度。

圖 3　GSU 軟體工具列

（二）複合形體表面積成就測驗

1.擬題

複合形體表面積成就測驗的內容，主要參考康軒版國小數學表面積單元的教學指引、教材內容、單元目標進行擬題，所測驗的概念有估算概念、空間概念及量測概念共三大類，研究者共編擬試題 24 題，其中 22 題選擇題，2 題為畫畫看，1 題 1 分，滿分 24 分，分數越高代表學習成效越佳。

2.題意審查

成就測驗的題目編製完成後，敦請四位資深的國小高年級級任老師（一位曾任數學科召集人），共同進行題目審查，檢視題目是否適當、是否符合教學目標後，再由臺南市某國小五年級五位學生先行試做，以檢查題目是否有題意不清或標示不明，再根據審查委員給予的意見，修正為預試題本。

3.項目分析及信度考驗

彙整專家意見，將初擬測驗修改編製完成後，以臺南市某國小五年級學生（已學過複合形體表面積單元），共 30 名為對象進行預試，經項目分析後，依據 Ebel 與 Frisbie（1991）的試題篩選標準，鑑別度在 .20 以下為試題不佳，須淘汰或重新修改。故研究者保留鑑別度 .22 到 .91，難度介於 .54 到 .87 之間的題目，共計 18 題（16 題選擇題，2 題畫畫看，一題一分，總分 18 分）。在信度方面，刪除題目後得到的 Cronbach α 係數為 .90，顯示本測驗工具擁有良好的信度。在本研究中，前後測是使用同一份工具。

六、教學流程

本研究所採用的學習教材為康軒版國小五年級數學表面積單元中的「教學活動三」與「數學步道 II」。在實驗組中，教師將 GSU 軟體融入於教學活動，輔以板書、提問進行講解與紀錄，教學活動全程皆在電腦教室中進行，藉由螢幕廣播系統來呈現和示範表面平移與互補之動態過程（實驗組 1 使用推拉功能，實驗組 2 不使用推拉功能），並運用教師主控端的遠端檔案發送功能，將範本送至每部電腦，讓學生皆能開啟檔案，進行操作與觀察，最後再練習課本和習作中的題目，以加強學習效果。在控制組中，教師除利用板書教學外，也利用紙本教具說明複合形體的概念，在講解完畢後，讓學生操作與觀察紙本教具，並練習課本習題。表 2 僅以一例說明三組教學流程的不同。

表 2

教學流程簡介（以教導內凹複合形體表面積為例）

實驗組 1	實驗組 2	控制組
（1）老師利用切換視角，呈現俯視圖、右視圖、前視圖。	（1）同實驗組 1。	（1）老師將教具轉至不同的視角。
（2）老師利用表面上色，逐一在不同的視圖中，將見到的平面上色。	（2）同實驗組 1。	（2）老師逐一在不同的視圖中，將見到的平面上色。
（3）老師利用翻轉功能，將圖形轉回原來的角度。	（3）同實驗組 1。	（3）老師手動將圖形轉回原來的角度。
（4）老師用推拉功能，將缺角平面補為完整平面。	（4）老師用口語說明可將缺角平面補為完整平面。	（4）同實驗組 2。
（5）引導學生觀察此一圖形，是個長方體。	（5）同實驗組 1。	（5）同實驗組 1。
（6）和學生共同總結此一凹型複合形體的 3 個缺角的平面都能補起來，所以此一圖形的表面積可視為一個完整的長方體表面積。	（6）同實驗組 1。	（6）同實驗組 1。
（7）發送檔案給學生，讓學生進行操作與觀察。	（7）同實驗組 1。	（7）學生操作教具，進行觀察。

七、研究對象

本研究選取臺南市某國小五年級三個班級，共計 84 名學生，學生皆具備資訊課程的經驗，且未學習過複合形體表面積相關的課程。本研究再以班級為單位，隨機分派實驗組 1（28 名）、實驗組 2（29 名）和控制組（27 名）。因實驗組學生須熟悉 GSU 軟體操作，於教學實驗前，教師特地利用一堂課時間，於電腦教室教授 GSU 軟體功能。

八、資料分析

本研究採準實驗研究法進行教學實驗，組別為固定因子，不同的教學方法為自變項，後測成績為依變項，數據分析時，所要比較的是以 GSU 輔助教學與傳統講述教學在表面積單元的成效為何。實驗組與控制組學生為非等組的方式分配，故使用共變數（ANCOVA）將實驗教學前的先備能力予以排除。

肆、研究發現

本研究收集三個組別的學生在實驗前、後的表面積成就測驗成績，如表 3 所示。

表 3

三組學生人數及前、後測平均值

組別	人數	前測		後測	
		平均數	標準差	平均數	標準差
實驗組 1（GSU 具推拉功能之教學）	28	6.68	3.50	11.71	4.59
實驗組 2（GSU 不具推拉功能之教學）	29	5.48	4.29	7.31	4.34
控制組（傳統教學）	27	6.52	4.01	8.96	5.50

本實驗採不等組前後測實驗設計，受試學生非隨機分派至各組別，因此，不同組別（班級）的數學表面積初始能力（前測成績）不一定相同，為避免初始能力對學習成效（後測成績）產生干擾，因此採用 ANCOVA 進行控制，將學生前測成績上的差異予以排除。

為符合共變數分析的假定，對三組組內的迴歸係數作同質性檢驗，結果如下表 4 所示。由表 4 資料可知，三組的組間迴歸同質性無差異（$F = .25, p > .05$）。

表 4

迴歸同質性考驗摘要表

變異來源	離均差平方和（SS）	自由度（df）	均方（MS）	*F* 值
組間（迴歸係數）	8.19	2	4.10	.25
組內（誤差）	1257.51	78	16.12	

以三組的前測成績為共變量，後測成績為依變項，進行共變數分析，其結果如下表 5 所示。

表 5

共變數分析摘要表

變異來源	離均差平方和（SS）	自由度（df）	均方（MS）	*F* 值
組間（教學方法）	259.56	2	129.78	8.20^{**}
組內（誤差）	1265.71	80	15.82	

$^{**}p < .01$

由表 5 可知，三組組間的後測成績，在排除前測成績的影響後，達到顯著差異（$F = 8.20, p < .01$），因此進行事後比較（如表 6），以了解三個組之間兩兩差異的情形。

表 6

事後分析摘要表

組別	調節 平均數	事後比較
A：實驗組一（GSU 具推拉功能）	11.70	A > B** , A > C**
B：實驗組二（GSU 不具推拉功能）	7.54	B < A**
C：控制組（傳統教學）	8.74	C < A**

$^{**}p < .01$

由表 6 資料可知，「GSU 具推拉功能組」的後測成績明顯地優於「GSU 不具推拉功能組」（$p < .01$）和「傳統教學組」（$p < .01$），但「GSU 不具推拉功能組」和「傳統教學組」的後測成績並沒有顯著差異（$p > .01$）。由於實驗組一與其它兩組有顯著差異存在，本研究利用 effect size 公式分析組間的實質效果量（Cohen *d* 值），實驗組一與實驗組二間 *d* 值為 0.98，實驗組一與控制組間的 *d* 值為 0.54。根據 Cohen（1988）的效果量判定，實驗組一與其它兩組的效果量維持在中等以上。

由以上分析可得知，「GSU 具推拉功能之教學」對促進學生學習複合形體表面積單元概念的成效，優於「GSU 不具推拉功能之教學」和「傳統教學」，但「GSU 不具推拉功能之教學」對促進學生學習複合形體表面積單元概念的效果，則未優於「傳統教學方式」。

伍、研究討論

針對上述研究發現，本研究提出下列七項討論點：

一、推拉功能減少學生的認知負荷

採用 GSU 輔助教學的兩個實驗組，教學活動的地點、電腦軟體的新奇性、操弄軟體之認知負荷都接受控制，唯一的變項是有無推拉功能，研究結果為具推拉功能的實驗組 1 顯著優於不具推拉功能的實驗組 2，可見推拉功能有助於學生學習複合形體表面積。

Kaput（1992）、Tversky 等人（2002）、Wu 與 Shah（2004）指出透過電腦動畫能夠有效傳達具時間性、空間性、次序性的教學訊息，學習者能直接記憶動畫所呈現者，毋需再利用大量的認知資源來操弄動態心理圖像來轉化相關概念，進而加強學習成效。在研究中，擁有推拉功能的實驗組 1，可在老師演示和自我練習的過程，用動畫的形式，具體、反覆的觀察複合形體表面平移的歷程，再逐步建構自我的幾何概念；相對地，不具推拉功能的組別（實驗組 2 及控制組），只能透過老師口頭的講述與自我心像模擬、分析，除需瞭解表面平移的意義外，還要付出額外的工作記憶資源來操弄心像，以致於具推拉功能組的學習成效顯著優於其他兩組，以及

不具推拉功能、傳統講授教學兩組之間在學習成效上沒有顯著差異。

二、推拉功能連結學生的先備知識

Ausubel（1968）說明有意義的學習（meaningful learning）須連結學生的先備知識。在實驗教學中，實驗組 1 經由推拉功能的輔助，可具體的將複合形體的表面作平移，並互補成完整的基礎幾何形體（正方體或長方體），透過這方式不僅搭建起學生在複合形體與基礎幾何形體間轉換的橋樑，更連結學生已習得的基礎幾何形體表面積（正方體或長方體）概念與計算方式，如此學生能應用這先備知識來類推相關的圖形，並簡化運算的過程與解題時之複雜性，此可能是推拉功能組顯著優於其他兩組的原因之一。換言之，不具推拉功能的兩組之間（實驗組 2 和控制組），少了推拉功能來連結先備知識，以作為複合形體與基礎幾何形體間轉換的線索，故在學習成效的表現上無差異。

三、推拉功能的教學情境有助學生在心像操作類試題的表現

本研究的後測以測驗心像操作為主軸，在全卷 18 題中，運用心像操作進行表面平移概念來解題佔有 13 題（含 8 題，不需要計算）。在實驗組 1 教學當中，老師講解與學生自主練習時，都是慣於運用 GSU 中推拉功能來觀察表面平移與互補的現象，並發展相關的概念及以動態圖像操作為主的解題策略，進而在測驗時產生學習遷移；而實驗組 2 和控制組（傳統講授教學），雖強調運用表面平移與互補的概念來解題，不過學生在缺乏動態圖像的情境下，需以心像操弄方式來想像，故有直接套用課本中已有的演算公式來解題，而忽略表面平移與互補概念。因此，實驗組 1 在以心像操作能力為主的成就測驗中，表現較其他兩組的學生佳。

四、推拉功能加強學生在語文和非語文子系統上的連結性

Paivio（1986）所提出的雙碼理論，強調圖文雙重訊息適度的安排與呈現，可加強學習效果，且經感官收錄後會經過語文和非語文兩個子系統，兩系統間會對相關的概念產生參照性連結，單一系統內則會對相關的概念作歸納，並產生關聯性連結。在本研究中，三個組別在講述複合形體表面平移及互補的概念時，都經由老師口頭講解與引導，但實驗組 1 除接受語文訊息（老師說明）外，還可在電腦螢幕上，同步見到由推拉功能所提供非語文訊息（形體表面轉變之連續性影像），此方式推測會加強兩個子系統間之連結，讓字義上的平移、互補與視覺上的動態歷程相結合，產生參照性連結；另由視覺上，反覆地見到複合形體表面經由推拉，成為基本幾何形體（正方體和長方體）後，在語文系統或非語文系統內，可能將複合形體與基本幾何形體，或是類似的複合形體間作分類和歸納，而產生關聯性連結。相對地，實驗組 2 和控制組，僅透過老師口語的說明，導致圖文兩系統間的參照性連結、圖或文單一系統內的關聯性連結強度不及實驗組 1，此也為學習成效有差異之因。換個角度來看，實驗組 2 和控制組都少了動態影像

的輔助，在兩種連結的連結強度上相當，結果顯示在學習成效上不具差異。

五、立體視覺化工具能提升學生的空間概念能力

施保成（2011）、陳冠宇（2012）、Accascina 與 Rogora（2006）、Christou 等人（2006）及 Baki 等人（2011）的研究皆顯示出運用立體視覺化工具所具有的翻轉、旋轉、透視等功能，可加強學生空間概念、心像操弄與動態視覺等能力，並提升的學習成效。在本研究中，運用 GSU 為教學輔具，並運用其翻轉、旋轉、上色、推拉等功能來教學後，在學習成效上具顯著的差異，與過去的研究結果相符，可見立體視覺化工具對於提升空間概念與心像操作的能力有助益。

六、傳統教具仍可發揮其功效，輔助學生學習

傳統講授教學中，學生可透過實體的紙製教具、色紙和老師口頭說明，具體見到形體外觀，及表面平移與互補的現象，但教具本身較小、視角有限，部分學生不易觀察到表面平移的歷程；無推拉功能的教學中，透過廣播系統和 GSU 軟體協助，提供給每個學生觀察形體的機會，但在呈現表面平移、互補的概念時，學生所接收的訊息是靜態、二維的圖像，只有倚賴老師口語引導和學生自我心像操弄；兩個組別在呈現表面平移和互補的概念時，傳統講授組中的紙製教具雖有所不足，但其所呈現的相關視覺訊息與效果，推測超過只藉由老師口頭說明的無推拉功能組。

傳統講授教學組，學生個體在練習時，可應用實體積木（一立方公分的小方塊）進行操弄，藉以觀察表面平移和互補，但有排列複合形體耗時、缺乏表面上色、不易重複操作的現象；實驗組 2 透過 GSU 來練習時，雖有翻轉、表面上色的特色，但少了操作和觀察表面平移、互補的機會。

綜合上述，兩組在教具各有特色與限制的情形下，可能是造成傳統講授教學組在以心像操弄為主（表面平移與互補）的測驗上，平均分數上略高於無推拉功能組，但統計上無顯著差異之因。

七、推拉功能提供學生視覺上的協助

傳統數學教學是透過實體教具和老師口語講解為主，學生在此教學型態下能利用實體教具練習空間幾何的概念；相對地，在無推拉的實驗教學中，學生並不能利用 GSU 的推拉功能練習幾何概念。就教學成效而言，上述兩種教學方式無顯著差異，可見缺少推拉功能的 GSU 對學生的數學學習有其限制性。換言之，在表面的平移與互補上，無推拉組與傳統組都無法有效提供學生視覺上的幫助，但傳統教學的實體教具仍然有其優勢，造成平均分數高於無推拉組的現象。

陸、結論與建議

本研究旨在探討「GSU 輔助教學（使用推拉功能與不使用推拉功能）」與「傳統講述教學」三種教學方法，對國小學生在複合形體表面積單元上的學習成效差異。經由教學實驗發現，「GSU 輔助教學具推拉功能模式」的學習成效優於「GSU 輔助教學不具推拉功能模式」。亦即，接受「GSU 輔助教學具推拉功能」的實驗組學生在後測成績上顯著優於接受「GSU 輔助教學不具推拉功能」的實驗學生。此外，接受「GSU 輔助教學具推拉功能」的實驗學生在後測成績上顯著優於接受「傳統講述教學模式」的學生，但接受「GSU 輔助教學不具推拉功能」和「傳統講述教學」的學生在學習成效上無顯著差異。

在研究解釋上，因「GSU 輔助教學具推拉功能模式」的視覺化運作程度、語文與非語文系統間連結強度、先備知識連結度、認知負荷降底度皆優於「GSU 輔助教學不具推拉功能模式」及「傳統教學模式」，故有上述研究發現的產生。再者，由於學生學習習慣與教具特色影響所致，造成「GSU 輔助教學不具推拉功能」和「傳統講述教學」間無顯著差異。換句話說，資訊科技融入數學教學時，假使資訊科技的影響力不足，其衍生的學習效果與傳統教學無異。

在教學應用上，本研究結果對於教學者而言，GSU 能提供迅速繪製複合形體的圖形、檔案可重複運用與分享，並可減少傳統教具保管、回收與操作不易的情形，如能適時結合軟體中的推拉功能和口頭講解來模擬表面平移與互補的動態視覺歷程，將有利於學生建構自我的幾何概念。對於國小學童而言，自主操弄 GSU 時，不僅提供互動式動態畫面，更能依照自我學習的進度來調節與觀察，避免認知負荷過重，且進一步提高對教學活動的參與度。

本研究雖詳加控制其實驗程序，其研究推論性仍有其受限，須後續研究不斷考驗，方能證實 GSU 輔助教學在不同實驗條件下的影響性。對未來研究有四點建議，第一，本研究以實驗教學三週後，作立即效果評估，顯示以 GSU 輔助教學且結合推拉功能有其實質效果，但學習者是否已內化此概念，有待後續評估研究，未來研究可採延後測的方式，對持續效果做進一步評估。第二，本研究的實驗組全程皆在電腦教室教學，未來研究可將不同組別的教學地點設定在傳統的班級教室中，再應證運用 GSU 軟體輔助教學，對學生學習複合形體表面積單元的學習成效是否一致。第三，本研究中所涵括的圖形皆為運用平面互補者，未來研究可將其他複合形體（如有兩面大小一致且平行之形體；計算表面積時，為計算側面積再加兩個大小一致且平行者）納入，以 GSU 軟體作輔助教學，並檢驗其學習成效。第四，本研究僅以量化實驗數據為主要資料收集方向，未來研究可考慮利用質性的訪談方式，探究學生對視覺化工具的認知概念。

參考文獻

毛銘覬、呂長聰、黃品慈、湯中揚、劉松柏（2010）。創意教具之教學成效研究—以複合形體表面積為例。**屏東教大科學教育**，**32**，29-38。

王學武、蔡佳穎、陳宜均、賴蕙慈（2011）。應用 Van Hiele 幾何思考層次理論於國小學童體積概念數位教材開發之研究。**國民教育**，**51**（6），90-99。

呂慧君、姚如芬（2005）。電腦加數學等於多少？—資訊融入數學科教學的應用。**屏東教大科學教育**，**22**，62-68。

李俊頡（2011）。**互動式電子白板在國小數學教學之研究—以國小數學領域六年級柱體表面積單元在郊區學校教學為例**（未出版之碩士論文）。亞洲大學，臺中市。

施保成（2011）。**以 3D 電腦輔助設計軟體 Google SketchUp 融入國小複合形體表面積教學對學生數學學習成效之研究**（未出版之碩士論文）。國立臺灣師範大學，臺北市。

陳冠宇（2012）。**3D 電腦圖形軟體於國小學童數學空間幾何補救教學之行動研究**（未出版之碩士論文）。南華大學，嘉義縣。

陳鴻綸、曹雅玲（2005）。國小學童在幾何問題的解題表現研究—長方體的體積和表面積為例。**國教新知**，**52**（4），65-78。

程柏豪（2006）。**資訊科技融入國小數學科教學效益之研究-以國小五年級體積與表面積為例**（未出版之碩士論文）。國立臺中教育大學，臺中市。

溫嘉榮（2003）。教師如何將資訊融入學科成為教學工具。**教育研究月刊**，**105**，75-81。

鐘樹椽、程璟滋（2005）。資訊科技應用於數學科教學之探討。**教育資料與圖書館學**，**43**（2），249-266。

Accascina, G., & Rogora, E. (2006). Using Cabri 3D diagrams for teaching geometry. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *13*(1), 11-22.

Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. New York, NY: Holt, Rinehart & Winston.

Baki, A., Kosa, T., & Guven, B. (2011). A comparative study of the effects of using dynamic geometry software and physical manipulatives on the spatial visualization skills of pre-service mathematics teachers. *British Journal of Educational Technology*, *42*(2), 291-310. doi: 10.1111/j.1467-8535.2009.01012.x

Bonotto, C. (2003). About students' understanding and learning the concept of surface area. In D. H. Clements & G. Bright (Eds), *Learning and teaching measurement: 2003 yearbook*. (pp. 157-167). Reston, VA: NCTM.

Chandler, P., & Sweller, J. (1991). Cognitive load theory and the format of instruction. *Cognitive and Instruction*, *8*(4), 293-332. doi: 10.1207/s1532690xci0804_2

Chen, C. (2002). Information visualization. *Information Visualization*, *1*, 1-4. doi: 10.1057/palgrave.ivs.9500009

Christou, C., Jones, K., Mousoulides, N. & Pittalis, M. (2006). Developing the 3DMath dynamic geometry software: Theoretical perspectives on design. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *13*(4), 168-174.

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2nd ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Duval, R. (2002). Representation, vision, and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt (Ed.), *Proceedings of the Twenty-Fourth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 311-335). Athens, GA: The University of Georgia.

Dwyer, F. M. (2007). The program of systematic evaluation (PSE): Evaluating the effects of multimedia instruction 1965-2007. *Educational Technology*, *47*(5), 41-45.

Ebel, R. L., & Frisbie, D. A. (1991). *Essentials of educational measurement* (5th ed.). Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of teaching and learning mathematics.* (pp.515-556). New York, NY: Macmillan.

Liang, H. N., & Sedig, K. (2010). Can interactive visualization tools engage and support pre-university students in exploring non-trivial mathematical concepts? *Computers & Education*, *54*(4), 972-991. doi: 10.1016/j.compedu.2009.10.001

Moyer, P. S., Bolyard, J. J., & Spikell, M. A. (2002). What are virtual manipulatives? *Teaching Children Mathematics*, *8*(6), 372-377.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Newby, T. J., Stepich, D. A., Lehman, J. D., & Russell, J. D. (2006). *Instructional technology for teaching and learning: Designing instruction, integrating computers, and using media* (3rd ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Norman, D. A. (2004). *Emotional design: Why we love (or hate) everyday things*. New York, NY: Basic Books.

Obara, S. (2009). Where does the formula come from? Students investigating totals surface areas of a pyramid and cone using models and technology. *Australian Mathematics Teacher*, *65*(1), 25-33.

Paivio, A. (1986). *Mental representations: A dual coding approach*. New York, NY: Oxford University Press.

Roblyer, M. D. (2003). *Integrating educational technology into teaching* (3rd ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Roblyer, M. D., & Edwards, J. (2000). *Integrating educational technology into teaching* (2nd ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science*, *12*(2), 257-285. doi: 10.1016/0364-0213(88)90023-7

Tarmizi, R. A., & Sweller, J. (1988). Guidance during mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, *80*(4), 424-436. doi: 10.1037/0022-0663.80.4.424

Tversky, B., Morrison, J. B., & Betrancourt, M. (2002). Animation: Can it facilitate? *International Journal of Human-Computer Studies*, *57*, 247-262. doi: 10.1006/ijhc.2002.1017

Wu, H. K., & Shah, P. (2004). Exploring visuospatial thinking in chemistry learning. *Science Education*, *88*(3), 465-492. doi: 10.1002/sce.10126

黃佑家、吳慧敏、黃暉娟、譚寧君、曾世綺、曾建銘（2014）。
以工作範例學習平行四邊形面積：後設認知問題對學習的影響。
臺灣數學教育期刊，**1**（1），19-47。
doi: 10.6278/tjme.20140329.001

以工作範例學習平行四邊形面積：後設認知問題對學習的影響

黃佑家[1]　吳慧敏[2]　黃暉娟[3]　譚寧君[4]　曾世綺[3]　曾建銘[5]
[1]四結國民小學
[2]佛光大學心理學系
[3]佛光大學資訊應用學系
[4]國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系
[5]國家教育研究院

本研究目的旨在探討在平行四邊形的工作範例中，有無加入後設認知問題對不同能力學生的學習成效、學習時間、認知負荷的影響。本研究採 2 × 2 實驗研究法，自變項為「工作範例模式」（「後設認知組」和「對照組」）和「能力」（高、低）。受試者為 86 位國小五年級學生，依期中考數學成績分為高、低能力群，並以隨機方式分派至實驗組別。結果顯示，整體而言，後設認知問題會增加整體的學習時間，但這差異主要來自教材設計的系統性時間差異，後設認知問題沒有顯著影響高能力群的學習成效和認知負荷，但會降低他們的信心和意願；但對低能力群學生，在工作範例中加入後設認知問題顯著地增加他們在學習階段的負向認知負荷感和學習時間，但並沒有因此而提昇學習成效，也降低他們的信心和意願。

關鍵詞：平行四邊形、面積、認知負荷、後設認知問題

通訊作者：吳慧敏，e-mail：hmwu@mail.fgu.edu.tw
收稿：2013 年 9 月 27 日；
接受刊登：2014 年 3 月 29 日。

Journal homepage: tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=56

Huang, Y. J., Wu, H. M., Huang, H. C., Tan, N. C., Tzeng, S. C., & Cheng, C. M. (2014).
Learning the area of parallelograms with worked examples: The influence of metacognitive questions.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *1*(1), 19-47.
doi: 10.6278/tjme.20140329.001

Learning the Area of Parallelograms with Worked Examples: The Influence of Metacognitive Questions

You-Jia Huang[1] Huei-Min Wu[2] Hui-Chuan Huang[3]
Ning-Chun Tan[4] Shyh-Chii Tzeng[3] Chien-Ming Cheng[5]

[1]Si Jie Elementary School
[2]Department of Psychology, Fo Guang University
[3]Department of Applied Informatics, Fo Guang University
[4]Department of Mathematics and Information Education, National Taipei University of Education
[5]National Academy for Educational Research

The purpose of this study was to examine whether including metacognitive questions in worked examples would influence learners of different abilities differently in terms of test performance, learning time, and cognitive load. A 2 (types of worked examples: with or without metacognitive questions) × 2 (ability: high and low) experimental study was conducted. The material was multimedia worked examples for learning the areas of parallelograms. The participants were 86 fifth graders from an elementary school. They were divided into high and low ability groups based on their mid-term exam and randomly assigned to one of the experimental groups. The results showed that the inclusion of metacognitive questions increased the overall learning time, but it was mainly due to the system difference of the instructional material. Inserting metacognitive questions in the worked examples did not influence high ability students' perception of cognitive load and test performance; however, it negatively influenced their perception of confidence and willingness to participate in the activity. For the low ability students, the inclusion of metacognitive questions significantly influenced their perception of cognitive load. They needed to invest more time and effort to learn. These effort unfortunately did not enhance their test performance and negatively influenced their confidence and willingness to participate in the learning activity.

Keywords: parallelogram, area, cognitive load, metacognitive question

Corresponding author：Huei-Min Wu，e-mail：hmwu@mail.fgu.edu.tw
Received：27 September 2013;
Accepted：29 March 2014.

壹、緒論

幾何是一門探討空間關係與邏輯推理的數學，幾何概念與表徵是數學與真實世界溝通的重要方式之一，且與數學其他領域緊密聯結（左台益、梁勇能，2001），因此各國的數學教材都將幾何列為數學的重要領域。臺灣在 92 及 97 年課程綱要中亦將幾何列為數學領域五大主題（數與量、代數、統計與機率、幾何、連結）之一，以強調幾何學習的重要性。但臺灣學生於幾何學習的表現與其他主題相比卻明顯較弱。例如 TIMSS 2007 年結果（Mullis, Martin, & Foy, 2008）顯示臺灣國小四年級組學生在數與量、幾何圖形與測量、資料呈現三種題目題型中幾何部分最弱，TIMSS 2011 結果（Mullis, Martin, Foy, & Arora, 2012）亦同。因此，如何在小學的階段發展幾何教學，由理解簡單形體的幾何性質開始，到推理性質與彼此之間的關係，增加學習成效並為銜接國中幾何的學習打下良好的基礎，成為一個重要的課題。故本研究以小學高年級學生進入幾何學習中首先面對的平行四邊形面積單元為主題。

在課程教學上，一般在介紹完基本概念和基本示範後，便要學生透過解題練習，以精熟內容和強化概念，且常是練習的題型多於所示範的題型（黃佑家，2013），結果學生不但沒有精熟內容，反而常常犯錯或產生一些迷思概念或對數學感到挫折。依據認知負荷理論（Sweller, 1998, 2006, 2007, 2010），傳統重視練習的教學法對初學者或缺乏解題基模的學習者，可能不是最佳的學習模式。從認知負荷理論的觀點，當學習者尚未有解題基模時，問題解決練習往往迫使學習者使用嘗試錯誤或手段－目的（means-ends）的策略，造成不當的運用有限的認知資源於尋找正確答案，增加了認知負荷，就算最後得到答案，也有可能未學習到解題背後所蘊含的原理原則，同時腦中混雜的正確與錯誤的表徵和解題策略，也干擾了有效的基模建立，浪費有限的認知資源，甚或在不斷試誤的過程中降低了學習者的自信心。因此依據認知負荷理論的觀點，為了促進有效的學習及建立學習者的自信心，在學習的初期適合以範例為基礎的學習（example-based learning）（Renkl, 2005, 2011）。

過去已有相當多的文獻支持工作範例對學習的正向影響（如 Renkl, 2011; Sweller & Cooper, 1985; Zhu & Simon, 1987），但工作範例的教學也面臨一些質疑，如工作範例只對解決相似或近遷移的問題有優勢，對不相似或遠遷移的問題則無優勢（Renkl, 2011），因此令人擔心在工作範例的教學模式下，學習者因順利解題而容易誤以為自己已瞭解學習內容，而實際上學習者只是模仿操作解題順序而沒有真正的理解（van Gog, Paas, & van Merriënboer, 2004），或沒有試圖深度理解學習的內容（Wittwer & Renkl, 2010）。因此，後續的研究試圖改變工作範例的設計，以提高工作範例的學習效果，特別是在工作範例中加入可以促進學生深度思考的設計，如反思（reflection）、後設認知（Mevarech & Kramarski, 2003）、或自我解釋（Crippen & Earl, 2007; Moreno

& Mayer, 2010），研究結果亦支持，在工作範例中加入上述促進深度思考的設計，確實可提高學習效率。

然而分析相關文獻發現，使用自我解釋或後設認知策略的研究對象大都為年紀較大的中學生（Mevarech & Kramarski, 2003; Renkl & Atkinson, 2002; van Gog, Paas, & van Merriënboer, 2006, 2008），或大學生（Schworm & Renkl, 2006; Stark, Kopp, & Fischer, 2011），此策略對年紀較小，心智能力尚在發展中的學生（如小學生）是否依然有效，值得進一步探究。

此外，雖然 Mevarech 與 Kramarski（2003）發現，接受後設認知訓練的學生表現優於工作範例訓練的學生，但他們的研究使用在教室中的合作式學習，如果在自學的多媒體學習環境中，將後設認知問題嵌入在工作範例的關鍵位置，鼓勵學生進行後設認知思考，再給予回饋，是否依然有相同的效益？另外，後設認知是高階的認知與思考能力，對低成就的學習者是否有能力進行後設認知思考，亦值得進一步探討。

基於上述研究背景，本研究目的在依據認知負荷理論，以平行四邊形面積單元為主題，設計工作範例的數位教材，並探討在工作範例中加入後設認知問題對不同能力學生的學習成效、學習時間與認知負荷的影響。

貳、文獻探討

一、工作範例效應（the worked-example effect）

工作範例是指一個含有解題步驟的問題，John Sweller 和他的團隊在 1990 年代研究學生的問題解決時發現，在學習新任務時，透過研讀範例會比解題練習更能達成有效的學習（Cooper & Sweller, 1987; Paas & van Merriënboer, 1994; Sweller & Cooper, 1985），此即工作範例效應（the worked-example effect）。Zhu 與 Simon（1987）更是以工作範例的學習方法正式用於北京的一所中學，讓大部份學生在完全沒有教師教學的情況下，在二年內完成了三年的數學課程（二年的代數和一年的幾何）。

傳統的工作範例是以紙本媒體呈現，後續研究顯示，工作範例在多媒體的環境下（如：van Gerven, Paas, van Merriënboer, Hendriks, & Schmidt, 2003），及在網路的學習環境下（如：Crippen & Earl, 2007）依然有效，且 van Gerven 等人（2003）的研究顯示工作範例的效果不只對一般的年輕受試者有效，對年紀較大者（六十歲以上）亦有效，接受工作範例組的老人比接受傳統問題解決組，可以用較少的時間和較低的認知負荷達到相同的表現。相關研究並指出，工作範例對初學者或缺乏相關基模的學習者更有效益（Renkl, 2011）。

二、工作範例理論基礎－認知負荷理論

為何以工作範例為基礎的學習會優於以練習為基礎的學習呢？依據 Sweller（1998, 2010），這可以由認知負荷理論說明。認知負荷理論是以人類的認知系統特性為基礎的教學理論。認知負荷指在某情境下達成某特定目標所需要的工作記憶資源（Kalyuga, 2009, p. 35），它受任務的屬性及學習者的特性的影響（Paas & van Merriënboer, 1994）。Sweller 與 Sweller（2006）從知識的屬性指出，人類的知識屬性不同，處理的方式也會不同，因此，處理不同屬性的知識時認知負荷不同，學習的方式也不同。依據 Sweller 與 Sweller，人類的知識包括二類：初級知識（primary knowledge）及次級知識（secondary knowledge），初級知識是透過人類演化過程而將知識同化成人類與生俱有的本能，我們可以容易且通常是無意識地學到許多初級知識，當我們學習這些知識時，是感受不到任何認知負荷。而次級知識則是人類為延續與創新文化而產生的知識，不同的文化會產生不同的次級知識，這類知識的習得較困難、費力和需要有意識的處理，我們在學校的學習活動大都屬於這類。

然而人類是如何習得這些次級知識的呢？Sweller 與 Sweller（2006）從自然天擇的演化觀點指出，人類認知訊息處理和自然天擇的演化有類比關係，可以歸類出五個基本原則，包括：1. 訊息儲存原則（the information store principle），2. 借用與重組原則（borrowing and reorganizing principle），3. 隨機生成原則（randomness as genesis principle），4. 有限改變原則（narrow limits of change principle），5.環境組織與連結原則（the environmental organizing and linking principle）。簡言之，這五原則的意義是：人類若要能面對日常生活中的問題和讓生活中的工作變得簡單，需要一個容量夠大的長期記憶庫（訊息儲存原則），我們透過與生俱來的初級知識模仿他人、聆聽或閱讀他人的所說、所寫的次級知識，然後進一步與自己長期記憶中的知識結合，重組出新的基模，達到真正的學習（借用與重組原則）。但當沒有可借用的他人知識時，我們唯一可用的方法是嘗試錯誤，如果方法有效，我們就保留，如果無效，就繼續嘗試（隨機生成原則）。然而人類工作記憶受容量有限（7 ± 2）及保留時間暫時性的限制，因此訊息如果不經複誦或不能複誦，大約在數秒之後就會忘記了（Sternberg & Sternberg, 2012），加上工作記憶通常不是用來儲存訊息，而是拿來處理（如組織、結合、比較或是操弄）所儲存的訊息，因此它一次能處理的訊息更是有限（Cowan, 2001），除非它們能很快的與長期記憶結合或能為長期記憶的基模所辨識（有限改變原則）。Sweller 與 Sweller（2006）認為長期記憶中接收的訊息是經過組織的，而非隨機編排的，由於它是有組織的，所以它的處理方式與來自環境的訊息處理方式非常不一樣，來自長期記憶的訊息無容量與時間的限制，Ericsson 與 Kintsch（1995）稱此為「長期工作記憶」，其功能是提供我們與環境一個有組織的連結，亦即幫助我們與環境互動、產生意義及學習（環境組織與連結原則）。

從上述認知系統訊息處理的原則，可看出長期記憶或先備知識在學習中扮演重要的角色，因此 Sweller 提出，教學的目的在於增加長期記憶中的次級知識，亦即，教學的目的在於幫助學習者建構與增長長期記憶的基模。若要實現這個目的，就必須考慮在處理新的次級知識時，工作記憶會受到容量和時間有限的嚴格限制。因此，雖然隨機生成的嘗試錯誤方法也是人類問題解決的方法之一，但從認知負荷的觀點，先讓學習者建立領域知識基模之後再進行解題或創意的思考，或許是更好的選擇（Renkl, 2005; Sweller, 1998），使用借用與重組原則是學習新知識最有效率的方法。

但是 Renkl（2005）也指出，雖然工作範例可以促進初學者的基模建構，但只適用於工作範例的設計是恰當時。工作範例的設計很重要但也很複雜，如何適當應用教學策略與設計呈現方式，考驗工作範例的有效性。簡言之，以範例為基礎的學習之成敗關鍵在於範例的設計是否能讓人類的認知資源發揮最大的有效使用，亦即必須做有效的認知負荷管理。

三、認知負荷的管理與工作範例的教學成效

（一）認知負荷的類型

工作範例的成效關鍵在於其設計是否能有效管理學習過程中的認知負荷。認知負荷理論提出三種認知負荷類型（Paas, Renkl, & Sweller, 2004; Sweller, van Merrienboer, & Paas, 1998）：內在認知負荷（intrinsic cognitive load）、外在認知負荷（extraneous cognitive load）和有效認知負荷（germane cognitive load）。

傳統上，內在認知負荷被定義為是來自教材的複雜度所造成的負荷感，亦即教材本身的難度，外在認知負荷是來自於教材呈現的方式所造成的額外負荷，而有效認知負荷為與基模建構有關的心智努力（Sweller et al., 1998）。Sweller（2010）指出，此三種認知負荷皆與元素互動（element interactivity）有關。一個元素（an element）是指任何要習學的事物，如一個概念或程序（Sweller, 2010）。元素互動是指個別的元素在學習時需指涉到其它的元素，因此學習者必須同時考慮多個元素，元素互動性愈高，認知負荷也愈高。依據 Sweller（2010），學習歷程的外在認知負荷與內在認知負荷的區辨是依據此元素互動是基於當前學習任務所必要（內在認知負荷）或基於教學程序的作用（外在認知負荷）所產生的元素互動，而有效認知負荷也可被定義為內在認知負荷，因為有效認知負荷是指用於與基模建構有關的認知負荷，所處理的是基模本身的元素互動，負荷是來自於基模本身所需的元素互動，因此學習歷程中的元素互動性影響學習歷程的認知負荷感。

另一方面，雖然內在認知負荷的程度是受任務本身的元素互動性的影響，但學習者的專業程度也會影響其對元素互動性的感知。例如，同樣的一個字 intrinsic，對沒有相關知識或不認識

此英文單字的人可能是 9 個元素所組成的符號，對熟悉此字彙的人，它只是一個元素。亦即教材的困難度或元素互動性會因學習者的專業程度不同而不同，因此從認知負荷的觀點，同樣的教材呈現方式，對不同的學習者可能產生不同的認知負荷感。

Sweller（2007, 2010）指出，無效的教學是由高度的外在認知負荷所造成的，這阻礙了基模的習得與自動化。相反地，有效的教學是由於教學鼓勵高度的有效認知負荷所造成。除此之外，如果內在認知負荷很低的話，高度的外在認知負荷就不重要，儘管使用沒有效率的教學流程，仍有充份的工作記憶資源可用於學習。但反過來，如果內在認知負荷很高的話，外在認知負荷如果過高，將可能無法產生學習。從此觀點，有效的教學應降低教學歷程中不必要的外在認知負荷，以增加可用的認知資源從事基模建構或自動化的活動，或促進有效認知負荷的活動。

（二）避免外在認知負荷的工作範例設計

承上對認知負荷類型的理解，內在認知負荷主要來自教材本身的複雜度，在不改變教學目標或內在認知負荷的情況下，有效的工作範例首先要減少不必要的認知負荷。Kalyuga（2009）認為典型製造不必要認知負荷的教學情境有四：

1.相關的表徵在時空中以分散注意力的方式呈現，學習者需要搜尋配對訊息才能理解內容，因而降低學習表現，此即所謂的分散注意力效應（Kalyuga, Chandler, & Sweller, 1999）。

2.訊息改變的速度快或一次呈現的量超過學習者的認知負荷，特別是在多媒體的學習環境中，學習者常常因不當的教學設計，而需要在工作記憶中統整大量資訊而產生認知超荷，或來不及處理短暫停留的資訊而影響學習，產生短暫訊息效應（transient information effect）（Sweller, Ayres, & Kalyuga, 2011）。

3.未提供足夠的外在引導以彌補學習者知識不足，以致學習者被迫要隨機的產生解決方法。因此，研究一再支持使用工作範例比傳統的問題解決更能產生有效的學習，此即工作範例效應（Renkl, 2005; Sweller & Cooper, 1985）。

4.學習者本身的知識和所提供的知識重疊，因此，相同的訊息在學習者的心智上卻有二個互相參照的表徵，造成額外的負荷，產生所謂的專家反轉效應（expertise reversal effect）（Kalyuga, 2009; Kalyuga, Ayres, Chandler, & Sweller, 2003），此現象常發生於原本用於輔助低先備知識學習者而提供的有效呈現方式，對高先備知識的學習者可能反而有害。

依據上面的論述，所呈現的訊息是否為外在認知負荷亦與學習者的專業知識有關，例如上述的第二點，訊息改變的速度或訊息是否過量的關鍵在於學習者能否在有限的時間內整合或統整資訊，依據前述有關人類記憶與知識屬性的瞭解，學習者的先備知識較佳或有相關基模的學習者，可以更有效率的知覺與整合訊息；又如第四點，教學者所提供的訊息，對沒有相關基模的學習者可能是有用的，但對先備知識較佳或有相關基模的人反而是一種干擾。

（三）促進有效認知負荷的教學設計

但另一方面，許多學者指出（如 Chi & Bassok, 1989; Chi, Bassok, Lewis, Reimann, & Glaser, 1989; Moreno & Mayer, 2010），只是降低不必要的認知處理，學習不一定能產生，除非教學的歷程能促使學習者積極的投入心智努力於知識的建構，或促進有效認知負荷。反思、自我解釋、或精緻化探問（elaborative interrogation）是過去研究用來增加有效認知負荷的策略（Moreno & Mayer, 2010）。受限於人類工作記憶的限制，一般認為，如果訊息要能留在記憶中並與長期記憶產生連結，學習者必須要精緻化這些認知的訊息，解釋給別人聽或能對工作範例中的解題步驟提出說明，可以檢驗學習者的理解，也促進學習者進行知識建構的歷程。Webb（1991）使用合作學習的情境，結果顯示接受精緻化解釋的人可以提昇學習成效。Renkl、Stark、Gruber 與 Mandl（1998）使用自我解釋的策略，學生在解題步驟中自我解釋，結果顯示此策略有助於增加有效認知負荷和提昇學習成效。Crippen 與 Earl（2007）的研究亦顯示，結構清楚的問題中，工作範例加自我解釋（self-explanation）會比傳統的工作範例有較佳的問題解決表現、自我效能和問題解決能力。

但 Chi 與 Bassok（1989）的研究則提出，在工作範例進行合作式學習狀況下，高成就與低成就的學生產生的自我解釋在質與量上有顯著不同的表現。此乃因高成就的學生在研讀工作範例時因自我解釋能力較強，較能建構新舊知識的連結，反之，低成就的學生自我解釋的能力較弱，在學習時只能一步一步的跟隨範例，而沒有和先備知識產生連結或試圖建構一個問題基模，亦即低成就學生很少會使用後設認知技能，以致無法產生學習遷移。Mevarech 與 Kramarski（2003）則發現訓練學生在解題時，自己提問和回答後設認知問題會比工作範例有較佳的立即及延後測表現，且他們發現此後設認知訓練對低成就的學生比高成就學生更有顯著的效益。

但值得注意的是在 Mevarech 與 Kramarski（2003）的研究使用在教室中的合作式學習，且在他們的研究中，工作範例組研讀完一個工作範例後要解四個問題，從認知負荷理論的觀點，這種設計是傳統的問題解決模式，在缺乏相關的解題基模時，合作學習也許是扮演克服個體工作記憶限制的一種替代模式，因此認知負荷理論亦預測低成就的學生在合作式學習模式的收穫會大於高成就組。如果在自學的多媒體學習環境中，將後設認知問題嵌入在工作範例的關鍵位置，鼓勵學生進行後設認知思考，再給予回饋，是否依然有相同的效益？另外，後設認知是高階的認知與思考能力，對低成就的學習者是否有能力進行後設認知思考，亦值得進一步探討。

四、後設認知與問題思考

後設認知是一個人對其認知過程的知覺及自我調整（Flavell, 1976），Mevarech 與 Kramarski（2003）認為學生也許需要透過小組方式，激發學生對問題的思考、對解題歷程進行反思，和建構新舊知識的關係，因此他們以合作學習的方式，比較給予後設認知訓練和工作範例訓練的

學生之數學推理、數學溝通和數學成就的表現，結果發現，訓練學生在解題時，自己提問和回答後設認知問題會比工作範例有較佳的立即及延後測表現，且他們發現此後設認知訓練對低成就的學生比高成就學生更有顯著的效益。King（1991）亦指出，訓練學生集中於新舊知識的關聯性問題上提出後設問題並回答，其學習成效優於只被要求提出各種不同問題的學生。

依據上述文獻，在工作範例中加入自我解釋，或要求學生提問及回答後設認知問題，可以促進有效認知負荷及深層訊息處理，但其效果可能因學習者的先備知識不同，而可能有不同的成效。因此，本研究檢驗後設認知問題的教學設計之成效時，亦加入學習者先備能力的變項，以檢驗所設計的教學策略與學習者的能力是否有交互作用。

Mevarech 與 Kramarski（1997, 2003）的研究將後設認知問題分為四類，包括理解性問題（comprehension questions）、連結性問題（connection questions）、策略性問題（strategy questions）、及反思問題（reflection questions）。理解性問題在促進學生面對問題解決前仔細思考的能力，學生在解決問題前必須試著了解題意，例如：「這個題目是什麼意思？」連結性問題在促進學生聚焦在已經解決問題之間的異同處，例如：「這個問題和你已經解決過的問題間有什麼相似處？」策略性問題在促進學生面對問題解決考慮選用最適當的解題策略技能，學習者必須知道用什麼策略解決問題、為什麼這個策略最好及應該如何使用；反思性問題在促進學習者在解題過程中針對自己的理解和感受進行反思，例如：「我正在做什麼？」、「在解決問題時我面臨什麼困難？」、「我如何驗證這個結果？」、「我能使用不同的方法解決問題嗎？」Mevarech 與 Kramarski（1997）指出當學習者被訓練處理後設認知問題時，面對問題陳述的理解、與舊知識、問題經驗的連結、解題使用的最佳策略和對解題步驟的自我反思，可以提昇學習成效，尤其是低成就學生。因此，本研究的後設認知問題系依據 Mevarech 與 Kramarski 的後設認知問題類型而設計，以檢驗要求學生思考後設認知問題，是否可引導學生深度處理相關訊息或統整相關概念，雖然會加重其學習過程的認知負荷感，但也許可以減少解題的錯誤與迷思概念現象。

五、認知負荷的測量

Kalyuga（2009）認為，認知負荷是一個抽象概念，反映個體的認知特性和訊息結構的互動情形。依據 Kalyuga，理想上，這也是個體完全投入在執行一個任務時的認知資源，但個體實際投入的認知資源則受很多因素的影響，如動機、態度等。因此，在實務上，實際投入的認知資源（actual cognitive resource）可能和所需要的認知資源（required cognitive load）不同。另外，訊息的複雜性會因個體的特性不同而不同，如相同的教材對初學者可能是高複雜的，但對高先備知識者可能可以被視為單一的元素而相對的簡單。因此，探討認知負荷的效果時，需同時考量學習者的特性。同理，詮釋學習者所陳述的認知負荷感時，亦應特別留意所測量的認知負荷指標所代表之意義。

雖然研究已發展出許多不同的具體認知負荷測量法，包括客觀的測量，如生理測量、次任務（secondary task）時間反應，和主觀的測量，如心智負荷或壓力感的自我報告（Brünken, Plass, & Leutner, 2003），但客觀的測量或涉及儀器的普及性與便利性問題，或造成外加的干擾，主觀的測量可以提供非侵入性、有效且具穩定性的心智負荷測量（Kalyuga, 2009; van Gog & Paas, 2008），因此主觀的自我報告評量法也是最常被使用的認知負荷評量法。在客觀的評量法中，又主要是依據 Paas 與 van Merriënboer（1994）提出的認知負荷構念，該構念指出三個認知負荷的評量因子，包括學習者的心智負荷（mental load）、心智努力（mental effort）和學習表現。後續的研究也大都依據此構念做為認知負荷評量的參考模式，因此傳統的認知負荷測量大都以一題困難度或費力度做為認知負荷的評量指標（van Gog & Paas, 2008），並從學習成效詮釋認知負荷與表現的關係。但 Paas 與 van Merriënboer 的認知負荷架構中，認知負荷的測量並未考量動機因素，本研究認同 Kalyuga（2009）的論點，認為學習者投入認知資源的程度是複雜的，動機是值得注意的因子。且 Paas 與 van Merriënboer 的認知負荷架構中的心智努力（mental effort）可以包含二種意義，一為因教材的設計方式所產生的理解教材所需花費的心智努力，另一為學習者本身願意投入於學習的努力，前者是傳統的認知負荷指標，當教材的困難度和學習任務所需的心智努力程度（費力程度）超過學習者能負載的程度時，對學習的負面影響也愈大；後者是正向的認知負荷，即學習者愈願意投入努力，愈可能對學習帶來正面的影響，而學習者是否願意投入努力會受其對任務的信心程度和學習意願的影響。國內左台益等人（2011）的認知負荷量表包括內容困難度、費力程度、信心程度、投入努力程度及意願等五個題目，即是同時考量動機因素對心智努力的影響，內容困難度、費力程度可視為負向的認知負荷指標，當它超過學習者的心智資源時，將負向的影響學習表現，而投入努力程度可視為正向的認知負荷，不受心智資源的限制，但調節學習者願意投入的心智資源，且受信心程度、及學習意願的調節，因此與信心、意願可視為動機指標。因此，本研究採用此量表做為認知負荷的指標，並探討它與學習表現的關係。

參、研究假設

依據過去相關研究及認知負荷理論，後設認知問題的思考會增加學習者的負荷感，但此負荷感來自於處理與基模建構有關的認知歷程，是可以促進學習的有效認知負荷。因此，如果學習者在學習的過程中確實進行思考活動，認知負荷感將增加，也會增加學習時間，但學習成效亦會提昇。但學習者的問題思考能力可能因學習者本身的能力而有差異，因此工作範例中的後設認知問題可能與學習者的能力產生交互作用，高能力者可能較低能力者更能從後設認知問題的提問進行較深層的思考而獲益，而低能力者可能受限於本身的能力，而無法確實進行深層思

考或從中獲益較有限，因此本研究假設：

研究假設 1：「工作範例模式」與「能力」在學習成效上有交互作用，在高能力組，「後設認知組」高於「對照組」，在低能力組則無差異，但在學習內容較簡單時，則無交互作用且「工作範例模式」主效果亦不顯著。

研究假設 2：「工作範例模式」中有無後設認知問題對不同數學能力（高、低）學生的學習時間存在顯著差異的影響。

研究假設 2.1：「後設認知組」的學習時間會多於「對照組」。

研究假設 2.2：低能力群的學習時間會高於高能力群的學習時間。

而學習者的認知負荷會受其能力與學習歷程感受的認知負荷感、學習表現的影響，因此在學習階段和測驗階段所測量的認知負荷會有差異。因此本研究假設：

研究假設 3：「工作範例模式」與「能力」對學生的認知負荷存在顯著差異的影響，但也會因為測量的時間點與教材難度不同而有差異。

研究假設 3.1：在學習階段測量的認知負荷，「後設認知組」的負向認知負荷指標（費力度）會高於「對照組」，但學習內容較簡單時則不顯著。

研究假設 3.2：在學習階段測量的認知負荷，高能力組的負向認知負荷指標（費力度）會低於低能力組，但在學習內容較簡單時則不顯著。

研究假設 3.3：在測驗階段測量的認知負荷包括負向的認知負荷指標和動機指標。

在負向的認知負荷方面，「後設認知組」會因為學習，負向認知負荷感（困難度、費力度）會低於「對照組」，高能力群的負向認知負荷會低於低能力群。

研究假設 3.4：在測驗階段測量的認知負荷動機指標方面，「工作範例模式」和「能力」會有交互作用。高能力群中的「後設認知組」會因為學習的產生，在動機指標（意願、信心、投入努力）會高於「對照組」，低能力群因無法從後設認知問題受惠，所以「對照組」動機指標會高於「後設認知組」。

肆、研究方法

一、研究設計

本研究以實驗研究法探討二種工作範例的設計模式（有、無後設認知問題）對二個不同能力的學生（高、低）在學習成效（立即後測、延後測）、學習時間、與認知負荷是否有顯著性的影響，因此，本研究為 2（工作範例模式）× 2（能力）研究設計。

在本研究中，工作範例是指為了完成一個任務或解決問題而進行步驟化解釋的演示。本研究以四個題目為一題組（兩題工作範例搭配兩題練習題），又根據 Mevarech 與 Kramarski（1997）

提出的後設認知問題類型，在工作範例模式的關鍵位置（即學生容易有迷思或錯誤的地方）中加入後設認知問題提問。例如：在示範平行四邊形切割、搬移成面積相等的長方形後，請學習者「回想看看，剛剛平行四邊形切割、搬移變成長方形的過程中，切割時最重要的是什麼？」並於 3 秒後出現「看解答」按鈕，再由學習者決定是否立即按鈕看解答或持續思考後再按看解答，藉以驗證自己心中所預設的答案對錯與否。對照組則不經後設認知發問而直接陳述問題的答案。

而「能力」變項是以受試者當學期第一次數學期中評量成績做為能力分組的依據，採前 50%為高分組，後 50%為低分組。

二、研究對象

本研究正式受試樣本為宜蘭市某國小五年級四個班級的學生，本研究的內容在該校是五年級下學期的內容，本研究於五年級上學期開學後第三週開始進行，因此尚未、也不會在當學期的正式課程中學到本研究的內容。因受試期間長達 4 週，考量每週 4 個班級學生座位次序的固定性及電腦教材安裝、環境設定的複雜性，且學生從四年級升上五年級時已公開做過隨機編班，因此學生座號原則上已屬隨機分派，故本研究採取單雙號分組。刪除無法全程參與、資料不完整及資源班學生，最後以 86 人為有效樣本。研究對象分配如表 1。

表 1

研究對象分組分配表

		組別		總數
		對照組	後設認知組	
能力	低	20	23	43
	高	20	23	43
	總數	40	46	86

三、研究工具

本研究的研究工具包括平行四邊形迷思概念（紙本）測驗、平行四邊形面積多媒體教材、學習成效評量（多媒體）、及認知負荷量表（多媒體），以下分別說明。

（一）平行四邊形迷思概念（紙本）測驗

為檢驗目前學生的迷思概念及具體的錯誤類型以做為教學內容設計及試題誘答設計的參考，本研究共邀請兩位數學領域專家及兩位國小資深教師共同設計一份紙筆測驗，將分析結果列為設計教材與教學、及試題誘答的參考。內容包含：1. 平行與垂直的基本概念、依據性質辨識平行四邊形的形狀；2. 辨別平行四邊形的高、畫出高；3. 利用方格板求平行四邊形的面積、

複合圖形的面積計算；4. 無方格板中有多餘資訊求平行四邊形的面積、由面積推算底或高；5. 反向思考題；6. 同底等高的面積計算及比較。此測驗完成後施測於預試樣本，該群學生來自宜蘭縣、臺北市、新北市五所學校共 8 個班級、229 名六年級學生。針對施測結果進行錯誤分析，本研究在設計教學內容時特別著重在這些常犯的錯誤類型，以探討工作範例中加入後設認知問題的引導後，是否有助學習者改善學習表現。

（二）多媒體教學內容與教材

本實驗所採用的教材內容，係依據教育部民國 97 年所公佈之九年一貫數學領域面積能力指標：S-2-03 能理解垂直與平行的意義、S-2-05 能透過操作，認識簡單平面圖形的性質，及 S-3-06 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式（N-3-22）來製作。教材內容則由二位數學教育專家、二位數學專家、二位教育教學專家，一位測驗評量專家、二位現職教師，根據數學本質內容共同設計五個教學活動，包含：複習（A0）、形狀變（A1）、名詞變（A2）、公式變（A3）、練習（A4）及關係（A5）等。本教材的 A0 對應的能力指標為 S-2-03 及 S-2-05，在各版本教材為四年級的內容，A1 至 A5 對應的能力指標為 S-3-06，在各版本教材為五年級的內容。不同的版本出現該單元的時間不同，對本研究的受試者，該單元出現在五年級下學期，本研究進行時間為五年級上學期，所以對本研究的對象，是新的知識內容。

本研究將以上教學內容製作成多媒體教材，根據教學目標與教學內容設計出三個單元的課程，各單元內容及教學重點整理成表 2。

表 2

多媒體教材單元內容及教學重點

單元	數學內容結構	教學目標
單元一	A0 複習	1. 能判斷兩直線是否互相垂直
		2. 能判斷兩直線是否互相平行
		3. 能畫出通過線外一點且與此直線垂直的直線
		4. 能畫出給定直線且與此直線平行的另一直線
單元二	A1 形狀變	1. 能瞭解平行四邊形的性質
	A2 名詞變	2. 能找出平行四邊形的底與高
		3. 能依指定底邊畫出高
單元三	A3 公式變	1. 能藉由切割搬移推導平行四邊形的面積公式
	A4 練習	2. 能應用公式計算平行四邊形面積
	A5 關係	3. 能應用面積公式比較同底等高的圖形

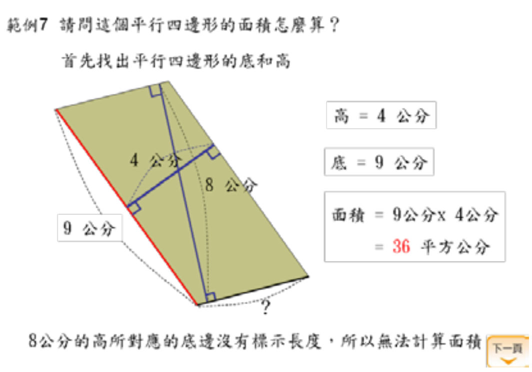
本研究的多媒體教學內容依研究目的分為兩個版本（除單元一外），即在工作範例中有「後設認知問題」與「無後設認知問題」兩種版本，兩組的教材內容並無差異，差別只在於有無提供後設認知問題，「後設認知問題」版以後設認知問題提問的方式讓學習者進行思考，3 秒之後出現「看解答」按鈕，再由學習者決定看答案時機；「對照組」版則不經由提問而直接敘述答案。二組教材之差異示例如表 3。

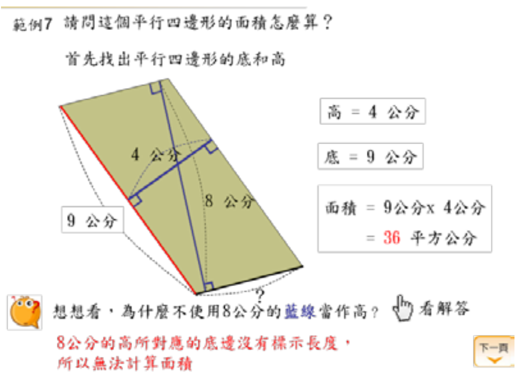
單元一是複習先備知識並做為熟悉多媒體教材操作的練習，因此所有的學習者皆使用相同教材，因此本單元不列入研究結果的分析。教材完成設計製作後，於 101 年 6 月以宜蘭縣、新北市兩所學校，5 個班級 132 位將升上五年級的四年級學過長方形面積的學生進行平行四邊形面積多媒體教材進行預試，並根據預試結果進行教材內容修正，針對不同類型題設計四個題目（二題範例題與二題練習題）並將每節課學習時間控制在 30~35 分鐘，並以 Visual Basic for Applications（VBA）程式紀錄每節課的學習時間及學生的作答。

表 3

「對照組」與「後設認知問題組」教材示例

「對照組」示例	「後設認知問題組」示例





（三）學習成效評量工具

本研究學習成效的評量工具包括各單元之立即後測及綜合的延後測，單元二立即後測 26 題，單元三立即後測 16 題，延後測 40 題，每題皆為一分。因各次評量題數不一，故分析時以答對率進行分析。測驗架構係依據 National Assessment of Educational Progress（NAEP），將評量內容依認知結構分為概念理解、程序執行和解題思考三類。表 4 橫軸為認知結構，縱軸則依據數學內容結構，列出對應的教學目標。立即後測是針對當次課程的內容，延後測是綜合實驗課程的內容，題目是依據預試的試題之鑑別度與難易度結果，排除鑑別度低及難度偏高之題目，再加入由國家教育研究院曾建銘副研究員所提供已建立全國常模的平行四邊形面積題目 12 題，最後版本為 40 題。以正式樣本所測得的試題信效度分別為：單元二的鑑別度 .33，難易

度 .70，折半信度 .71；單元三的鑑別度 .42， 難易度 .60，折半信度 .67； 延後測鑑別度為 .42，難易度為 .60，折半信度 .87。

表 4

平行四邊形面積單元數學內容結構與認知結構

認知結構 / 數學內容結構	概念理解	程序執行	解題思考
A0 複習	● 能理解長方形和正方形的面積公式。 ● 能辨認長方形的長和寬和正方形的邊長。	● 會計算長方形和正方形的面積。	
A1 形狀變	● 了解平行四邊形的意義。 ● 能認知平行四邊形的每一邊都可以視為底邊。 ● 能認知經過切割重組為長方形。	● 能用一次或多次適當的分割把平行四邊形重組為長方形。	● 能利用平行四邊形切割重組為長方形的概念及程序性知識處理平行四邊形切割問題。
A2 名詞變	● 了解平行四邊形底和高的意義。 ● 理解組成長方形的類比（高和底）。	● 熟練作高（任一點或底可以作高）。	● 能夠辨認任意平行四邊形的底和高。
A3 公式變	● 了解平行四邊形面積公式的意義。 ● 能辨識組成面積公式的組成元素。 ● 能理解面積公式的意義。	● 兩平行線之間距離都是高。	● 能夠辨認正確的平行四邊形面積公式。 ● 能在不同情境中計算面積。
A4 練習	● 知覺同底等高面積相同。	● 分辨是否滿足同底等高的條件。	● 根據同底等高的關係計算平行四邊形的面積。
A5 關係		● 能夠分辨不在相同位置上同底等高的平行四邊形面積相同。	● 切割操作動作能轉換成形體結構性質（避免只記得公式）。

（四）認知負荷量表

本研究的認知負荷測量採用左台益等人（2011）的認知負荷量表，該量表包括內容困難度、費力程度、信心程度、投入努力程度及意願等五個題目，其中內容困難度、費力程度是負向的認知負荷指標，而信心程度、投入努力程度及意願可視為正向的認知負荷或動機指標。本研究採用李克特式（Likert scale）五等量表方式。此外，為了瞭解加入後設認知問題是否增加學習者學習時的認知負荷感，及此負荷感是否有利於學習，而在測驗時因學習的產生而降低解題時的認知負荷感，因此，本研究同時測量學習時的認知負荷及測驗時的認知負荷，但為避免重覆測量造成學習者的厭煩，因此在每個單元課程結束，立即後測之前請受試者回答一個認知負荷問題：「要理解剛剛的教材內容會不會很費力？」而測驗之後的認知負荷測量採用左台益等人（2011）之完整認知負荷量表共五題。

四、實驗步驟

本研究於 101 年 9 月進行，整體實驗須進行四週，共需 4 節課時間。第一節進行單元一多媒體教材的學習及立即測驗，讓學習者熟悉多媒體教材的操作與使用，之後每隔一星期進行一節課的單元學習，直到最後一節課進行延後測，用以了解學習者對於進行多媒體學習後的長期記憶之成效評估。在第二、三節時，在學習教材之後、進入立即後測之前學習者先回答一題認知負荷題（費力度），在完成測驗後完成完整的認知負荷題五題。實驗步驟及流程如表 5 所示：

表 5

正式實驗施測流程表

週次	節次	實驗內容	時間
第一週	第一節	紙筆前測	20 分鐘
	第二節	指導說明	3 分鐘
		單元一教材及立即測驗 25 題＋認知負荷量表	37 分鐘
第二週	第三節	指導說明	3 分鐘
		單元二教材及立即測驗 26 題＋認知負荷量表	37 分鐘
第三週	第四節	指導說明	3 分鐘
		單元三教材及立即測驗 16 題＋認知負荷量表	37 分鐘
第四週	第五節	延後測 40 題＋認知負荷量表	40 分鐘

伍、結果分析

一、學習成效分析

表 6 是各組在各單元立即後測及延後測的學習成效之描述統計表。由表 6 的描述統計資料顯示，整體而言，在低能力群中兩組工作範例模式的立即後測及延後測成績差異皆不大，但在高能力組，則有「對照組」的測驗成績高於「後設認知組」的趨勢，但需進行推論統計檢驗。

表 6

立即測驗及延後測答對率（%）之描述性統計量

			低能力		高能力	
	組別	*n*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
單元二	對照組	20	66.92	15.00	78.08	11.71
	後設認知組	23	66.05	11.58	71.07	11.65
單元三	對照組	20	52.81	14.12	71.56	14.41
	後設認知組	23	52.72	13.95	60.33	15.15
延後測	對照組	20	51.63	17.44	70.25	16.34
	後設認知組	23	50.54	13.77	65.54	14.26

因本研究的學習內容不在受試者當學期的學習範圍且本研究已採隨機分派，針對學習成效直接進行二因子多變量變異數分析。共變量矩陣等式的 BOX 檢定及 Levene 的變異同質性檢定皆未違反基本假設。推論統計結果顯示，多變量整體考驗「工作範例模式」的 Wilk's $\lambda = .95$，$p = .28$，「能力」的 Wilk's $\lambda = .75$，$p < .001$，「工作範例模式」與「能力」交互作用之 Wilk's $\lambda = .95$，$p = .29$。亦即整體而言，「工作範例模式」和「能力」在本研究中沒有顯著的交互作用效果，「工作範例模式」沒有顯著的主效果，「能力」主效果達顯著水準。單變量 F 考驗的統計結果顯示，「能力」變項在三個測驗皆顯著，單元二 $F(1,82) = 8.95$，$p = .004$，$\eta_p^2 = .10$；單元三 $F(1,82) = 17.86$，$p < .001$，$\eta_p^2 = .18$；延後測 $F(1,82) = 25.43$，$p < .001$，$\eta_p^2 = .24$。意即研究的結果除了能力間存在預期的差異外，結果不支持「工作範例模式」與「能力」有交互作用（研究假設 1），且高能力組的表現與預測的方向相反，即「對照組」的測驗成績略優於「後設認知組」之趨勢，但未達到統計上的顯著差異。

二、學習時間分析

本研究的學習時間是指受試者開始進入學習內容起算，停留在範例與練習頁面的時間總和，本研究共蒐集單元二、單元三的學習時間。結果分析如下：

表 7 為單元二、三學習時間的描述性統計表。二因子多變量變異數分析結果顯示，共變量矩陣等式的 BOX 檢定及 Levene 的變異同質性檢定皆未違反基本假設，整體效果的多變量考驗顯示，「工作範例模式」的 Wilk's $\lambda = .84$，$p = .001$，能力的 Wilk's $\lambda = .93$，$p = .053$，「工作範例模式」與「能力」交互作用的 $\lambda = .96$，$p = .19$.。亦即整體而言，「工作範例模式」和「能力」在本研究中沒有顯著的交互作用效果，「工作範例模式」和「能力」皆有顯著整體效果。單變量 F 考驗的統計結果顯示，「工作範例模式」變項的主效果在二個單元皆達統計上的顯著差異，單元二 $F(1,82) = 11.59$，$p = .001$，$\eta_p^2 = .12$；單元三 $F(1,82) = 7.78$，$p = .007$，$\eta_p^2 = .09$，「後設認知組」在二個單元的學習時間皆顯著的高於「對照組」。「能力」變項主效果在單元二不顯著，$F(1,82) = 1.87$，$p = .18$，$\eta_p^2 = .02$；但在單元三時達顯著差異，$F(1,82) = 5.47$，$p = .02$，$\eta_p^2 = .06$，低能力群的學習時間多於高能力群。

表 7

學習時間之描述性統計（單位：秒）

			低能力		高能力	
	組別	*n*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
單元二學習時間	對照組	20	1382.47	171.90	1357.30	108.45
	後設認知組	23	1497.81	134.94	1442.48	123.73
單元三學習時間	對照組	20	1812.38	135.53	1794.48	163.80
	後設認知組	23	1985.82	212.76	1829.17	163.38

從表面看，上述的結果吻合研究假設 2 的預期，從整體學習時間來看，「後設認知組」的學習時間都明顯大於「對照組」，但此差異可能來自於教材版本身造成之系統性差異，即後設認知問題的提問與等待時間。在本研究中兩種教材在設計上最大的區別在於有後設認知問題的頁面之後半段，也就是從「後設認知組」的提問開始，經過 3 秒等待時間到最後答案講述，「後設認知組」多了提問及等待的時間，「對照組」則直接進到講述答案。在單元二有 18 個後設認知問題，二組的基本時間差異是 99.63 秒，單元三有 15 個後設認知問題，二組的基本時間差異是 89.96 秒。因此，本研究進一步計算從「後設認知組」提問開始到講述答案的時間這過程，各組的時間。從表 8 中可以看出，如果扣除這些秒數後，組別之間的學習時間已沒有顯著的差異，二個單元皆是 $F(1, 82) < 1$，表示「後設認知組」除了基本三秒等待時間，並沒有多花思考時間，且由表 8 發現，隨著課程難度的增加，低能力群中在「後設認知組」的時間略多於「對照組」，但在高能力群則正好相反，「對照組」的學習時間反而略多於「後設認知組」。

表 8

後設認知問題頁扣除系統性差異後，各組的平均學習時間差（單位:秒）

	能力	組別	原始平均數	系統時間差	扣除系統時間差	二組時間差異
單元二	低	對照組	513.45		513.45	
		後設認知組	615.11	99.63	515.48	2.03
		Total	567.83			
	高	對照組	495.01		495.01	
		後設認知組	596.72	99.63	497.09	2.08
		Total	549.41			
單元三	低	對照組	491.02		491.02	
		後設認知組	589.60	89.96	499.64	8.62
		Total	543.75			
	高	對照組	490.07		490.07	
		後設認知組	572.61	89.96	482.65	-7.42
		Total	534.22			

三、認知負荷分析

本研究在二個時間點測量學習者的認知負荷感受，一為在完成單元學習之後，另一為在完成測驗之後。本研究完整的認知負荷包含五個指標，即「內容困難度」、「理解費力度」、「信心度」、「投入努力」及「學習意願」，前二者為傳統的認知負荷測量指標，後三者在本研究中為認知負荷的動機指標。為避免重覆測量造成學習者的厭煩，因此在完成單元學習後的認知負荷，僅以「費力度」做為學習時認知負荷指標。

各階段認知負荷分析如下：

（一）學習階段

表 9 是學習者在完成學習單元時針對學習教材費力度的描述統計，整體效果的多變量考驗顯示，「工作範例模式」與「能力」交互作用的 Wilk's $\lambda = .93$，$p = .05$，「工作範例模式」的 Wilk's $\lambda = .90$，$p = .01$，「能力」的 Wilk's $\lambda = .95$，$p = .11$。亦即整體而言，「工作範例模式」和「能力」的交互作用及「能力」達到顯著差異。後續的單變量 F 考驗的統計結果顯示，「能力」與「工作範例模式」的交互作用在單元二為 $F(1,82) = 4.12$，$p = .046$，$\eta_p^2 = .05$，在單元三為 $F(1,82) = 5.52$，$p = .02$，$\eta_p^2 = .06$，皆達到統計上的顯著差異。單純主要效果顯示，低能力群的二種工作範例模式在單元二的費力度感受未達統計上的差異，$F(1,41) = 2.90$，$p = .10$，$\eta_p^2 = .07$，但在單元三時

「後設認知組」的費力度感受明顯高於「對照組」，$F(1,41) = 15.26$，$p < .001$，$\eta_p^2 = .27$；在高能力群則皆不顯著，單元二 $F(1,41) = 1.30$，$p = .26$，$\eta_p^2 = .03$；單元三 $F(1,41) < 1$。在「對照組」，不同能力群學習者的費力度感受在單元二 $F(1,38) < 1$、單元三 $F(1,38) = 2.40$，$p = .13$，$\eta_p^2 = .06$ 皆不顯著，但在「後設認知組」，低能力群的認知負荷感大於高能力群，在單元二達到統計上的顯著差異，$F(1,44) = 9.68$，$p = .003$，$\eta_p^2 = .18$；但單元三未達統計上的顯著差異，$F(1,44) = 3.29$，$p = .08$，$\eta_p^2 = .07$，但依據 Cohen 的說法 η^2 值 .01，.06，.14 分別對應小、中、大的效果量（引自 Yockey，2011/2012，頁 143），因此「後設認知組」中不同能力的學習者之費力度差異達中等程度的效果量。

本研究預期增加後設認知問題會增加學習者的負向認知負荷感，低能力群的負向認知負荷感會高於高能力群，但研究結果僅低能力群中的「後設認知問題組」的反應與預期的方向相符，高能力群則與研究假設的預期不符。

表 9

學習階段教材理解費力度描述統計

			低能力		高能力	
	組別	*n*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
單元二費力度	對照組	20	1.83	0.79	1.83	0.83
	後設認知組	23	2.26	0.85	1.58	0.62
單元三費力度	對照組	20	1.70	1.13	2.25	1.12
	後設認知組	23	3.13	1.25	2.39	1.50

（二）測驗階段

在每單元的立即後測之後，學習者填寫完整認知負荷的問卷，表 10 是各組在三個測驗完成後所填答的認知負荷描述統計表。

表 10

測驗階段認知負荷描述統計

	對照組				後設認知組			
	低能力	n = 20	高能力	n = 20	低能力	n = 23	高能力	n = 23
	M	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
單元二困難度	2.50	1.47	2.15	1.09	2.78	1.20	2.70	1.33
單元三困難度	2.30	1.26	2.91	1.20	2.40	0.99	2.52	1.16
延後測困難度	2.90	0.97	2.60	1.05	2.91	1.08	2.91	1.00
單元二費力度	2.25	1.29	2.25	1.02	2.74	1.32	2.43	1.24
單元三費力度	2.85	1.31	2.50	1.05	3.13	1.32	2.70	1.22
延後測費力度	2.75	1.12	2.65	1.27	2.91	0.95	2.87	1.25
單元二意願	3.50	1.50	3.95	1.23	3.43	1.16	3.26	1.36
單元三意願	3.80	1.36	3.50	1.36	3.35	1.34	3.13	1.69
延後測意願	3.80	1.06	4.05	1.00	3.43	1.12	3.13	1.46
單元二信心	3.65	1.46	3.85	1.09	3.57	1.08	3.57	1.24
單元三信心	4.15	0.93	4.20	0.77	3.43	1.24	3.30	1.18
延後測信心	3.25	0.97	3.35	1.31	3.13	1.22	3.00	1.24
單元二投入努力	3.75	1.16	3.40	1.47	3.43	1.20	3.17	1.23
單元三投入努力	3.85	1.35	3.10	1.41	3.61	1.08	2.91	1.20
延後測投入努力	3.85	0.88	3.70	1.30	3.70	0.97	3.48	1.12

二因子多變量變異數分析結果顯示，除了投入努力的指標外，認知負荷各指標的共變量矩陣等式的 BOX 檢定及 Levene 的變異同質性檢定皆未違反基本假設。負向認知負荷指標（費力度與困難度）的整體效果多變量檢驗與單變量檢驗在「工作範例模式」（費力度 Wilk's λ = .98，p = .62；困難度 Wilk's λ = .96，p = .41）、「能力」（費力度 Wilk's λ = .97，p = .55；困難度 Wilk's λ = .99，p = .85）及其交互作用（費力度 Wilk's λ = .99，p = .91；困難度 Wilk's λ = .70，p = .46）皆不顯著。即學習者在測驗時所感知的困難度和費力度並沒有因能力或使用的「工作範例模式」而有顯著的差異。

在動機指標方面的整體效果考驗，「信心度」在「工作範例模式」與「能力」交互作用的整體考驗（Wilk's λ = 1.00，p = .95）及「能力」（Wilk's λ = 1.00，p = .97）皆不顯著，但在「工作範例模式」（Wilk's λ = .87，p = .01）的整體效果顯著。單變量 F 考驗的統計結果顯示，在單元三時，「對照組」的信心度顯著高於「後設認知組」，F(1,82) = 12.34，p = .001，η_p^2 = .13。直接講述的工作範例比在工作範例中以後設認知問題提問讓學習者更有信心。

「意願」的整體效果考驗，「工作範例模式」Wilk's λ = .93，p = .11，「能力」Wilk's λ = .98，p = .58，及其交互作用 Wilk's λ = .97，p = .43，皆不顯著，但單變量 F 考驗的統計結果卻顯示「工作範例模式」在延後測時 $F(1,82) = 6.33$，$p = .014$，$\eta_p^2 = .07$，達 $p < .0167$（因有三個水準，所以 0.05/3 = .0167）的顯著水準，「對照組」對繼續類似活動的意願高於「後設認知組」，後設認知思考降低學習者後續的學習意願。

「投入努力」整體效果考驗，違反 BOX 共變數同質考驗，「工作範例模式」Wilk's λ = .98，p = .72，「能力」的 Wilk's λ = .92，p = .08，其交互作用 Wilk's λ = .999，皆未達統計上的顯著，但「能力」的單變量 F 考驗的統計結果仍顯示在單元三 $F(1,82) = 7.07$，$p = .009$，$\eta_p^2 = .08$ 達統計上的顯著差異，因此再以無母數 Mann-Whitney Test 檢驗，結果 $U = 636.5$，$p = .01$，在單元三時，能力的差異達顯著差異，低能力組較高能力組投入較多努力，這是預期的方向。

綜合認知負荷的結果，後設認知問題增加低能群學習階段的負向認知負荷（費力度）感，但對高能力群則無影響，但對後測解題時的負向認知負荷感，則無統計上顯著的「能力」或「工作範例模式」的差異，且後設認知問題負向地影響學習者的信心和後續活動的意願。測驗階段的認知負荷，除了單元二在各面向皆不顯著，吻合研究假設的預期，整體而言，是在預期的相反方向。此現象可能表示本研究在工作範例中所加入的後設認知問題不是促進有效認知負荷的設計，而是增加外在認知負荷的設計，因此對學習成效沒有顯著的幫助，還負面的影響學習者的信心和意願。另外，測驗階段的認知負荷感受雖與預期的方向相反，但對照學習成效的結果是可以理解的，對照組有較佳的學習效果，因此在動機指標也有較佳的感受（信心和學習意願）。

四、認知負荷與學習表現的關係

在本研究中採用左台益等人（2011）的認知負荷量表，該量表包含五個指標，包括：「困難度」、「費力度」、「信心」、「投入努力」與「意願」。傳統認知負荷研究大都以一題困難度或費力度做為認知負荷的指標，左台益等人的量表考量動機因素對心智努力的影響，信心與意願會影響投入努力程度，但該研究沒有呈現此五個指標的關係，及其與學習成效的關係，因此本研究附帶檢驗此五個認知負荷指標與學習表現的關係，相關分析如表 11。由表可看出費力度和困難度在三次的測量皆呈現中高度相關，顯示此二指標測量共同的概念，即認知負荷的指標，且此二指標與成績在三次的測量皆是中低度的顯著負相關。信心和意願在三次的測量都是顯著的正相關（但相關系數不高），投入努力和意願在二次的立即後測時都是顯著的中度相關，但在延後測時則僅是顯著的低相關；投入努力與信心在單元二（任務較簡單）還有顯著的低相關，但在單元三和延後測時（任務較難）則不相關，成績和投入努力與意願無關，成績和信心則除了單元三（任務較難），皆有顯著中低度的負相關。

綜合五個指標與學習表現的關係，在本研究中成績與傳統認知負荷指標（困難度與費力度）

有一致性的相關性，認知負荷感愈重，成績表現愈不佳。但成績與動機指標似乎沒有穩定的關係，成績與信心較有關，但和投入努力及意願無關；投入努力與意願呈正相關，但和信心較無關。

表 11

認知負荷與成績相關表

	單元二成績	單元二活動意願	單元二困難度	單元二費力度	單元二信心	單元二投入努力
單元二成績	1					
單元二活動意願	.027	1				
單元二困難度	-.331**	-.074	1			
單元二費力度	-.347**	-.141	.742**	1		
單元二信心度	.309**	.272*	-.088	-.104	1	
單元二投入努力	-.022	.458**	-.016	.107	.270*	1
	單元三成績	單元三活動意願	單元三困難度	單元三費力度	單元三信心	單元三投入努力
單元三成績	1					
單元三活動意願	.041	1				
單元三困難度	-.306**	-.344**	1			
單元三費力度	-.423**	-.051	.616**	1		
單元三信心	.091	.295**	-.361**	-.148	1	
單元三投入努力	-.115	.559**	-.093	.193	.122	1
	延後測成績	延後測活動意願	延後測困難度	延後測費力度	延後測信心	延後測投入努力
延後測	1					
延後測活動意願	-.033	1				
延後測困難度	-.304**	-.343**	1			
延後測費力度	-.286**	-.198	.757**	1		
延後測信心	.376**	.265*	-.594**	-.650**	1	
延後測投入努力	-.006	.221*	-.071	-.005	.046	1

陸、結果與討論

本研究探討在工作範例中加入後設認知問題對不同數學能力（高、低）學生學習平行四邊形面積的學習成效、學習時間、認知負荷的影響，並檢驗透過本研究所使用之認知負荷自評量表所測得之認知負荷與學習成效的關係。本研究的認知負荷測量是依據左台益等人（2011）的認知負荷量表，並將指標分為負向的認知負荷指標（困難度與費力度），和正向認知負荷或動機指標（意願、信心和投入努力）。本研究預期後設認知問題會加重學習階段的負向認知負荷感和學習時間，但如果本研究的後設認知問題設計確實能激發學習者的思考，會減少測驗階段的負向認知負荷感、提昇學習表現，和提昇測驗階段的正向認知負荷感或動機指標。此外，後設認知問題需要學生理解、綜合、比較、和連結新舊知識，因此對學習能力較弱或缺乏相關基模的學習者，可能無法立即受益，因此本研究預期「工作範例模式」和「能力」會有交互作用，即後設認知問題的設計對高能力者有較佳的效益，而對低能力群的幫助有限或不明顯。

研究結果顯示，在學習成效上，「工作範例模式」和「能力」在立即後測與延後測並沒有顯著的交互作用，「工作範例模式」主效果也不顯著，僅有「能力」變項在任務較困難時（單元三）達顯著是預期的結果，意即本研究結果不支持研究假設一「工作範例模式」和「能力」在學習成效會有交互作用，且高能力組的表現與預期方向有相反的趨勢，即「對照組」比「後設認知組」在測驗成績略優，但未達到統計上的顯著差異。

在學習時間上，本研究的學習時間資料顯示，「後設認知組」與「對照組」的整體學習時間確如預期達統計上的顯著差異，但扣除系統的基本時間差異後，二組之間沒有顯著的差異，亦即本研究所觀察到的時間差異主要可以由來自系統的時間差異說明，且在難度較高的單元三時，低能力群中的「後設認知組」的學習時間略多於「對照組」，而高能力群相反的「對照組」的學習時間多於「後設認知組」的趨勢，意即高能力群並沒有如預期的較有能力從事後設認知思考而投入時間思考，反而比「對照組」投入更少的時間。

在認知負荷的測量上，本研究分別在學習階段測量負向認知負荷指標，及測驗階段測量負向認知負荷和動機指標。結果顯示，在學習階段所測得負向認知指標與預期的不同，對高能力的學習者，有無後設認知問題不影響其負向認知負荷感知，但在低能力群中，「後設認知組」的負向認知負荷感高於「對照組」。低能力組的負荷感（費力度）增加，表示低能力組可能確實思考了後設認知問題，再對照其學習時間，低能力群中的「後設認知組」之學習時間，在扣除系統差異後，亦都是較多，但因為能力的限制而無法受益，因此後設認知問題只是增加其認知負荷感和學習時間，但對學習無益。但對高能力，有無後設認知問題對其認知負荷感並沒有影響，對照其扣除系統差異後的學習時間及學習成效皆無顯著差異，顯示本研究的高能力群可能並沒有確實的思考本研究中的後設認知問題，因此高能力群的表現（學習成效、認知負荷與時間）

皆與研究假設的預期不吻合。

在測驗階段測得的負向認知負荷感則皆不顯著，但在動機指標方面，整體而言，「對照組」比「後設認知組」有較佳的意願和信心。

亦即整體而言，後設認知問題加重低能力群學生的認知負荷感，但對高能力群則無影響，且後設認知問題同時降低高能力群和低能力群的正向認知負荷感或動機。

綜合學習成效、學習時間、認知負荷與動機的資料，本研究結果顯示，在工作範例中加入後設認知問題，對本研究的五年級學習者沒有立即的學習效益，相反的，後設認知問題要求學習者思考，反而降低學習者的學習意願與信心，也負面地增加低能力群的認知負荷感。在本研究中，高能力群並未如預期的，比低能力群更有後設思考的能力，可以從後設認知問題提醒思考中獲益，相反的，從各方面的資料顯示，在本研究「後設認知組」的高能力群學習者的學習表現與預期的方向相反，且後設認知問題思考的設計反而降低他們的學習意願和信心。另一方面，「後設認知組」的低能力群學習者，因本身能力的限制，無法從後設認知問題的提醒中受益，從認知負荷理論的觀點，學習的目標在改變長期記憶的基模結構，教學設計雖可以誘導學習者投入更多努力、花更多時間，但對長記憶的基模結構沒有幫助時，便是無效率的學習。在本研究中，在工作範例中加入後設認知問題對我們的五年級學習者，並沒有正向的學習表現，相反的，增加整體學習歷程的時間和降低其信心與意願。

本研究結果未發現工作範例中加入後設認知問題能提升立即的學習成效，甚至阻礙學習，此結果與先前的研究（如 Mevarech & Kramarski, 2003）結果不同，也與預期方向不同。在 Mevarech 與 Kramarski（2003）的研究中，後設認知問題訓練組優於工作範例組，且低成就的學生比高成就學生更有顯著的效益，本研究的結果未發現在工作範例中加後設認知問題有立即的學習成效，本研究推論造成此差異結果的可能原因有三：

1.研究對象的差異：Mevarech 與 Kramarski 的研究對象是八年級，本研究的研究對象的是五年級，兩者之間在年齡、心智成熟度均有差別，因此推論在工作範例中加入需要後設認知思考的後設認知問題比較不適合年紀較小的初學者。對本研究的學習者初進入學習主題時，缺乏穩固的基模，在這初學習階段加入後設認知問題，其實不是增加促進基模建構的有效認知負荷，而是增加無助於學習的外在認知負荷，直接教學反而可以讓學習者以較低的負向認知負荷達到相同，甚至略佳的學習成效。

2.場域不同：Mevarech 與 Kramarski 採用班級的合作式學習進行教學，而本研究的場域是個別化電腦學習，因此推論後設認知問題較適合於合作式學習，以擴充個人基模與工作記憶的限制，促進學習。

3.研究時間長度不同：思考後設認知問題需要高階認知能力，且需要比較長的時間才能看到成效，Mevarech 與 Kramarski 的研究是經過一年的後設認知訓練學習，在本研究只進行兩週共二節課的訓練，尚不足以看到立即的顯著成效，或許經過長久的訓練會有不同的成果，值得後續研究者繼續研究。

另外，本研究的後設認知問題設計尚有改善的空間。因為考量學習者的打字及語言表達能力，因此在後設認知問題提問後，並沒有要求學習者輸入他們的想法，只是用問題引導學生思考，並設計最低的三秒思考等待時間後才出現可以看說明的按鈕，原以為如果學習者已開始思考，他們會在完成思考後按按鈕看說明，檢核自己的想法是否與說明一致，有可能按鈕的設計反而讓學習的誤以為思考時間已結束，因此轉移了學習者注意力的焦點，學習者一看到按鈕就按，以為思考時間已結束，不再進行思考。因此，本研究的後設認知問題設計可能增加外在認知負荷，而未能成功地透過後設認知問題的提問，激發學生較深度的思考，因此也沒有如預期的在學習成效產生立即的效益。

另一方面值得注意的是，在本研究中，加入後設認知問題明顯的降低學習者的信心與學習意願，在還沒有穩固的基模前，太多的思考挑戰徒增他們學習時無效的認知負荷感，反而降低他們的信心與意願，相對的，「對照組」有較低的認知負荷感，對學習較有信心和繼續學習或從事相關的解題活動意願。也許對國小階段的學習者，在初學階段不適合給予太多的思考任務，而思考的習慣可能需要更多先備知識及更長的訓練，才能看到效益，因此，在教學應用上，對初學者也許先以工作範例加直接教學解釋，建立學習者的基本基模後，再給予思考、解題的挑戰，可以增加學習者的信心與持續學習的意願。

致謝

本研究感謝國科會的經費補助（NSC 100-2511-S-431-003-MY3）、審查委員與責任編輯的細心評閱與建設性建議、及期刊助理的細心校閱。

參考文獻

左台益、呂鳳琳，曾世綺、吳慧敏、陳明璋、譚寧君（2011）。以分段方式降低任務複雜度對專家與生手閱讀幾何證明的影響。**教育心理學報，43**，閱讀專刊，291-314。

左台益、梁勇能（2001）。國二學生空間能力與 van Hiele 幾何思考層次相關性研究。**師大學報：科學教育類，46**（1, 2），1-20。

黃佑家（2013）。**工作範例加反思問題對不同能力學生學習成效、認知負荷與動機影響之研究**（未出版之碩士論文）。佛光大學，宜蘭縣。

Yockey, R. D.（2012）。**SPSS 就是這麼簡單**（陳正昌、簡清華譯）。臺北：心理。（原作出版於 2011 年）

Brünken, R., Plass, J. L., & Leutner, D. (2003). Direct measurement of cognitive load in multimedia learning. *Educational Psychologist, 38*(1), 53-61. doi: 10.1207/S15326985EP3801_7

Chi, M. T. H., & Bassok, M. (1989). Learning from examples via self-explanations. In L. B. Resnik (Ed.), *Knowing, learning and instruction: Essays in honour of R. Glaser* (pp. 251-283). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Chi, M. T. H., Bassok, M., Lewis, M.W., Reimann, P., & Glaser, R. (1989). Self-explanations: How students study and use examples in learning to solve problems. *Cognitive Science*, *13*(2), 145-182. doi: 10.1016/0364-0213(89)90002-5

Cooper, G., & Sweller, J. (1987). Effects of schema acquisition and rule automation on mathematical problem-solving transfer. *Journal of Educational Psychology, 79*(4), 347-362. doi: 10.1037//0022-0663.79.4.347

Cowan, N. (2001). The magical number 4 in short-term memory: A reconsideration of mental storage capacity. *Behavioral and Brain Sciences*, *24*(1), 87-114. doi: 10.1017/S0140525X01003922

Crippen, K. J., & Earl, B. L. (2007). The impact of web-based worked examples and self-explanation on performance, problem solving, and self-efficacy. *Computers & Education*, *49*(3), 809-821. doi: 10.1016/j.compedu.2005.11.018

Ericsson, K. A., & Kintsch, W. (1995). Long-term working memory. *Psychological Review*, *102*(2), 211-245. doi: 10.1037/0033-295X.102.2.211

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. B. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence* (pp.231-236). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kalyuga, S. (2009). *Managing cognitive load in adaptive multimedia learning*. Hershey, PA: Information Science Reference. doi:10.4018/978-1-60566-048-6

Kalyuga, S., Ayres, P., Chandler, P., & Sweller, J.(2003). The expertise reversal effect. *Educational Psychologist*, *38*(1), 23-31. doi: 10.1207/S15326985EP3801_4

Kalyuga, S., Chandler, P., & Sweller, J. (1999). Managing split-attention and redundancy in multimedia instruction. *Applied Cognitive Psychology*, *13*(4), 351-371. doi: 10.1002/(SICI)1099-0720(199908)13:4<351::AID-ACP589>3.0.CO;2-6

King, A. (1991). Effects of training in strategic questioning on children's problem-solving performance. *Journal of Educational Psychology*, 83(3), 307-317. doi: 10.1037/0022-0663.83.3.307

Mevarech, Z. R., & Karmarski, B. (1997). Improve: A multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classrooms. *American Educational Research Journal*, *34*(2), 365-394. doi: 10.3102/00028312034002365

Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (2003). The effects of metacognitive training versus worked-out examples on students' mathematical reasoning. *British Journal of Educational Psychology*, *73*(4), 449-471. doi: 10.1348/000709903322591181

Moreno, R., & Mayer, R. E. (2010). Techniques that increase generative processing in multimedia learning: Open questions for cognitive load research. In J. L. Plass, R. Moreno, & R. Brünken (Eds.), *Cognitive load theory* (pp. 153-178). New York, NY: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511844744.010

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., & Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 international mathematics report: Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 international results in mathematics*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Paas, F. G. W. C., & van Merriënboer, J. J. G. (1994). Variability of worked examples and transfer of geometrical problem-solving skills: A cognitive-load approach. *Journal of Educational Psychology*, *86*(1), 122-133. doi: 10.1037//0022-0663.86.1.122

Paas, F., Renkl, A., & Sweller, J. (2004). Cognitive load theory: Instructional implications of the interaction between information structures and cognitive architecture. *Instructional Science*, *32*(1-2), 1-8. doi: 10.1023/B:TRUC.0000021806.17516.d0

Renkl, A. (2005). The worked-out examples principle in multimedia learning. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (pp. 229-245). New York, NY: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511816819.016

Renkl, A. (2011). Instruction based on examples. In R. E. Mayer & P. A. Alexander (2011). *Handbook of research on learning and instruction* (pp. 272-295). New York, NY: Routledge.

Renkl, A., & Atkinson, R. K. (2002). Learning from examples: Fostering self-explanations in computer-based learning environments. *Interactive Learning Environments*, *10*(2), 105-119. doi: 10.1076/ilee.10.2.105.7441

Renkl, A., Stark, R., Gruber, H., & Mandl, H. (1998). Learning form worked-out examples: The effects of example variability and elicited self-explanations. *Contemporary Educational Psychology*, *23*(1), 90-108. doi: 10.1006/ceps.1997.0959

Schworm, S., & Renkl, A. (2006). Computer-supported example-based learning: When instructional explanations reduce self-explanations. *Computers & Education*, *46*(4), 426-445. doi: 10.1016/j.compedu.2004.08.011

Stark, R., Kopp, V., & Fischer, M. R. (2011). Case-based learning with worked examples in complex domains: Two experimental studies in undergraduate medical education. *Learning and Instruction*, *21*(1), 22-33. doi: 10.1016/j.learninstruc.2009.10.001

Sternberg, R. J., & Sternberg, K. (2012). *Cognition* (6th ed.). Singapore: Cengage Learning.

Sweller, J. (1998). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science*, *12*(2), 257-285. doi: 10.1016/0364-0213(88)90023-7

Sweller, J. (2006). The worked example effect and human cognition. *Learning and Instruction*, *16*(2), 165-169. doi: 10.1016/j.learninstruc.2006.02.005

Sweller, J. (2007, October). Cognitive Load. In Y. K. Liao (Chair), *Cognitive Load: Theory and Applications*. Symposium conducted at the meeting of Fo Guang University, Yilan, Taiwan.

Sweller, J. (2010). Element interactivity and intrinsic, extraneous, and germane cognitive load. *Educational Psychology Review*, *22*(2), 123-138. doi: 10.1007/s10648-010-9128-5

Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive load theory*. New York, NY: Springer. doi: 10.1007/978-1-4419-8126-4

Sweller, J., & Cooper, G. A. (1985). The use of worked examples as a substitute for problem solving in leanring algebra. *Cognition and Instruction*, *2*(1), 59-89. doi: 10.1207/s1532690xci0201_3

Sweller, J., & Sweller, S. (2006). Natural information processing systems. *Evolutionary Psychology*, *4*, 434-458.

Sweller, J., van Merrienboer, J. J. G., & Paas, F. G. W. C. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, *10*(3), 251-296. doi: 10.1023/A:1022193728205

van Gerven, P. W. M., Paas, F., van Merriënboer, J. J. G., Hendriks, M., & Schmidt, H. G. (2003). The efficiency of multimedia learning into old age. *British Journal of Educational Psychology*, *73*(4), 489-505. doi: 10.1348/000709903322591208

van Gog, T., & Paas, F. (2008). Instructional efficiency: Revisiting the original construct in educational research. *Educational Psychologist*, *43*(1), 16-26. doi: 10.1080/00461520701756248

van Gog, T., Paas, F., & van Merriënboer, J. J. G. (2004). Process-oriented worked examples: Improving transfer performance through enhanced understanding. *Instructional Science*, *32*(1-2), 83-98. doi: 10.1023/B:TRUC.0000021810.70784.b0

van Gog, T., Paas, F., & van Merriënboer, J. J. G. (2006). Effects of process-oriented worked examples on troubleshooting transfer performance. *Learning and Instruction*, *16*(2), 154-164. doi: 10.1016/j.learninstruc.2006.02.003

van Gog, T., Paas, F., & van Merriënboer, J. J. G. (2008). Effects of studying sequences of process-oriented and product-oriented worked examples on troubleshooting transfer efficiency. *Learning and Instruction*, *18*(3), 211-222. doi: 10.1016/j.learninstruc.2007.03.003

Webb, N. M. (1991). Task-related verbal interaction and mathematics learning in small groups. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(5), 366-389. doi: 10.2307/749186

Wittwer, J., & Renkl, A. (2010). How effective are instructional explanations in example-based Learning? A meta-analytic review. *Educational Psychology Review*, *22*, 393-409. doi: 10.1007/s10648-010-9136-5

Zhu, X., & Simon, H. A. (1987). Learning mathematics from examples and by doing. *Cognition and Instruction*, *4*(3), 137-166. doi: 10.1207/s1532690xci0403_1

許舜淵、胡政德（2014）。
動態幾何環境下大學生幾何探索之研究。
臺灣數學教育期刊，1（1），49-77。
doi: 10.6278/tjme.20140307.001

動態幾何環境下大學生幾何探索之研究

許舜淵[1]　　胡政德[2]
[1]國立中壢高級中學
[2]國立臺灣師範大學數學系

本研究目的在探索動態幾何環境下大學生幾何探索之思考運作模式。透過個案研究來進行探究並以質性分析來詮釋資料。研究結果顯示：（1）當學生觀察動態幾何軟體所產生動態表徵時，通常透過幾何思考後再做適當的拖曳行動；（2）動態表徵其外顯的行為和內在的數學性質會激發個體產生猜測，並在心智中模擬操作數學物件以及分析可能的動態行為來驗證猜測，進而產生宣告；（3）學生會依據模擬操作的複雜程度，再決定是否使用 DGS 具體操作以驗證幾何思考過程中的想法；（4）學生在動態幾何環境下進行幾何實驗並與幾何思考不斷地交互作用下探索幾何性質。

關鍵詞：動態表徵、動態幾何環境、幾何探索

通訊作者：胡政德，e-mail：jackhu@ntnu.edu.tw
收稿：2013 年 5 月 9 日；
接受刊登：2014 年 3 月 7 日。

Xu, S. Y., & Hu, C. T. (2014).
Analyzing college students' geometric investigation within the dynamic geometry environment.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *1*(1), 49-77.
doi: 10.6278/tjme.20140307.001

Analyzing College Students' Geometric Investigation within the Dynamic Geometry Environment

Shun-Yuan Xu[1] Cheng-Te Hu[2]
[1]National Jhongli Senior High School
[2]Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

The aim of this study is to explore, in a dynamic geometry environment (DGE), the operation models of the geometric thinking of college students. To achieve this, we conducted a case study. We recorded the process of geometry exploration activities by math-major college students, interviewed them, and interpreted their operation models of thinking through a qualitative analysis. The results are summarized as follows: (1) When students observe the dynamic representations generated by dynamic geometry software (DGS), they seldom react immediately, and instead engage in geometric thinking before they carry out appropriate dragging. (2) The apparent actions and intrinsic mathematical properties of dynamic representations tend to inspire students' conjectures. Students then mentally manipulate mathematical objects and analyze possible dynamic behaviors to confirm their conjectures. Finally, they are able to produce a declaration. This process is a basic model for geometric thinking. (3) Students manipulate mathematical objects mentally based on the complexity of operation, and then decide whether to use a DGS-specific claim or conjecture in geometric thinking. (4) Students explore geometry properties in DGE under the constant interactions between geometry experiments and geometric thinking.

Keywords: dynamic representation, dynamic geometry environment, geometric investigation

Corresponding author：Cheng-Te Hu，e-mail：jackhu@ntnu.edu.tw
Received：9 May 2013;
Accepted：7 March 2014.

壹、緒論

幾何探索是學習幾何的重要方法之一。幾何探索的過程中個體通常會透過圖像操作和邏輯論述進行幾何思考，在過去的研究也指出幾何的本質同時包含了圖形性與概念性的特徵，圖形性特徵是指視覺化可操作，概念性特徵是指可邏輯推理與論述（Fischbein, 1993），而幾何活動是複雜的認知過程，包含了構圖、視覺化與推理，發展視覺表徵與推理能力有利於各種不同的認知歷程的交互作用（Duval, 1995）。從小學到中學幾何學習活動包含經驗幾何與推理幾何，經驗幾何著重在操作行動，而推理幾何強調邏輯思考，而幾何探索活動正是學生學習幾何的重要方式之一。

動態幾何環境（Dynamic Geometry Environment, DGE）已經是學生學習幾何的重要學習環境之一。Battista（2007）指出近代在幾何學習與教學上的學術研究已經聚焦於電腦環境的使用，他談到為什麼幾何教學和研究接受科技越來越熱烈，比起其他數學教育的領域？首先，許多幾何的電腦環境讓學生感到興趣，但教學法與研究感興趣的是在這些環境超越動機的因素。動態幾何環境，例如 Cabri 和 GSP，是一種工具，對於每個人（不只是學生）能夠促進做幾何的過程，允許個人去探索幾何的想法，而這些探索是使用紙筆工具來進行是很困難的，例如：在動態幾何環境可以提供檢驗大量圖形例子。所以一點都不感到驚訝研究者花這麼多時間來探究動態幾何環境在幾何教學與學習上的功能與角色。

動態幾何環境如何影響學生進行幾何探索是目前一個重要的議題。Battista（2007）在關於電腦環境的研究針對過去這 20 年來的研究進行了整理與論述，尤其是在關於電腦環境對於幾何學習的研究上，他認為在電腦環境中有兩個特徵需要特別去注意，第一是探索特定的幾何圖形，其次是圖形的重構可以幫助幾何學習。雖然多數研究顯示 DGE 能夠增進與支持重要的學習，但在目前的研究中不知道增加幅度的影響，更不知道在 DGE 下學習與在紙筆環境下學時如何不同。因此，需要更多的比較研究，量的去探究一般性，與質的去探究歷程上的差異。

幾何探索是學習幾何的重要方法之一，動態幾何軟體（Dynamic Geometry Software, DGS）提供了學生幾何探索的環境，本研究的目的即在探討大學生在 DGE 下如何進行幾何探索。當個體在操作幾何物件時，觀察拖曳所產生的圖形變化，即產生了動態表徵，學生可以透過觀察動態表徵，引發個體去思考以輔助推理。從 Duval（1998）幾何認知理論來分析，在 DGE 下動態表徵如同視覺化歷程，個體的拖曳行動讓圖形產生了變化，拖曳行動如構圖歷程，其中幾何思考是在 DGE 下學生重要的數學推理思維方式（參考圖 1）。因此，在 DGE 下學生的思考、學生的拖曳行為與電腦的動態表徵是學生進行幾何探索的三個重要關鍵，本研究整合幾何認知模式與數學思考的研究來探討 DGE 下大學生幾何探索中的思考模式，主要探討下列兩個問題：

（一）在操作 DGS 的過程中，激發大學生進行幾何思考的機制為何？

（二）大學生在 DGE 中幾何思考運作模式為何？

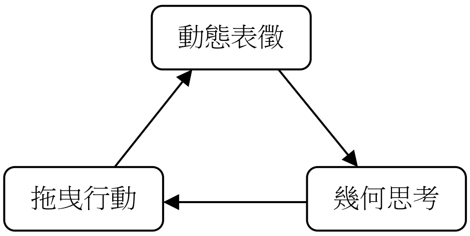


圖 1　DGE 下幾何探索

貳、理論架構

在 DGE 下的幾何探索，其本質為幾何問題的數學思考過程，而 DGE 是一個電腦的環境，許多相關研究指出 DGE 的功能與特色。因此，本研究架構將以幾何思考與認知的觀點為基礎，整合 DGE 相關研究結果形成本研究的理論架構，以作為本研究設計、分析與討論之理論依據。

一、幾何探索的本質與認知歷程

幾何探索為個體探究幾何問題的過程，包含了探究、猜測、驗證與證明，強調個體實際觀察、操弄相關幾何圖形，探究、猜測圖形特性，以歸納方式獲得幾何性質，再以推理演繹方式驗證該性質的正確性，使個體更清楚地掌握幾何性質。一般數學家在處理幾何問題時，通常不是直接進行形式化證明，而是透過構圖進行視覺化或操弄幾何物件來洞察數學的性質，再進行推理與驗證，但常常會再返回來於幾何物件上進行探索。因此，幾何探索的本質即是數學發現的過程。

數學發現的過程是一個猜測、檢驗與改進的過程。Lakatos（1976）於《證明與反駁》一書中探討數學發現的過程，他提出數學發現有一個簡單的模式說明數學家發現的過程實際上是提出猜測並不斷地對猜測加以證明、反駁和重構的過程。在此過程中猜測與檢驗與改進是不斷地反覆進行，其中演繹證明過程和反例反駁不斷地交替（如下圖 2）。因此，數學發現的過程是由原猜測不斷地改進，而證明與反駁是啟動對原猜測改進的必經的過程。陳英娥與林福來（1998）研究針對形成猜測的歷程（即臆測）深入研究發現數學家與學生在進行臆測有一個特定的模式（如下圖 3），猜測、檢驗、相信與反駁是進行臆測中主要的思考過程，而數學家與學生在臆測過程中主要的差異在於思考過程的複雜性上。

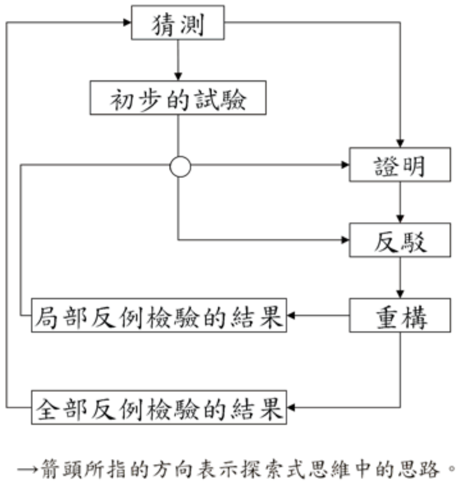


圖 2　Lakatos（1976）數學發現探索式思維模式。引自「數學臆測的思維模式」，陳英娥、林福來，1998，**科學教育學刊**，**6**（2），193。

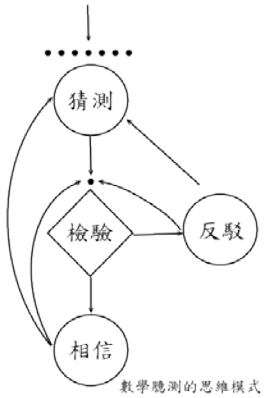


圖 3　數學臆測的思維模式。引自「數學臆測的思維模式」，陳英娥、林福來，1998，**科學教育學刊**，**6**（2），205。

本研究整合 Lakatos（1976）、陳英娥與林福來（1998）對於數學思考的研究將數學的思考歷程提出幾何思考包含了三個基本歷程：猜測、操作驗證、宣告（證明與反駁）。Lakatos 所提出來的數學發現模式是一個巨觀地看法，可以描述整個數學的發展過程，也可以用來描述進行一個數學發現的長期過程，而陳英娥與林福來特別專注在臆測的思考歷程，是一個局部的模式，短期的活動過程。數學臆測的思維模式可以視為 Lakatos 的模型的一部份，相信與反駁的歷程都是經過檢驗的後續活動，對於數學家而言，相信通常就是要透過證明，也就如同 Lakatos 的模式會進入證明階段，類似地，當經過檢驗後發現不正確時，數學家會透過反駁來推翻猜測進而建構新的猜測，而證明與反駁主要的功能在於宣告猜測的正確性。那麼，**在幾何探索中如何引動個體進行思考以及在思考過程中與數學物件的互動，這是本文所要探討的主要問題。**

幾何探索從幾何的本質與認知的面向言，幾何學習需同時透過圖像操作和邏輯論述進行思考。Fischbein（1993）即認為幾何的本質同時包含了圖形性與概念性的特徵，圖形性特徵是指可操作視覺化，概念性特徵是指可邏輯推理與論述。換句話說，幾何包含了具體事物的圖形表徵與推理論述的符號語言。

Duval（1995, 1998）從認知的觀點來分析幾何學習，認為幾何活動是複雜的認知過程，包含了**構圖**、**視覺化**與**推理**三種認知過程且各具特別的認識功能：

1.視覺化（visualization）過程：對於空間圖形表徵的認知，這些表徵呈現敘述的說明、複雜情境的探索或概要地呈現。譬如：觀察螢幕上的影像或幾何圖形來掌握其所呈現的幾何物件結構。

2.構圖（construction）過程：利用工具建構或修正幾何模型的歷程，藉由操作的呈現和觀察結果來關聯到數學物件的表徵。譬如：尺規作圖、使用動態幾何軟體來建立與呈現幾何圖形。

3.推理（reasoning）過程：透過語文論述以延伸到相關聯的數學知識，包含了進行歸納或演繹推理。譬如：證明或說明等。而推理的歷程一般可以分成二種，第一種是個體用自然的語言來進行命名及討論；第二種是個體用形式化的語言透過定義與定理來進行論述的演繹及組織。

Duval 認為個體於幾何活動中，這三個歷程可能獨立進行，但通常是兩個或全部的歷程結合在一起的複雜認知歷程；其中構圖是利用工具表徵知識，視覺化代表觀察的歷程，推理是演繹證明的歷程，這三種歷程的交互作用是一個複雜的模式（如下圖 4，其中實線箭頭表總是可以支持，虛線箭頭表示不一定支持。）。

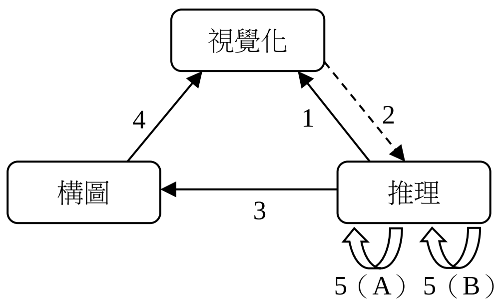


圖 4 Duval 幾何認知模型。引自 “Geometry from a Cognitive Point of View,” by R. Duval, 1998, In C. Mammana and V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (p. 38). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval 認為推理歷程可以支持構圖與視覺化，例如：在中學的畢氏定理證明中，學生透過各種不同的推理過程來洞察這個直角三角形的性質，而其中推理的過程也支持了構圖，例如做輔助或作各邊上的正方形…等等；而構圖的歷程自然地會支持視覺化，例如：在直角三角形上進行構圖，必然會產生幾何圖形，經由構圖的過程學生能夠瞭解圖形從何而來或其結構，支持了學生對於圖形的視覺化歷程；雖視覺化歷程通常能夠支持推理歷程，但並不是總是有效的，甚至反而會阻礙推理的進行。

本研究根據 Duval 的幾何認知模型，在 DGE 下動態表徵如同視覺化歷程，個體的拖曳行動讓圖形產生了變化，拖曳行動有如構圖歷程。幾何認知模式中論述個體在幾何活動中主要有三種認知歷程，個體透過理解、推理、證明…等等歷程進行數學的活動，研究者認為當個體 DGE 環境下操作幾何物件時，觀察拖曳所產生的圖形變化，即產生了動態表徵，學生可以透過觀察動態表徵，引發個體去思考以輔助推理。從 Duval 的觀點認為視覺化歷程不總是能夠支持推理歷程，雖然動態幾何軟體被視為能夠幫助學生學習幾何，但在目前的研究中很少深入地探討動

態幾何軟體所提供的動態幾何物件如何讓個體能夠透過視覺化歷程來支持推理歷程，而本研究想深入探究動態幾何環境在個體進行幾何探索活動。**在幾何活動中這三種認知歷程通常是複雜關係，依據 Duval 幾何認知模型研究者可以詳細地分析個體進行幾何活動的過程**。

二、動態幾何軟體與幾何探索

動態幾何軟體(Dynamic Geometry Software, DGS)被大量地使用在幾何的學習與教學活動。DGS是一種可以讓使用者透過電腦建立並且操作一些幾何物件的軟體，譬如，The Geometry's Sketchpad（GSP）、Cabri…等。一般而言，DGS裡的幾何物件是模擬歐氏幾何的物件具有以下幾個重要的功能與特色：（1）電腦化尺規作圖且作圖快速、精確；（2）可以進行動態操弄，保持幾何物件結構；（3）可建立巨集模組物件；(4）提供動態模擬。早期關於DGS的相關研究多著重於探討DGS如何幫助學習者學習幾何概念、發現幾何性質或是觀察個體如何進行幾何探索及產生猜測、驗證及證明（Hazzan & Goldenberg, 1996; Hölzl, 1996; Hoyles & Jones, 1998）。

近年來關於動態幾何的研究開始探討DGS與學生思考的研究議題。其中有些學者深入關心個體在DGS的認知行為，譬如，Arzarello、Olivero、Paola與Robutti（2002）之研究發現學生運用DGS解決問題過程中會有七種不同的拖曳模式，分析學生進行幾何探索中處理幾何問題的認知過程，但關於DGS如何激發學習者進行數學思考尚未深入研究。Tall（1998）認為雖然電腦提供一個擁有可操作的視覺展示和符號工具的人性化互動界面，但它仍需要藉由數學家的想法去進行思考實驗來決定什麼是重要的？什麼是需要證明的？Tall（1999）認為思考實驗是一個人想像定理可能成立的條件，並試圖去看結論是否成立且是數學家作探索和推理證明時，常用的一種方法。啟發學生自發性數學思考是數學學習活動重要的目的，因此，於幾何活動中DGS與學生思考的關係便是一個重要的研究議題。

動態幾何環境（Dynamic Geometry Environment, DGE）是一個提供學生使用 DGS 來探索幾何的學習環境，涉及個體、電腦軟體與學習活動的互動。DGE 下個體在電腦螢幕上看到圖形變化引起學生去思考與探索幾何物件的變動關係，或者利用滑鼠拖曳改變幾何構圖進行幾何探索。因此，目前的研究中指出 DGE 下幾何活動主要有三個關鍵要素：(1）學生的思考；(2）學生的拖曳行動；(3）電腦的動態表徵。

DGE 下進行幾何探索最重要的就是學生的思考。他們可以透過滑鼠操作電腦中的幾何物件進行觀察與推理，Arzarello 等人的研究認為 DGE 下學生的拖曳模式與思考是相關的且反映其認知行為。

個體的拖曳行動是 DGE 下重要的構圖歷程，使得 DGS 中的幾何物件的改變產生動態的表徵，提供視覺化。Laborde（1993）認為拖曳行動可以外顯圖形內部幾何物件的關係，使個體觀察到圖形蘊含的幾何性質，Arzarello 等人（2002）和 Lopez-Real 與 Leung（2006）認為拖曳行

動如同一個能建構數學知識的互動工具，使學習者可以藉由圖形變動來觀察幾何圖形的總體行為。

幾何圖形的動態變化是另一個組成動態幾何學習環境的重要元素。Talmon 與 Yerushalmy（2004）即將此 DGE 中圖形物件的變動定義為動態行為（dynamic behavior），當拖曳物件使此物件在螢幕上產生動態變化的過程及狀態型成動態表徵，使得個體在 DGE 下處理幾何問題的時候，不只受到視覺化的圖形表徵所影響，也受到組成此圖形的幾何物件的動態行為所影響。在 DGE 下物件的動態行為會與作圖順序有關，相同的圖形但不同的作圖順序會產生不同的動態行為，進而影響動態表徵的變化。在 Talmon 與 Yerushalmy 研究中顯示學生有反序（reverse order）預測的行為，即學生猜測或想像物件的行為和電腦所顯現的動態行為不同。從學生具有反序預測行為這點可知軟體具有自主性，它將與個體的思維產生互動並與個體過去對幾何圖形的認知產生衝突。

綜合相關研究的結果，本研究探討 DGE 下學生進行幾何探索需特別注意這學生思考、拖曳行動與動態表徵三者間的關係，尤其是**電腦的動態表徵是如何引動學生的幾何思考。**

三、幾何實驗與思考模式

數學家在探索幾何問題時，往往非立即直接進行形式化證明，有時會先透過構圖進行視覺化或操弄幾何物件來觀察其數學性質，再進行推理與驗證，他們會在心智模擬操作幾何物件進行實驗觀察與歸納。Pinto 與 Tall（2002）曾提到一種在心智中操作方式：如果當我們改變等腰三角形 ABC 的頂點 A 的位置時，那麼將會發生什麼事情呢？移動 A，使得 $AB > AC$，則 $\angle ACB > \angle ABC$。反之，$AB < AC$，則 $\angle ACB < \angle ABC$。因此，當處於一個平衡狀態，即 $AB = AC$ 時，可以看出 $\angle ACB = \angle ABC$（參考圖 5）。

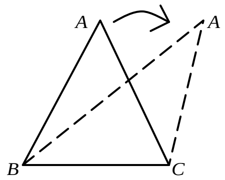


圖 5　等腰三角形兩底角相等

這種思考模式的特色是不用以實作方式具體實驗來驗證命題，而是想像的方式來進行。科學家伽利略依據鐘擺理論作為實驗的假設，在腦中設想光滑無摩擦力的斜面，並模擬球的滾動過程，最後推論出球的滾動類同鐘擺擺動的等高定律，這種在心智中想像的操作實驗是典型的思考實驗範例（Sorensen, 1992）。上述兩個例子共同之處在於他們的推理過程中，都未具體操作實際物品，而是透過心智操弄方式進行推論與驗證。此類型的思考方式既不是具體實驗操作，

也不是單純的形式證明，而是以想像的方式來模擬操作與進行推論。本質上是類似實驗的過程，但是依據想像和模擬操作的推論過程，有別於具體操作實驗。

Vygotsky（1978）在探討個體的高等思維時，認為有兩種主要仲介導引人類行為的方式，分別是科技工具（technical tools）和心理工具（psychological tools），科技工具的功能是做為人類影響活動中之物體的執行者；它是外在導向且導致物體的變化。心理工具則不會使心理操作中的物體產生變化，它是控制個體內在活動的媒介，為內在導向。當個體經過複雜的內化過程後，科技工具可能變成心理工具且形成新的意義，此時科技工具就如同符號仲介（semiotic mediator），具有符號仲介的功能（Mariotti, Laborde, & Falcade, 2003）。關於幾何活動之研究，Mariotti（2000）依據 Vygotsky 的觀點，以動態幾何軟體（Dynamic Geometry Software, DGS）引入學生的活動中，DGS 可能提供複雜的符號系統並支持符號仲介的過程，輔助學生發展符號運用的心理工具。

從幾何學習的對偶性與 Vygotsky 的仲介工具論，提示吾人幾何思考於幾何學習中是一種重要思維方式，而要探討學生幾何活動的歷程中的幾何思考，需注意學生對於科技工具和心理工具的使用和發展過程。而 Mariotti（2000）認為 DGS 是幾何活動中重要的仲介工具，加上近年來科技融入教學的趨勢，DGS 已常被使用於幾何學習活動之中。因此，**分析學生如何運用 DGS 的符號仲介功能進行幾何實驗與推理的數學思考活動不僅是學術研究的重要議題，更是具有教學實務價值。**

參、研究方法

本研究目的在探索動態幾何環境下大學生幾何思考之運作模式。在 Arzarello 等人（2002）和 Furinghetti 與 Paola（2003）的研究中透過一些幾何活動來探索中學生進行幾何探索，但未進一步深入探討與說明學生的思考與 DGS 之間的互動，研究者認為也許是因為中學生幾何推理與證明能力尚不足因此較難分析幾何探索活動中學生思考的運作模式。本研究延續前人的研究以大學生來進行深入觀察與分析學生在 DGE 下如何進行幾何探索的歷程。

幾何探索之歷程包含猜測、驗證與改進的歷程，實為一個相當複雜的歷程。本研究為整體大研究的一部分，主要聚焦於學生的思考與動態幾何環境的互動上，以深入研究幾何探索歷程。

在大學生幾何探索活動中，觀察與收集大學生於 DGE 下如何進行幾何思考，其中也包含了活動過程中的活動單與錄影，用以獲得大學生對於特定幾何問題的想法與思考方式。依據學生的觀點出發，以詮釋性分析來探討他們在 DGE 下的幾何思考，並由這些分析結果討論歸納出影響幾何思考的因素與機制。

由於需要深度觀察與分析大學生幾何探索過程，本研究將透過個案研究進行質性化的研究

方法。以下將說明關於本研究之研究對象、活動設計、資料收集與處理。

一、研究對象

研究對象的選擇採立意取樣，學生須具備充足的數學知識與使用 GSP 的技巧與知識，屏除個人知識與技能不足的因素。

本研究對象為 24 位國立大學數學系大二的學生，他們在大一的時候修過解析幾何，而在大二修習完一學年的高等幾何課程包含了綜合幾何、變換幾何、動態幾何，學生在這門課中學習幾何學相關知識以及幾何論證的知識。他們都已修完一學年的高等幾何課程，已具有足夠處理這個幾何問題的數學知識，並在高等幾何課程中，每週利用一至兩個小時的時間學習 GSP 的基本操作及運用 GSP 來探索和處理幾何問題。因此，他們都具有足夠的數學知識，且熟悉 GSP 的基本操作及運用 GSP 來探索和處理幾何問題。

二、活動設計

本研究以 Arzarello 等人（2002）和 Furinghetti 與 Paola（2003）所採用的問題作為幾何探索的幾何問題（參考表 1），此問題屬於開放性問題，其蘊含一個容易觀察到的幾何性質，但不易証明。學生能夠經由將四邊形 ABCD 拖曳成任意的圖形，觀察 EFGH 的各種變化情形，進而發現圖形蘊含的幾何性質，所以適合作為幾何探索的問題。

表 1

動態幾何探索活動單

幾何問題

令 ABCD 是一個四邊形，考慮四個內角的角平分線，且此四條角平分線兩兩分別交於 E、F、G、H 四點。

活動	活動敘述	活動目的
活動一	請在 GSP 下作出上述問題的圖形。	請學生建構出幾何圖形之動態表徵。（建立圖形及其相關的文字標示）
活動二	請你預測拖曳四邊形 ABCD 變動後，四邊形 EFGH 會形成什麼圖形？（請直接思考，不要拉動你的 GSP 下的圖形。）	探討學生的數學思考和動態表徵的交互影響。
活動三	請你拖曳四邊形 ABCD，將你所發現的現象盡可能的寫下來。	1.探討如何激發學生的數學思考。 2.探討學生的數學思考與動態表徵間的交互影響。

為了使主要研究能夠順利觀察到學生的幾何思考運作情形，研究者設計動態幾何探索活動單，活動施測時間約半小時，在本研究中主要設計三個活動來收集資料，活動單敘述與目的詳細說明參考表 1。每一個活動開始前，研究者會先敘述題目。在活動進行期間記錄學生的活動過程，且學生如果有問題可隨時提出，但研究者只幫忙解釋題意、適時地提問學生當下的解題想法和解決 DGS 相關操作問題，不給予探索活動問題的答案。但當學生在探索的過程花費大量時間專注在物件的動態行為時，會引導他們去注意圖形整體結構的變化，例如：問學生你看到了什麼…等。

三、資料收集與處理

在學生進行探索過程中，研究者透過活動單、錄影的方式來收集多樣的資料。活動單主要收集大學生個別進行探索的資料，錄影主要紀錄大學生操作 DGS 與進行討論之影音資料。學生依序編碼為 S1~S24，將所有活動單掃描至電腦存檔，以方便資料搜尋以引用。而錄影資料，除了以逐字稿紀錄討論的內容，並依據學生操作 DGS 的活動進行分類，透過詮釋性研究的方法進行討論分析。在資料的處理過程中，研究者與二位數學教育專家，其中一名為教授，另外一名為研究生針對研究資料的分析進行三角校正，以達到資料的準確性。

肆、研究結果與討論

本研究分析在動態幾何環境實驗下所收集之資料來討論以下兩個主要的議題：一、DGE 下動態表徵激發幾何思考的機制，亦即什麼狀況會激發學生進行幾何思考；二、DGE 下幾何思考運作模式，亦即學生如何進行幾何思考。以下為了方便討論，其中動態表徵、幾何思考、拖曳行動，皆是在 DGE 下。

一、DGE 下動態表徵激發幾何思考的機制

抽象幾何物件在 DGE 下以動態表徵方式呈現，它包含了物件變動的過程，以及所呈現的結果。動態表徵同時受個體的拖曳行動和物件的動態行為所牽制，學生經由操弄與觀察其動態表徵激發他們做幾何思考。從個案資料分析，發現有三種類型的動態表徵會激發學生進行幾何思考。

（一）動態表徵類型為「符合特定結構圖形」

符合特定結構圖形的動態表徵意指它在變動過程中會呈現出特定的圖形結構，例如，在 GSP 中一個四邊形的對角互補，或其四頂點共圓。

學生在觀察或操作幾何圖形之動態表徵時，當發現符合特定結構的圖形時，會激發他們進行假設與驗證的幾何思考。此時學生聯結動態表徵與他們過去所認知的圖形與知識，來思考動

態表徵符合特定結構的圖形之情境下可能產生的結果（如果…，則…）。以下以案例一與案例二說明：

案例一：

S16 於活動三中，探索四邊形 ABCD 四內角平分線的交點 EFGH 圖形（參考圖 6），他似乎察覺四邊形 EFGH 的對角和為定值，因此透過 GSP 測量功能測量 EFGH 的各內角角度。

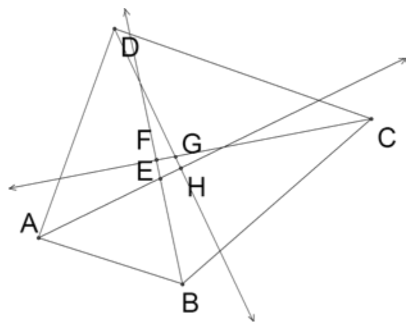


圖 6　S16 於活動三的構圖 1

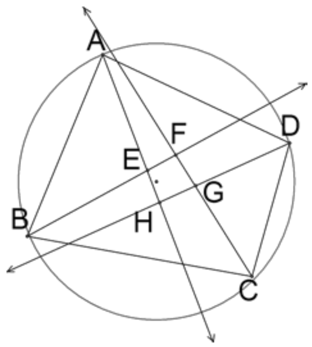


圖 7　S16 於活動三的構圖 2

S16 拖曳原圖形 ABCD 使其成平行四邊形或正方形，發現 EFGH 的兩兩對角和皆為 180 度。觀察一陣子後（約 7 分鐘），重新使用 GSP 先畫出一圓，並在圓上取 ABCD 點（參考圖 7），再做各個角平分線，並再度測量 EFGH 的四個角之角度。

研究者（R）詢問他正在觀察什麼現象時，S16 表示四邊形 ABCD 對角相加是 180° 時，EFGH 也是 180°。以下為研究者與學生 S16 互動的片段。

S16：可以用 MEASURE（測量角度）嗎？

R：嗯！可以。

（S16 操作 GSP，大約 6 分鐘。）

R：好，你想到什麼？

S16：我想到那個… 就是量它的面積

（S16 操作 GSP，觀察與思考。大約 7 分鐘）

S16：那我重做一個喔，畫 ABCD 的外接圓。

（S16 操作 GSP，觀察與思考。大約 5 分鐘）

R：現在你看到什麼？

S16：就如果外面是對角相加是 180（度）裡面相加也是 180（度）。

S16：就是外面如果是外接圓的四邊形，裡面也是。

S16：不相似！然後邊長沒有關係，面積也沒有關係。

案例一分析：

S16 在活動一中使用 GSP 建構幾何圖形之動態表徵，到活動二時 S16 思考幾何圖形之動態表徵，在活動三中 S16 大多著重於 GSP 的操作，直到操作測量動作後，開始進行一些幾何推理。

S16 透過拖曳四邊形 ABCD 來觀察所形成的特殊四邊形，在這 7 分鐘過程中 S16 操作觀察 GSP 並不斷的進入沉思中，且在拉動的過程中，將焦點從四邊形的外型，轉移到四邊形的結構。

S16 在拉動 ABCD 四邊形之外形的過程中，注意四邊形 EFGH 的角度結構，激發 S16 進行約 7 分鐘的思考，且形成「外面四點（ABCD）共圓，而裡面四點（EFGH）會共圓」之猜測。接下來約 5 分鐘時間，S16 再度透過 GSP 重新建構與操作動態表徵來進行驗證幾何思考的假設。

實際上，不管四邊形 ABCD 是否為圓內接四邊形，四邊形 EFGH 的對角和永遠是 180 度（這個幾何圖形的不變性）。學生並非從形式化的方式證明此特定性質，而運用心智的操作實驗，透過想像所進行的推理，亦及幾何思考，最後當心智運作圖形複雜時，學生再透過 GSP 進行模擬驗證。

此案例顯示學生透過觀察動態表徵符合特殊結構之情形，進行幾何思考。從注意幾何圖形之外型，轉移到注意幾何圖形之結構，提出假設（假設 ABCD 是圓內四邊形會成立）並透過推理的方式進行驗證，再透過具體的實驗操作（使用 GSP 模擬並改變圖形觀察數值變化）以驗證所發現的不變性。

案例二：

S11 與 S12 一同進行活動。在活動二中，S11 一開始就提到「如果將 ABCD 拉成平行四邊形時，DEFG 會形成什麼圖形」。S12 立即回應「會形成四邊形」。S11 則持續思考，S12 試圖說服 S11，並開始進行討論。而這個過程主要可以分成四段：第一段，主要是 S12 在說明為什麼 ABCD 為平行四邊形時，EFGH 也為平行四邊形，其中 S11 一直在思考其中的結構關係。第二段，S12 透過腦中思考以及手勢操作，並向 S11 說明，S11 在腦中進行幾何思考與檢驗 S12 所提出的想法。第三段，S11 與 S12 延續上一段的討論，透過螢幕上幾何圖形的動態表徵，配合手勢操作進行幾何思考。第四段，S12 想像 B 點與 C 點重合，在腦中很快的進行了幾何思考，想像到會形成一個三角形，馬上聯結到熟習的三角形內角平分線交於一點。以下為 S11 與 S12 互動的四個片段。

第一段：

S11：如果把它拉成平行四邊形的話…會變成什麼圖形？

S12：平行四邊形啊！

S11：就會變成？

S12：所以是這樣子就變成這樣子（手指著電腦螢幕），就是一個平行四邊形啊！

S11：那如果把 ABCD 拉成平行四邊形?

S12：那裡面就是平行四邊形啊！因為是角平分線啊！

S11：等一下喔…

S12：如果只有動 A，只有 AD 會動，那麼這三條都會動（三條角平分線）。

S11：那只拉成平行四邊形。

S12：應該是這三條線都會動，那這三條線都會動。

S11：對喔，如果拉成平行四邊形。（持續思考中…）

第二段：

S12：如果我拉一拉有時會平行耶，兩條線很接近，那就會很遠。

S12：這兩邊平行，那…就只有兩個交點。

S11：一對平行，兩對平行，所以只要 AB 平行 CD 的話 GF 也會平行 HE。

S12：不一定啊！可是這樣子、這樣子、這樣子（手勢描述邊的關係）

S11：可是啊！你這邊平行它的話！為什麼不一定，你這樣平行它的話。

S12：喔，你說 GF 啊！

S11：對啊！你 GF 就平行 HE，你這樣平移它的話，內錯角就相等。

S12：可是旁邊不一定會平行啊（EF 與 GH）！那它有可能差很多啊！例如這樣子（手勢描述邊的關係），然後…

S11：哦~~你說 AD 和 BC，對對對對！

S12：線可能會平行，就是那個邊啊（EF 與 GH）！

S11：嗯嗯嗯。

S12：如果是這樣子的話，那應該是這樣子會平行。

第三段：

S11：你再說一次

S12：如果 AB 跟 CD 平行。

S11：把 D 拉過去（指著螢幕）。

S12：就變成 HE 這一條跟 GF 這一條會平行，因為它們這邊是…

S11：我說的就是這個啊（指著螢幕 EF 與 GH）！

S12：有嗎？有嗎？好像沒有耶！

S11：因為你剛說 AD 跟 BC 不一定會平行，所以它角不一定一樣。

S12：疑~不是不對嗎？那…我要講什麼？

S12：如果只有一對平行，另一對不平行。

第四段：

S12：如果我把 B 跟 C 合在一起的話，那這四個點就會變一個點，因為，把 B 跟 C 拉很近啊，就會變成三角形，它們都是內角平分線交點，所以交點就是三角形的內心。一個三角形只有一個內心嘛，所以這樣子有四個交點，如果變成一個平面三角形，那這四個點就很接近，變成一點。

案例二分析：

S11 與 S12 在活動二中思考幾何圖形之動態表徵，一開始就注意到符合特殊結構的圖形。雖然在第一段中 S12 立即的反應表現出一開始著重在幾何圖形的外型，但是透過對 S11 的講解他開始說明圖形的結構，然後激發 S12 開始進行幾何思考，思考只移動 A 點時，三條角平分線會跟著移動。

在第二段中，S11 也開始進行幾何思考，並向 S12 說明他幾何思考後的推論。在第三段中，S11 與 S12 重新開始他們的幾何思考，並依據電腦畫面中幾何的動態表徵來進行思考，並發現如果只有一邊平行另外一邊不平行，則裡面的圖形也會是一邊平行另一邊不平行。在第四段中，S12 一想像到形成一三角形，馬上聯結到舊經驗立即得到結果。

以上這四個片段，都顯示出學生注意到動態表徵符合特定結構時，會激發學生進入幾何思考。雖然有時候幾何思考的時間比較長而且複雜，常常需要圖形與手勢的輔助，但有些時候幾何思考是相當快速的，譬如：在第四段中，S12 一講到兩點重合，當下立即反應出三角形內角平分線交於一點。當學生注意到結構時，幾何思考才會開始啟動，若只注意到外型只是一種心像反映而非開始幾何思考，譬如第一段一開始 S12 立即的反應。

（二）動態表徵類型為「蘊含某些不明顯的數學性質圖形」

學生在操作幾何圖形之動態表徵時，發現動態表徵蘊含某些不明顯的數學性質，亦即，圖形在特定情形下具有特殊的性質，但學生不是清楚地掌握為什麼（或不清楚其數學性質），這時他們會思考哪一些條件使得此情形成立（或為什麼會這樣），而激發幾何思考。以下以實際案例說明。

案例三：

在活動三中 S11 與 S12 觀察操作四邊形 ABCD 及四內角平分線交點 EFGH 的動態表徵。S11 開始拖曳某些點，當 A 點與 D 點重合時 ABCD 形成一個三角形且所有對角線交於一點；S11 繼續拖曳 D 點發現有時候圖形中 EFGH 會交於一點（參考圖 8）。進一步地，他在保持 EFGH 交於一點下，拖曳 A 點發現 A 點軌跡似乎具有某特殊性質，而激發 S12 開始進行幾何思考。以下為 S11 與 S12 的討論之片段。

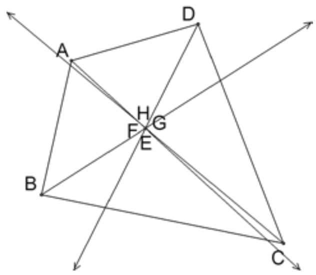


圖 8　S11 與 S12 於活動三的構圖

S11：...某些點會交於一點（EFGH 交於一點），而且不只一個點，所以可能會有一個軌跡是所有點（EFGH）都交於一點的。

S12：交於一點，就是四點（ABCD）同圓嘛。啊!不是，是距離（比手勢），應該是有一個內切圓？

S12：所以那個交點（EFGH 交於一點）到底是為什麼呢？

（停頓思考了一下）

S12：為什麼會交一點？...（思考一下）就這個點到每個邊距離都一樣...（思考一下）有內切圓。

案例三分析：

S11 經由拖曳 D 點觀察到動態表徵發現有些時候角平分線交於一點後，提出猜測「D 點應該有一個軌跡」，並引起 S12 做幾何思考，S12 停頓思考了一下，運用數學知識且以手勢操弄動態心像形成「四邊形 ABCD 有內切圓」的猜測。在這過程中，S12 停頓思考操弄而深思，顯示 S12 不斷的在進行幾何思考，思考為什麼會有交於一點的情形。在此情況下的幾何思考，促使學生透過相關知識與邏輯推理思考形成此動態表徵的原因。

案例四：

S13 在觀察動態表徵 EFGH 交於一點的情形時，他透過幾何思考與推理，發現 ABCD 會有內切圓。以下擷取 S13 與研究者（R）的討論片段如下。

S13：（操作 GSP 圖形）但是這樣確定這四個點有在一起嗎 ?所以有一點點誤差沒關係囉？

（停頓思考約 3 分 30 秒）

S13：啊~~會有圓在裡面。

R：為什麼？

S7：是這樣吧！因為它們都是角平分線，角平分線不是到兩邊等距離，每邊都等距離就是半徑啊！

R：你怎麼想到突然注意到這個？

S13：我也不知道耶！因為我想到它是角平分線，然後我就想到角平分線的性質，所以就想到這個。

案例四分析：

S13 觀察動態表徵，四個角平分線交於一點的情形，他是透過圖形角平分線的性質聯想到至兩邊等距離，進而推得 ABCD 具有內接圓。S13 是觀察到動態表徵所蘊含不明顯的數學性質，然後透過幾何思考來發現形成這個狀況的原因。

（三）動態表徵類型為「認知衝突的圖形」

當動態表徵與個體所認知的圖形產生衝突，會讓學生思考變的多元，通常第一個會問「為什麼會這樣子」，接著會問「假如這樣子就會得到…」。透過幾何思考使得認知衝突轉化成一個新的猜測或結論。以下以案例五與案例六說明：

案例五：

在活動一 S11 與 S12 使用 GSP 建構好幾何問題的動態表徵（圖 9）。進入活動二之前，他們發現圖形上角平分線兩兩的交點有六個，這時候 S11 對於圖形與問題題幹產生了認知衝突，以下是 S11 與 S12 的討論過程片段。

S11：那這些沒有點出來的點呢？它們也是相交，不是嗎？

S12：不是選四個嗎？

S11：所以它這個情況其實是沒有這種東西的。（一直觀察 GSP 中的圖形）

S12：因為四條線應該是六個點。

S11：因為一定不只這幾個點啊，一定還有其他的點。所以它是不是拖拖拖，拖到一種情況，讓裡頭只交四個點？

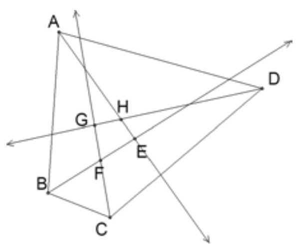


圖 9　S11 與 S12 於活動一的構圖

案例五分析：

當 S11 與 S12 發現螢幕上所呈現的動態表徵的四條角平分線交於六點，讓他對於問題的題幹產生了認知衝突。S12 開始思考為什麼會有六個交點，並提出任意四條線應該有六個交點，以說明為什麼會有六個交點。S11 一直觀察動態表徵，一開始懷疑是否有角平分線交於四點的情形，然後經過幾何思考後，提出可以將圖形進行拖曳可能形成角平分線交於四點的情形。S11

關注於特殊結構，並透過幾何思考要來得到，動態表徵符合特定結構之因果關係，雖然在這裡 S11 還沒得到一個具體的猜測，但具有此傾向。另外，S12 開始思考為什麼，透過幾何思考找到其原因。

案例六：

於活動三中，S5 與 S6 操作與觀察 GSP 中的動態表徵，檢驗了各種特殊四邊形，包含正方形、長方形、菱形、平行四邊形及鳶形，發現了正方形、菱形會時（EFGH）會交於一點，而長方形、平行四邊形時（EFGH）會形成平行四邊形。然後歸納出平行四邊形且四邊等長 EFGH 會變成一點的想法，但又發現鳶形時（EFGH）會交於一點，產生了認知衝突，而開始進行幾何思考，以下是 S5 與 S6 的討論過程片段。

S6：平行四邊形，四邊等長會變一點。可是鳶形不是平行四邊形也會交一點。

S6：對角線垂直。

S5：也會交一點。怎樣的圖形會對角線垂直…所以只有菱形、鳶形、正方形三個。因為你如果垂直這樣畫，一定平分嘛！

S5：不然...你看...你這樣任意做，一定是平分的。

案例六分析：

S5 與 S6 不斷的透過符合特定結構的動態表徵來進行幾何思考，而且幾何思考很快的就透過具體的 GSP 拖曳來形成符合特殊結構的情形，然後形成許多猜測，譬如：（ABCD）平行四邊形則（EFGH）為平行四邊形、四個角垂直則角平分線垂直、平行四邊形四邊等長則角平分線交於一點。但觀察到鳶形的時候，S5 與 S6 產生了認知衝突，S6 先解釋為什麼鳶形其角平分線會交於一點，他們先試圖解釋為什麼。然後，針對鳶形的結構進行幾何思考，發現具有對角線互相垂直的結構，而菱形、正方形也都有，讓他們產生對角線垂直則四個角平分線交於一點的猜測，然後透過 GSP 進行操作驗證。學生產生認知衝突時，會先思考為什麼會這樣，接受這個結果之後，開始思考當特殊的情況成立時會產生什麼。

二、DGE 下幾何思考運作模式

幾何思考是個體依據可能成立的或理想性的假設，在心智中模擬實驗操作的推理過程；它通常發生在個體對事物現象的觀察，其目的在以邏輯分析方式論述其道理。從個案資料中可以觀察到受訪學生在 DGE 下幾何探索活動過程中，並非毫無目的操作滑鼠。他們在拖曳行動前，會透過觀察動態表徵及依據某些幾何假設，先在心智中操作可能的動態行為進行幾何推理與論述。

本研究從深度分析個案資料，可以歸納出大學生在 DGE 下的幾何思考模式主要包含三個幾何思考基本歷程：猜測、模擬操作和宣告，大學生會依據可能成立的猜測，以模擬操作的方式

進行推論，最後再產生宣告。以下將論述大學生在 DGE 下的幾何思考運作的序列方式，最後闡述此模式的整體結構。

（一）幾何思考基本歷程：猜測—模擬操作—宣告

學生在進行幾何思考的過程中，通常以序列方式運作：猜測—模擬操作—宣告，個體透過模擬操作的方式將猜測轉換成宣告的幾何思考過程，以下以案例七說明。

案例七：

S1 與 S2 在活動三中操作 GSP 檢驗一些特殊的圖形（如正方形、長方形）內角平分線交點性質的觀察，再將圖形拉成近似等腰梯形後（參考圖 10），經過一段時間思考後，進行對話如下。

S1：等腰梯形交一點，會不會? 等腰梯形的話，這兩個角相等，這兩個角也相等，它也等於它嘛！我覺得等腰梯形會交一點。

S2：這兩個角就相等啦！

S1：然後呢？……不是啊！這個加這個就是這個的角度。

S2：這個加這個是這個的角度，畫個等腰梯形就好啦！

S1：等腰梯形就……畫畫看。

S2：畫囉！

S1：不用。等腰梯形，角平分線交一點，角平分線交一點。嘿！可以在裡面畫一個圓。等腰梯形…等腰梯形就是一個圓啊對啊！因為這兩邊會一樣，這兩邊會一樣，這兩邊會一樣。

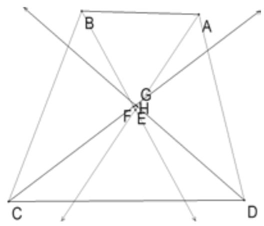


圖 10　S1 與 S2 於活動三的構圖 1

案例七分析：

S1 與 S2 在 DGE 下顯現的幾何思考過程，可以分成以下三段流程（參考圖 11）：

（1）當 S2 將四邊形 ABCD 拉成近似等腰梯形，使得四個內角的角平分線幾乎交於一點。此時動態表徵（圖 10）激發 S1 去猜想 ABCD 的動態行為並產生「等腰梯形會交一點」的猜測（動態行為）。

（2）在 S1 在腦中進行幾何思考的模擬操作（心像操弄）並透過手勢輔助說明，S1 利用手勢輔助說明他的想法（呈現出他的心像）向 S2 說明為何會交於一點。但對 S2 而言太過抽象，S2 提議將圖形畫出來，亦即讓心中的想法具體顯現在螢幕上。

（3）而 S1 認為不需要，繼續使用手勢來呈現想法並推論得到「等腰梯形就是一個圓」（數學性質）的宣告。

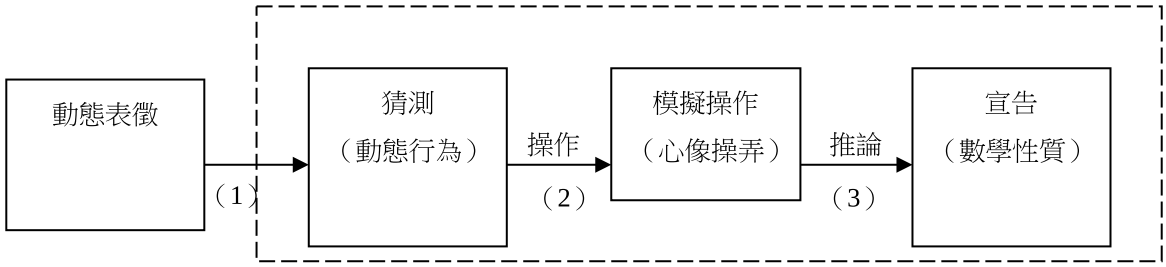


圖 11　S1 的幾何思考基本歷程示意圖

在本研究中也發現幾何思考有時不是一個單向的過程，也會展現循環的過程。個體會將宣告轉化成猜測再進行模擬操作，尤其是當個體模擬操作後所得到的宣告與猜測相衝突時。以下以案例八說明此循環運作情形。

案例八：

S11 與 S12 在活動三中正在觀察與操作幾何圖形之動態表徵。S11 拖曳某些點，嘗試將 A 點與 D 點重合使四邊形 ABCD 形成一個三角形且角平分線的交點 EFGH 交於一點。S11 繼續拖曳 D 點發現有時候四邊形 ABCD 不需退化成三角形也會使四內角平分線的交點 EFGH 交於一點。進一步地，他保持 EFGH 交於一點，拖曳改變 A 點，發現似乎 A 點會形成一個軌跡，而激發 S12 與 S11 深思其理由。以下是 S11 與 S12 的討論片段過程。

S11：…某些點會交於一點（EFGH 交於一點），而且不只一個點，所以可能會有一個軌跡是所有點（EFGH）都交於一點的。

S12：交於一點，就是四點（ABCD）同圓嘛。啊!不是，是距離（比手勢），應該是有一個內切圓？

S12：所以那個交點（EFGH 交於一點）到底是為什麼呢？

（停頓思考了一下）

S12：為什麼會交一點？…（思考一下）就這個點到每個邊距離都一樣…（思考一下）有內切圓。

案例八分析：

S11 與 S12 在 DGE 下展現的幾何思考形成以下循環過程（參考圖 12）：

（1）S11 在拖曳 D 點時看到動態表徵後產生「可能會有一個軌跡讓角平分線都交於一點」的猜測（動態行為）。
（2）S12 提出「交於一點，就是四點（ABCD）同圓嘛」的猜測，在腦中操弄幾何圖形。
（3）S12 透過在腦中的心像操弄，發現「應該是有一個內切圓」的宣告（數學性質）。
（4）S12 為了瞭解為什麼會交於一點，此時宣告轉化為猜測。
（5）S12 思考為何會交於一點，透過模擬操作發現「這個點到每個邊距離都一樣」
（6）S12 最後推得「有內切圓」。

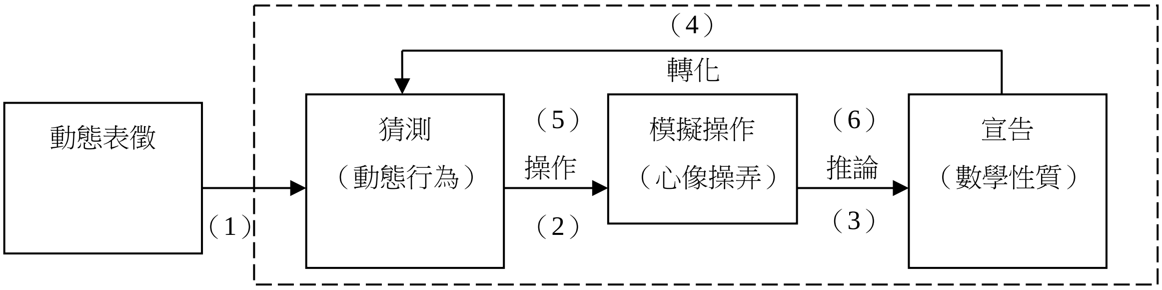


圖 12　S11 與 S12 幾何思考示意圖

（二）幾何思考中的操作：模擬操作 V.S.具體操作

在個體進行幾何思考過程中，有些時候個體形成猜測後，會直接透過 DGS 來進行具體的幾何實驗，但常常因為數學的結構太過抽象與複雜，而無法在心智中繼續模擬操作，在 DGE 下個體會進行數學物件的模擬與操作，來形成猜測與驗證猜測，並透過 DGS 來輔助幾何思考，以下以案例九與案例十分別說明此兩種情形。

案例九：

S5 與 S6 在活動三中觀察與操作 GSP 中的動態表徵，進行幾何思考中他們在提出猜測後，立即使用 GSP 來進行操作實驗，檢驗了各種特殊四邊形，包含正方形、長方形、菱形、平行四邊形，然後得到一些宣告。以下是 S5 與 S6 的討論片段過程。

S5：正方形的時候?

（GSP 操作過程，將圖形拖曳形成正方形。）

S5：正方形是一個點　。

S6：對~正方形是一個點。

S5：那拉長方形

（GSP 操作過程，將圖形拖曳形成長方形。）

S6：所以是平行四邊形。

S5：嗯!

S6：菱形也是一點嗎?

（GSP 操作過程，將圖形拖曳成菱形。）

S5：嗯~菱形會垂直。

S6：也是一點吧

S6：那做平行四邊形。

（GSP 操作過程，將圖形拖曳成平行四邊形。）

S5：（EFGH 呈現）正方形。

S6：（EFGH）還是平行四邊形

案例九分析：

學生的幾何思考的運作流程並非都會經過心智的模擬操作，有可能猜測產生後，而直接進行具體操作。在這個案例中，S5 與 S6 使用 GSP 依序實驗 ABCD 為正方形、長方形、菱形與平行四邊形的情形，都是先提出假設，然後使用 GSP 進行模擬實驗，而得到一個宣告。詳細過程如下：（參考圖 13）

ABCD 為正方形的情形：

（1）S5 提出正方形的時候，透過 GSP 將圖形拉成正方形；

（2）GSP 的動態形為使得幾何圖形呈現交於一個點；

（3）S5 與 S6 觀察到圖形交於一個點，得到（ABCD）正方形時，EFGH 交於一點之宣告。

ABCD 為長方形的情形：

（4）S5 提出長方形的時候，透過 GSP 將圖形拉成長方形；

（5）GSP 的動態形為使得幾何圖形呈現一個平行四邊形；

（6）S5 與 S6 觀察圖形為平行四邊形，得到（ABCD）長方形時，EFGH 形成平行四邊形之宣告。

ABCD 為菱形的情形：

（7）S6 提出菱形的時候，S5 透過 GSP 將圖形拉成菱形；

（8）GSP 的動態形為使得幾何圖形呈現交於一個點；

（9）S5 與 S6 觀察到圖形交於一個點，然後得到（ABCD）菱形時，EFGH 交於一點之宣告。

ABCD 為平行四邊形的情形：

（10）S6 提出平行四邊形的時候，透過 GSP 將圖形拉成平行四邊形；

（11）GSP 的動態形為使得幾何圖形呈現平行四邊形；

（12）S5 與 S6 觀察到圖形平行四邊形，然後得到（ABCD）平行四邊形時，EFGH 為平行四邊形之宣告。

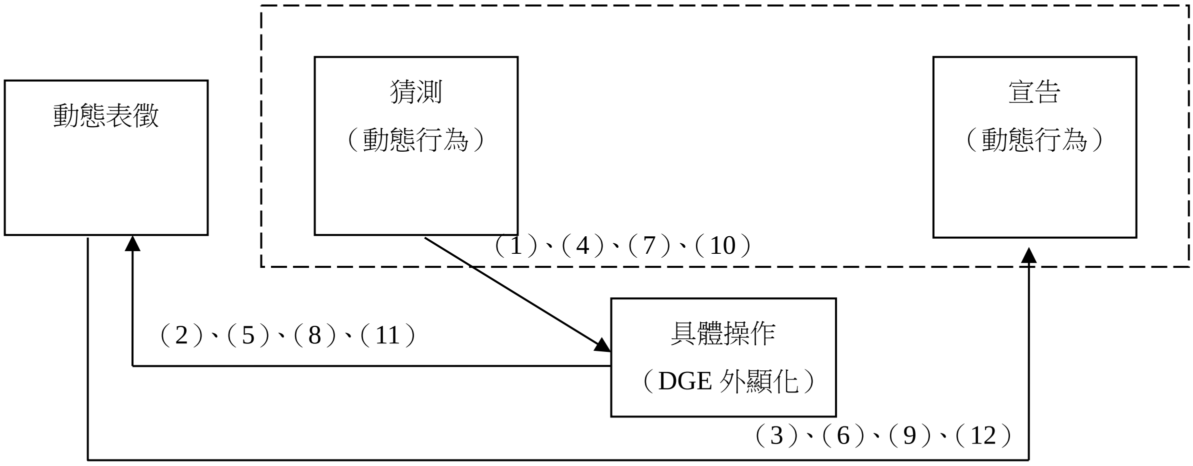


圖 13　S5 與 S6 幾何思考的示意圖

案例十：

S1 與 S2 在活動三開始使用 GSP 檢驗各種特殊的圖形，包含三角形、鳶形、菱形、正方形，發現這些都 EFGH 都會交於一點，而當他們將 ABCD 拉成梯形時，發現 EFGH 似乎沒有交於一點，也沒有形成特別的圖形，因此，討論 ABCD 為等腰梯形時。以下是 S1 與 S2 的討論片段過程。

S1：等腰梯形交一點，會不會？

（S1 與 S2 思考了一下約 1 分鐘）

S1：等腰梯形，角平分線交一點，角平分線交一點。嘿！可以在裡面畫一個圓。等腰梯形…等腰梯形就是一個圓啊對啊！因為這兩邊會一樣，這兩邊會一樣，這兩邊會一樣。

S2：哪有？

S1：我做給你看（使用 GSP 的圓工具，拖曳出一個圓，參考圖 14）。

S2：在裡面嗎？

S1：你看。等腰梯形你看唷！這兩邊會一樣長，這兩邊會一樣長。

S2：所以會交一點。

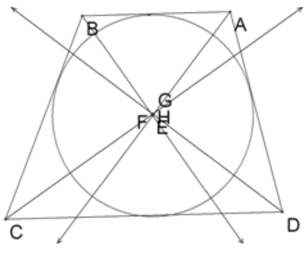


圖 14　S1 與 S2 於活動三的構圖 2

案例十分析：

S1 與 S2 在 DGE 下的幾何思考過程，可以分成以下幾段流程（參考圖 15）：

（1）S1 觀察 DGS 中的幾何圖形的動態表徵（ABCD 呈現梯形，EFGH 呈現一個四邊形），提出等腰梯形時 EFGH 會交於一點之猜想。

（2）S1 形成這個猜想後，思考了一下，然後得到「等腰梯形，角平分線交一點」的宣告，在這之後馬上說明他的想法。表示 S1 是有先進行心智中的模擬操作。

（3）S1「等腰梯形，角平分線交一點」的宣告，並試圖說服 S2。

（4）S2 提出疑問（似乎無法掌握），S1 使用 DGS 進行構圖，以具體的幾何圖形進行說明。

（5）DGS 中圖形上呈現等腰梯形與圓的關係。

（6）S1 透過 DGS 中的圖形驗證並說明其宣告，而 S2 同意此宣告。

當 S1 提出「等腰梯形就是一個圓」的宣告時，S2 抱持著懷疑的態度。此時宣告「等腰梯形就是一個圓」轉化為新的猜測，S1 為了清楚表達自己的想法，他暫時不使用手勢來解釋，而是開始使用滑鼠拖曳出圓驗證給 S2 看（具體操作）。在具體操作所產生的動態表徵（圖 13）使 S2 確信「角平分線會交於一點」並產生出宣告「所以會交一點」（數學性質）。之後再配合手勢驗證說明為何等腰梯形裡頭會有內切圓。

學生在 DGE 下作幾何思考的過程，會在心智模擬操作推論或驗證猜測，當他們面臨無法僅靠操弄內在的動態心像進行推論時，會利用外在的拖曳行動或 DGS 其他檢驗工具來驗證猜測。

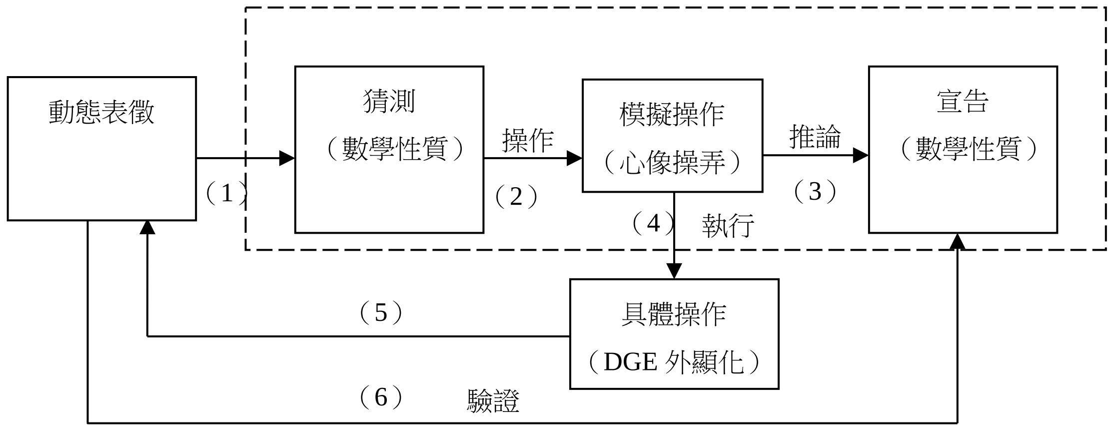


圖 15　S1 與 S2 幾何思考示意圖

（三）DGE 下的幾何思考運作模式與機制

從基本元素和互動關係分析出學生在 DGE 下的幾何思考運作模式（圖 16），動態表徵激發學生作猜測，使其透過模擬操作來操弄動態心像來進行推論，進而產生宣告。當幾何問題情境過於複雜或簡單，以致於學生無法單靠在心智中作推論時，會朝向具體操作圖形的方式來驗證

猜測。

大學生在 DGE 下所發展的幾何思考主要是受到動態表徵外在的動態行為和內在的數學性質所影響而激發他們產生猜測，也會透過手勢輔助模擬操作的方式來驗證猜測，進而產生宣告。通常模擬操作完後，會再使用 DGS 具體操作驗證自己的想法。不過，當問題情境過於複雜或簡單時，會跳過模擬操作直接朝向具體操作圖形的方式來驗證猜測。此外影響學生作幾何思考的因素除了動態表徵，也會受到同儕的想法所影響。學生藉由同儕間的互相討論，激發他們產生或修改猜測，釐清推理的盲點，有助於幾何思考的運作和推論。

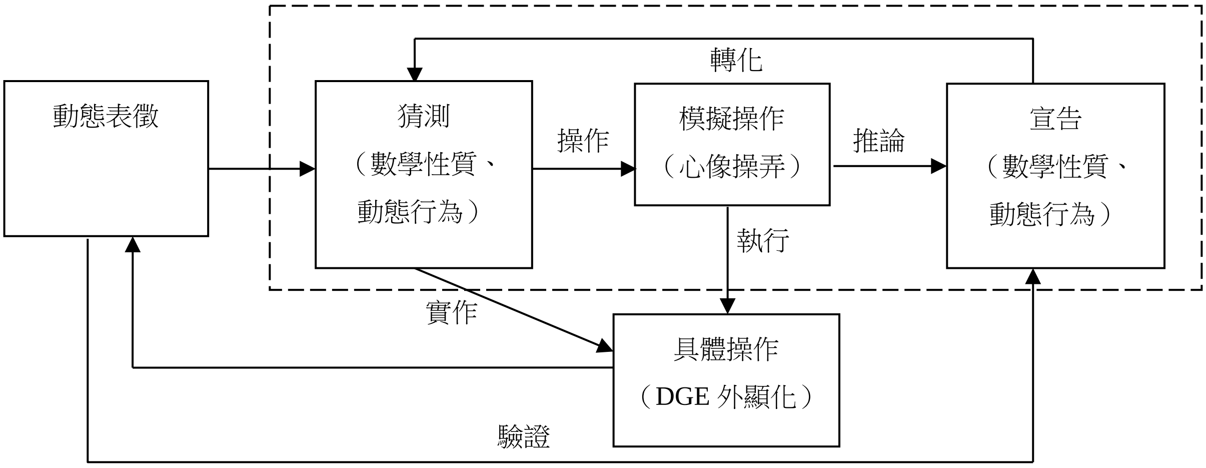


圖 16　DGE 下的幾何思考運作模式

以下將詳細說明幾何思考運作模式中的操作、推論、執行、實作、驗證和轉化等運作過程中的動作，其中虛框線所包含的基本元素和過程代表學生內在的幾何思考。

操作

當學生看到動態表徵時，它會激發他們去猜測表徵背後的數學性質及物件的動態行為。猜測產生後，學生會基於以下理由開始透過手勢或語言作模擬操作，操弄動態心像：1.解釋提出猜測的理由 2.反駁猜測 3.驗證猜測。

推論

在推論過程中，學生以其所擁有的數學知識或圖形表徵為基礎，配合手勢和語言進行推論，進而產生宣告。這裡的宣告內容主要與數學性質和物件的動態行為有關。推論的結果可分為兩類：

1.學生提出他們認為正確的宣告（如 S1、S2 幾何思考運作元素）或是假設性的宣告（如 S5、S6 幾何思考互動關係）。

2.學生經過推論過程後，發現原猜測錯誤，使其無法產生支持原猜測的宣告，例如學生 S13

推論過後得到「我的假設錯誤」的宣告。

執行

學生在模擬操作階段是利用想像的方式在心智中驗證猜測或找尋支持猜測的論點。不過，當學生為了使他人確信自己的推論結果或是對於模擬操作出的結果不具信心及模糊不清時，他們會執行動態幾何軟體來具體操作數學物件，亦即將抽象的推論具體化及動態心像視覺化。

實作

當一個猜測產生時，學生不一定先會以模擬操作的方式驗證，而是直接透過具體操作的方式，藉由觀察動態表徵來檢驗猜測。例如，當其面臨的幾何問題情境過於複雜，導致學生短時間內無法處理外在給予的訊息，需經由具體操作圖形來減輕認知負荷、或猜測過於簡單易懂使得學生不需先進行思考，而是直接操弄圖形，將想法實踐。

驗證

在具體操作的過程中所產生的動態表徵使學生驗證猜測或推論想法的正確性，並進一步對操作驗證的結果下結論，產生宣告。

轉化

當宣告產生後，會使其再度轉化會新猜測的理由主要是學生在具體或模擬操作過程中得到宣告後，為了再次驗證宣告的正確性，將宣告轉化為猜測，在心智中進行模擬操作驗證。

伍、結論與建議

一、主要結論

本研究主要在分析在動態幾何環境下大學生的幾何思考的運作模式。由研究結果顯示動態幾何構圖所產生的動態表徵能激發學生從事心智推理的幾何思考。三種類型的動態表徵對學生在幾何探索過程中產生認知意義或衝突時，會喚起所擁有的舊經驗，進而激發其作幾何思考推論出幾何性質或解釋衝突的原因。依據 Duval（1998）的幾何認知理論，本研究的發現更凸顯了動態幾何環境其支持構圖與視覺化的認知功能，而且能夠有效地激發學生進行思考與實驗。在幾何探索的過程中，本研究發現學生進行幾何探索過程中有類似 Arzarello 等人（2002）研究發現有各種不同的拖曳模式，而且我們發現很多時候學生是經過思考後再進行幾何操作，如同 Tall（1999）所言學生可以如同數學家的方法來進行自發性地探索與推理證明，而本研究的發現更凸顯了 DGE 環境是可以提供學生進行數學地思考的環境。

幾何思考運作的基本模式包含猜測、模擬操作、宣告。在動態幾何環境下大學生於幾何探索過程中幾何思考不斷地透過具體操作進行幾何實驗，幾何實驗中的動態表徵再次激發他們進行幾何思考。推論、執行、實作、驗證和轉化是幾何思考與和動態幾何實驗交互作用過程中主

要的運作方式。根據 Lakatos（1976）、陳英娥與林福來（1998）對於數學思考的研究，本研究的發現可以他們的研究結果為基礎，來建立的 DGE 下的幾何思考運作模式，從研究的結果本研究可以巧妙地連結 Duval 的幾何認知模式，來說明 DGE 在學生進行幾何探索中所扮演的角色，以及學生的思維發展。

二、研究結果的教學啟示與未來研究建議

當學生觀察動態幾何軟體所產生動態表徵時，通常不會立即反應，而是透過幾何思考後再做適當的拖曳行動。這種反應方式顯示學生是在進行有意義的活動而非盲目的行動。因此建議於佈置動態幾何學習環境時，可參考能激發幾何思考的三種動態表徵類型設計於活動中，以啟發進行後設認知形式的幾何探索。然而，本研究個案學生是具備充分的數學知識與動態幾何軟體操作技巧，而能反映出三思而後行的成熟行動，一般中小學生會如何行動反應是未來可進行探討的有趣問題。

動態表徵其外顯的行為和內在的數學性質會激發個體產生猜測，並在心智中模擬操作數學物件以及分析可能的動態行為來驗證猜測，進而產生宣告，形成一個幾何思考的基本模式。然而，學生不容易掌握動態行為與數學性質之間的結構關係而無法形成精確性質的宣告。因此，建議在動態幾何環境下進行幾何教學過程中，教師能適時的給予結構性的提示將有助於學生完成較完整的幾何思考。至於如何佈置適當的動態幾何學習環境激發學生從幾何操作上轉移至分析動態表徵與數學性質之間的結構關係是未來值得研究的議題。

學生會依據模擬操作的複雜程度，再使用 DGS 具體操作以驗證幾何思考過程中的想法。此時，學生依據幾何思考過程中的邏輯推理來進行 DGS 拖曳行動，所呈現出的動態表徵不僅反應推理的條件亦受動態行為的數學結構所節制，而具體檢驗模擬操作的可行性與精確度。因此，在設計動態幾何學習環境時，動態幾何軟體除了可作為操弄工具外，也可做為幾何學習的認知工具。這種認知作用除了 Arzarello 等人曾分析拖曳行動的認知功能外，而動態表徵的認知作用更是未來值得研究的議題。

學生在動態幾何環境下進行幾何實驗並與幾何思考不斷地交互作用下探索幾何性質。此時動態幾何軟體具有符號仲介的功能，整合複雜的符號系統以支助學生發展符號運用進行邏輯推理。此時，推論、執行、實作、驗證和轉化等過程藉助 DGS 符號仲介的功能形成幾何思考與和動態幾何實驗交互作用。為了能在動態幾何環境下的推理過程產生意義，同儕之間可藉助動態幾何軟體符號仲介的功能相互的溝通。由研究結果發現學生在作幾何思考和推理的過程中，兩人一組會藉由互相討論，逐步釐清推論的錯誤或提供解題的想法有助於個體作幾何思考。本研究並未深入探討兩個人的社會互動對幾何思考運作及推理的影響，建議未來可朝此一面向進行分析。

參考文獻

陳英娥、林福來（1998）。數學臆測的思維模式。**科學教育學刊**，**6**（2），191-218。

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM, 34*(3), 66-72. doi: 10.1007/BF02655708

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processing. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). New York, NY: Springer-Verlag. doi: 10.1007/978-3-642-57771-0_10

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-52). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162. doi: 10.1007/BF01273689

Furinghetti, F., & Paola, D. (2003). To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment: A case study. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference Held Jointly with the 25th PME-NA Conference* (Vol. 2, pp. 397-404). Honolulu, HI: CRDG, University of Hawaii.

Hazzan, O., & Goldenberg, E. P. (1996). Students' understanding of the notion of function in dynamic geometry environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1*(3), 263-291. doi: 10.1007/BF00182618

Hölzl, R. (1996). How does ‘dragging’ affect the learning of geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1*(2), 169-187. doi: 10.1007/BF00571077

Hoyles, C., & Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 121-128). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: The case of geometry. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (pp. 48-67). Berlin, Germany: Springer-Verlag. doi: 10.1007/978-3-642-78542-9_3

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9781139171472

Lopez-Real, F., & Leung, A. (2006). Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry environments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37*(6), 665 - 679. doi: 10.1080/00207390600712539

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-3), 25-53. doi: 10.1023/A:1012733122556

Mariotti, M. A., Laborde, C., & Falcade, R. (2003). Function and graph in DGS environment. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference Held Jointly with the 25th PME-NA Conference* (Vol. 3, pp. 237-244). Honolulu, HI: CRDG, University of Hawaii.

Pinto, M., & Tall, D. (2002). Building formal mathematics on visual imagery: A case study and a theory. *For the Learning of Mathematics*, *22*(1), 2-10. doi: 10.1007/BFb0099867

Sorensen, R. A. (1992). *Thought experiments*. New York, NY: Oxford University Press. doi: 10.1093/019512913X.001.0001

Tall, D. (1998). Information technology and mathematics education: Enthusiasms, Possibilities & Realities. In C. Alsina, J. M. Alvarez, M. Niss, A. Perez, L. Rico, & A. Sfard (Eds.), *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education* (pp. 65-82). Sevilla, Spain: S.A.E.M. Thales.

Tall, D. (1999). The chasm between thought experiment and mathematical proof. In G. Kadunz, G. Ossimitz, W. Peschek, E. Schneider, & B. Winkelmann (Eds.), *Mathematische bildung und neue technologien* (pp. 319-343). Leipzig, Germany: B. G. Teubner Stuttgart. doi: 10.1007/978-3-322-90149-1_32

Talmon, V., & Yerushalmy, M. (2004). Understanding dynamic behavior: Parent-child relations in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, *57*(1), 91-119. doi: 10.1023/B:EDUC.0000047052.57084.d8

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher mental psychological processes* (M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman, Eds. & Trans.). Cambridge, MA: Harvard University Press. (Original work published 1930-1935)

Su, J. H., & Ying, J. M. (2014).
Enhancing in-service mathematics teachers' professional knowledge with an HPM approach as observed in teachers' reflections.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *1*(1), 79-97.
doi: 10.6278/tjme.20140307.003

Enhancing In-service Mathematics Teachers' Professional Knowledge with an HPM Approach as Observed in Teachers' Reflections

Jim-Hong Su[1] Jia-Ming Ying[2]
[1]Taipei First Girls High School
[2]College of Humanities and Social Sciences, Taipei Medical University

In this paper we discuss an HPM approach that may enhance in-service teachers' mathematics content knowledge and PCK at the same time. The method we used was to let four high school mathematics teachers read historical texts in mathematics, and ask them to write reports on their reflections. The historical texts consisted of four proofs of Heron's Formula provided by various scholars in history. The reports were then collected and analysed. We used the PCK model of Veal and MaKinster to explain the enhancement of the teachers' PCK. Their reflections indicated that their content knowledge, knowledge of students, and knowledge of instructional strategies improved. In addition, the vertical links from content knowledge to several attributes of PCK, as well as the horizontal links among those attributes were strengthened.

Keywords: Heron's Formula, history and pedagogy of mathematics (HPM), pedagogical content knowledge (PCK).

Corresponding author：Jia-Ming Ying，e-mail：j.m.ying@tmu.edu.tw
Received：31 August 2013;
Accepted：7 March 2014.

蘇俊鴻、英家銘（2014）。
由教師反思中所見之在職數學教師專業知識增強的 HPM 進路。
臺灣數學教育期刊，1（1），79-97。
doi: 10.6278/tjme.20140307.003

由教師反思中所見之在職數學教師專業知識增強的 HPM 進路

蘇俊鴻[1]　英家銘[2]
[1]臺北市立第一女子高級中學
[2]臺北醫學大學人文暨社會科學院

本研究討論一個由在職教師為主所組成的數學史討論班課程中之教學活動，這個課程採用數學史與數學教育（HPM）的進路，希望能同時提升在職數學教師的數學知識與學科教學知識（PCK）。在這個教學活動中，四位在職高中數學教師閱讀古代數學文本，理解後撰寫讀書心得與反思。古代數學文本的素材包含四位古代數學家對海龍公式證明的古文原文或現代英文翻譯。研究者使用海龍公式證明作為閱讀素材的理由有三點。第一，海龍公式通常被用來計算三角形面積，而現代教材運用餘弦定律的證明方法，展現符號代數的威力，但古代證明通常使用歐式幾何的證明策略，所以，兩種證明策略之間的張力，隱含了幾何與代數雙重表徵的連結問題，使古代證明的閱讀與反思成為我們用以檢驗學習者是否掌握，以及教師能否反思表徵形式之相關能力的極佳範例。第二，不同證明策略，會導致不同的理解困難，而教師本身在遇到這些困難之後，是否能意會到學生學習也會遇到類似的困難，也是可檢驗教師教學內容知識的視點。最後，海龍公式的古代證明會使用到各類不同的先備知識，使得閱讀者有可能利用海龍公式進行數學知識的縱深統整（vertical integration），進而強化教師的教學內容知識。教師們的反思在撰寫完畢之後由研究者分析，可以看到透過數學文本的閱讀，教師們對於海龍公式數學內容知識的理解，補強現行教科書之不足，能夠延伸至面積課程教學的內容。此外，透過幾何表徵的映照，突顯代數方法的簡便性，使得教師對於整個教材的結構脈絡有全面性的觀照。研究者利用 Veal 與 MaKinster 的學科教學知識模型來解釋教師教學知識的增強，而文本的閱讀正是由此模型的下層的內容知識，往中層對學生的知識與上層教學策略知識連結，透過數學內容知識的增加，進而強化 PCK 的其他特質，教師整體的 PCK 就能提升。研究結果顯示，這四位在職高中數學教師，他們的內容知識、對學生的知識，以及教學策略知識都有增長。同時，從內容知識到上層教學策略中各個屬性間的縱向連結，特別是與脈絡、評量、教學法、課程與社會文化等五個屬性的縱向聯結，以及那些屬性之間的橫向連結皆有增強。

關鍵詞：海龍公式、數學史與數學教育、學科教學知識

通訊作者：英家銘，e-mail：j.m.ying@tmu.edu.tw
收稿：2013 年 8 月 31 日；
接受刊登：2014 年 3 月 7 日。

I. Introduction

Approximately three decades ago, some educators and historians of mathematics began to explore the possible uses and effects of history in mathematics education at the primary, secondary and tertiary levels. International collaborations have been formed to investigate related topics, and many educators have come to believe that history plays a valuable role in mathematics teaching and learning (Fauvel & van Maanen, 2000). Recently, additional empirical studies have been conducted and positive results have been obtained regarding applying history in mathematics teaching and learning, about topics such as arithmetic, algebra, geometry, and calculus for students of various levels (Katz & Tzanakis, 2011; Liu, 2009). It would seem that more and more efforts have been exerted in the investigation and application of history in mathematics education.

However, if applying history in mathematics education is in fact a worthwhile cause, more mathematics teachers, both pre-service and in-service, should be provided some training in the history of mathematics and its applications in teaching and learning. Educators in Norway, the United States, and the United Kingdom have been trying to do exactly this in their respective countries (Katz & Tzanakis, 2011). In Taiwan, courses on the history of mathematics are provided in several teacher training institutions, some of which also engage in research projects that try to provide qualitative or quantitative evidence on applying history in teaching or teacher training. The study described in this paper was conducted in this context, discussing an approach for enhancing in-service mathematics teachers' professional knowledge in a graduate-level course.

II. Literature Survey and Rationale

In 1987, Lee S. Shulman first proposed the concept of pedagogical content knowledge (PCK), as a model for describing how teachers acquire new understandings of the content that they teach, and how these new understandings influence their teaching. He believed that PCK includes "an understanding of how particular topics, problems, or issues are organised, presented, and adapted to the diverse interests and abilities of learners, and presented for instruction" (Shulman, 1987). A trend of research in related fields was started, especially research that involved describing and classifying the professional knowledge of teachers. Veal and MaKinster (1999) reported that numerous researchers have listed attributes or components of PCK and observed similarities in these PCK taxonomies. The three most important and recurring characteristics in the taxonomies are knowledge of students, knowledge of content, and knowledge of instructional strategies. However, researchers have not illustrated the relationships among the attributes. Veal and MaKinster then presented a hierarchical taxonomy of PCK attributes: the base level is content knowledge, the middle level is knowledge of students, and the top level is knowledge of instructional strategies. The three levels are embedded into one another. The top level is further subdivided into eight interconnecting attributes – context, environment, nature of science, assessment, pedagogy, curriculum, socioculturalism, and classroom management. Veal and MaKinster stressed that the development of those attributes does not need to be linear. Among the three levels, a lower level has more significance than a higher level, implying that having an extensive base of content knowledge is a necessary (but not sufficient) condition for a teacher's well-developed PCK.

The research on Pedagogical Content Knowledge also extends to studies on reading and writing. Discussions in literature about reading, writing, and argumentation mostly focus on the influence of reading and writing on students' concept learning or how, through the process of reading and writing, teachers understand students' thinking and learning of concepts. In fact, these discussions have to assume that teachers have a sound grasp of necessary content knowledge and PCK. For instance, "when a text involves propositions and proofs, it conveys the necessary logical relations between concepts; that the same concept may have different statuses (hypothesis, conclusion, lemma, or corollary), that different proof strategies imply distinct mathematical thinking…, are all features we have to consider when analysing texts of proofs" (Yang, 2004). This may adequately explain that in guiding text reading and writing, a teacher's knowledge about the text has to include a well-integrated system of content knowledge and knowledge of other related representations, so that teaching can meet the need of teaching goals and that of students' learning. The consideration responds to the idea of the importance of enhancing teachers' content knowledge and PCK.

Fan (2003) believed that teachers' self-improvement of professional knowledge relies primarily on reflections after teaching and interactions among colleagues; the significance of textbooks is only to the next. But let us recall the term coined by Felix Klein: "double-forgetting" – first forgetting school mathematics on going to college and then having to forget higher mathematics on going back to school as a teacher (Freudenthal, 1973). Thus, teachers' basis for reflection, beside interactions with colleagues, is ironically only at-hand textbooks. However, different versions of textbooks in Taiwan do not have salient content distinctions due to market considerations. Sometimes the explanations are even identical. Therefore, reading textbooks published by different publishers can seldom help teachers reflect on their teaching. The help current textbooks and teachers' handbooks can bring to their self-improvement is in fact minimal.

The difficulty mentioned in the previous paragraph may be coped with through reading historical mathematics texts. The study of an historical text, which is closely related to exploring the genesis or evolution of a mathematical concept, usually reveals aspects that cannot be found in the modern and refined definitions of the concept. From a teacher's point of view, this broader understanding offers ideas for creating new didactic situations, or even helps the teacher foresee some of his or her students' difficulties and errors when they struggle to grasp the meaning of the concept's modern definition (Thomaidis, 2005). Therefore, following the trends in studying the relations between history and pedagogy of mathematics (HPM) and the applications of history in mathematics education, we shall point out that the growth of teachers' PCK can benefit from reading historical mathematics texts, that is, an HPM approach. Recent studies have suggested that courses in the history of mathematics in teacher training programmes might serve to improve the mathematical content knowledge as well as the PCK of pre-service primary school mathematics teachers and pre-service secondary school mathematics teachers (Clark, 2011; Smestad, 2011). For pre-service secondary school mathematics teachers, in particular, an HPM course could help, to a certain extent, pre-service teachers construct coherent curricula and motivate them to develop their own material (Clark, 2011; Tzanakis & Arcavi, 2000). From the literature mentioned in this paragraph, we can see that there have been some studies which show that reading historical sources may help teachers explore the evolution of mathematical concepts, foresee students' difficulties, or construct coherent lesson plans. Therefore, from a didactic point of view, the HPM approach benefits several aspects of a teacher's PCK.

However, most of the research on the application of history in mathematics teacher training addressed pre-service teachers. For in-service mathematics teachers, whom Fan and Freudenthal were concerned about in their writings, there seem to be very few studies related to enhancing their professional knowledge with an HPM approach. This rationale naturally led to our research question:

How does the study of the history of mathematics impact the mathematical and pedagogical content knowledge of in-service mathematics teachers?

In this paper, we shall illustrate a qualitative case study on a reading unit in a graduate-level course on the history of mathematics in which in-service mathematics teachers participated.

III. Methodology

1. Research setting

This case study was conducted in a graduate-level course on the history of mathematics taught in a recent year in the department of mathematics in one of the universities in Taiwan that has a long history of teacher training, and the participants in the course provided consent. The specific task (reading and reflecting on four proofs of Heron's Formula, see below) was given to the participants in a "seminar" that lasted four weeks, with three hours of reading, reflecting, and discussing in each week. Prior to the "seminar", historical texts were assigned to different members in the course to study. And then they presented the contents to the members in the seminar, and others would comment on those proofs and then write reflections. The written reports of their free reflections were then collected and analysed by the researchers according to the model of Veal and MaKinster, and the reflections were used as data in this study.

The sample in this study comprised four in-service high school mathematics teachers participating in this course. We shall refer to them with pseudonyms that are Romanisations of letters in the Greek alphabet: Alpha, Beta, Gamma and Delta. Their backgrounds and prior exposure to the history of mathematics are described as follows.

Teacher Alpha has a bachelor's degree in mathematics from a Normal University, and a master's degree in teaching (教學碩士) from the same university. He had taken courses about the history of mathematics at both the undergraduate and graduate levels. At the time of this study, he had already had nine years of combined teaching experience in a public junior school and a public senior high school in Yilan County.

Teacher Beta has a bachelor's degree in mathematics from a comprehensive university, and a master's degree in teaching (教學碩士) from a Normal University. He had taken a course about the history of mathematics only in the graduate level. At the time of this study, he had already had 10 years of combined teaching experience at a private senior high school, a public junior high school and a public senior high school in Taoyuan County.

Teacher Gamma has a bachelor's degree and a master's degree, both of which in mathematics from a Normal University. She had studied the history of mathematics at both the undergraduate and graduate levels. She used to work as a teaching assistant for three years in her alma mater before she became a school-teacher, and at the time of this study, she had already had twelve years of combined teaching experience as a teaching assistant in a university, and as a teacher at a public junior high school and, subsequently, at a public senior high school in Taipei City.

Teacher Delta has a bachelor's degree in mathematics from a Normal University, and a master's degree in teaching (教學碩士) from the same university. He had taken courses about the history of mathematics in both the undergraduate and graduate levels. At the time of this study, he had already had nine years of teaching experience, at both the junior and senior levels, in a comprehensive high school in Taipei County (currently New Taipei City).

As the reader can see, the four teachers hold degrees from different universities and have different backgrounds. The locations of the schools at which they have taught range from urban areas to rural towns in Taiwan. The lengths of their teaching experiences differ, but they are not novice teachers. They were all more or less exposed to the history of mathematics when they were studying in undergraduate or graduate levels.

Since both authors of this paper have experience in studying texts with these teachers, we decided to conduct "participant observation", letting one of the authors, also a high school mathematics teacher, join the process of text-reading and reflection.

Participant observation is a methodology appropriate for studies of aspects of human existence; it is especially appropriate for exploratory studies and descriptive studies. In educational settings, this methodology has been used in observation of teaching and learning in levels ranging from pre-school to university (Jorgensen, 1989). In studies of mathematics education, it has been shown that the methodology is particularly helpful when exploring mathematical thinking (Carraher, Carraher, & Schliemann, 1985). Since this study explored mathematics teachers' changes in their professional knowledge through their reflections, a participant observing in their in-class discussions would help identify meaningful reflections after the class. One of the limits of participant observation is that the participant rarely remains uninvolved with those being observed (Jorgensen, 1989). In this study, since the participating researcher also, in a few inevitable cases, contributed in the class discussions, the non-participating researcher could serve as an "objective" reader of the teachers' reflections when they were analysed by both researchers. In other words, those teachers' reflections were analysed by the participating author and the non-participating one to seek trustworthiness through triangulation.

In the following subsection, we introduce the central mathematical content that was studied by the teachers – four proofs of Heron's Formula.

2. The task – Reading proofs of Heron's Formula

The task given to the teachers was to read four different proofs for Heron's Formula. The famous formula is typically expressed in its modern form:

$$\text{triangle area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

where *a*, *b*, and *c* are three sides of the triangle in question, and *s* is half of the sum of the lengths of its three sides. In chronological order, the four proofs given to the teachers were the classical proof by Heron in his work *Metrica* (first century A.D.) in the form of its English translation, a proof by Mei Wending 梅文鼎 (1633~1721 A.D.) in his book 平三角舉要 (Elements of Planar Trigonometry, middle of the 18th century) in the original form in classical Chinese, a proof by Li Shanlan 李善蘭 (1811~1882 A.D.) in his book 天算或問 (Some Questions about Astronomy and Mathematics, 1867 A.D.) also in the original form in classical Chinese, and finally the proof in the text book *Elements of Plane and Spherical Trigonometry* (1859 A.D.) by Elias Loomis (1811~1889 A.D.) in modern American English.

But why Heron's Formula? Why did the lecturer of this course wanted to use this topic to improve in-service teachers' professional knowledge?

The first reason is about its dual nature. Heron's Formula is used to calculate the area of a geometrical figure, while modern textbooks use algebraic methods to demonstrate its validity. This dual nature suggests a possible link between geometric and algebraic representations of the same mathematical concepts. Therefore, it is an appropriate tool for surveying learners' and teachers' ability to reflect upon different forms of representations. In preparation of this course and the study, the lecturer and the two authors of this paper noticed that, after Heron's Formula was introduced to China by missionaries in the 1600s, several different proofs were developed in the following centuries, and the strategies of proving transformed from geometric to algebraic approaches, and eventually became what we see in high school textbooks today, which is a paradigmatic example for students to practise Laws of Sine and Cosine. In the same centuries, from the 1600s to the 1900s, representations of "trigonometry" were also transformed from the forms of Euclidean geometry to those of symbolic algebra. As can be seen, the different representations in those proofs are suitable for stimulating the teachers' reflections.

The second reason is an extension of the first one. For the in-service teachers and other students taking that graduate-level course in history of mathematics, reading historical proofs was an opportunity for them to have indirect "dialogues" with great mathematicians in the past, and in the process, they could form their own interpretations, free themselves from the limit of modern textbooks, compare the differences between geometric and algebraic strategies of proving, and understand the evolution and accumulation of mathematical knowledge. From a research point of view, this means that, with those different proofs in mind, the teachers might reflect upon students' possible difficulties or misconceptions when they encounter modern definitions of concepts and proofs of propositions about those concepts. In addition, the researchers would have an opportunity to check whether the teachers had had enough grasp of the mathematical knowledge and students' learning.

The third reason is related to the value of "vertical integration". The investigation of area and volume is always an issue for ancient mathematicians due to its relevance to the real world, so related topics are seldom excluded from a course about the history of mathematics. Triangle formulae, in particular, are related to mathematical contents studied at the elementary to senior high school levels. Heron's Formula, as well as its various proofs, may remind the teachers of how area formulae are demonstrated at the primary, secondary and tertiary levels. As can be seen from proofs listed below, they make use of concepts from elementary school mathematics (such as simple arithmetic and area formulae), junior high school mathematics (such as Euclidean propositions and arithmetic of proportions) and senior high school mathematics (such as algebraic manipulations and trigonometry). The teachers would be reminded, or taught, how lower-level mathematical concepts can be used to solve higher-level problems, and how they should connect those mathematical concepts from different levels for their students. That is what we mean by "vertical integration" in both the content and pedagogical knowledge of different levels of school mathematics. To sum up, it is the very transformation of proving strategies and representations, the possibilities to foresee students' difficulties from past proofs, and the value of vertical integration, that caused the lecturer and the researchers to use the proofs of Heron's Formula as a tool to investigate how reading ancient mathematical texts might improve teachers' content knowledge about the formula itself, and in turn stimulate the enhancement of their PCK.

In what follows we present outlines of the four proofs for Heron's formula. The English translation of Heron's original proof is quoted from Fauvel and Gray (1987), while the other three proofs presented below are the authors' own interpretation.

(a) Heron's proof

In his *Metrica*, Heron discussed the methods to find the area of a triangle with the lengths of three given sides. He gave two ways: "[n]ow it is possible to find the area of the triangle by drawing one perpendicular and calculating its magnitude, but let it be required to calculate the area without the perpendicular" (Fauvel & Gray, 1987), which means, Heron intended to find the area under such a limitation. His proof was geometrical. See Figure 1. Let $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, and $\overline{AB}=c$. Then it can be shown that $\overline{AE}=\overline{AF}=s-a$, $\overline{BF}=\overline{BD}=s-b$, $\overline{CE}=\overline{CD}=s-c$, and $s=(s-a)+(s-b)+(s-c)$, where $s=\frac{(a+b+c)}{2}$. Heron already knew that the area of ΔABC was $\frac{(a+b+c)}{2}\times r=sr$, where r is the radius of the inscribed circle. So all he had to do was to replace r. His method was to extend $\overline{CH}=s-a$, so that $\overline{BH}=s$. Once he derived the proportional equality $\frac{s^2}{s(s-a)}=\frac{(s-b)(s-c)}{r^2}$, he obtained $s^2r^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$, and the proof was complete. Since he wanted to show the equality geometrically, he needed similar triangles. He chose ΔAEI and ΔBCL, and he showed their similarity by demonstrating that quadrilateral *BICL* can be inscribed in a circle, so its opposite angles were supplements to each other. Using the similarity, he obtained the proportions $\overline{BC}:\overline{CL}=\overline{AE}:\overline{EI}=\overline{CH}:\overline{DI}$ ($\overline{AE}=\overline{CH}$, $\overline{EI}=\overline{DI}$). Then he used properties of proportions to replace the segments, and he could successfully prove that equality and, finally, the formula. In his proving process, Heron actually made use of many propositions from Euclid's *Elements* (such as the triangle area formula "*sr*" and properties of similar triangles), thus demonstrating the applicability of Euclidean geometry.

(b) Mei Wending's proof

Mei Wending's proof was not his original idea. According to our investigation, the proof was presented in the 測量全義 (Complete Explanation of Measurements) written by the Jesuit missionary Giacomo Rho (Mei, nd/1993; Rho, 1631/2000) in classical Chinese in the middle of the seventeenth century, but the proof contained a small flaw. Mei corrected it and included the proposition in his 平三角舉要. This proof begins with the same way as does Heron's proof. As shown in Figure 2, he first extended $\overline{CH}=s-a$, so that $\overline{BH}=s$. Unlike Heron, however, the proportional equality Mei wanted was $\frac{s-b}{s}=\frac{r^2}{(s-a)(s-c)}$, and the similar triangles to obtain that equality were ΔBID and ΔBGH. Once he showed the similarity between the two triangles, he obtained $\overline{BD}:\overline{BH}=\overline{ID}:\overline{GH}=\overline{ID}^2:(\overline{GH}\times\overline{ID})$. From $\Delta CGH\cong\Delta ICD$, he then replaced $\overline{GH}\times\overline{ID}$ with $\overline{CH}\times\overline{CD}$, and the proof was complete.

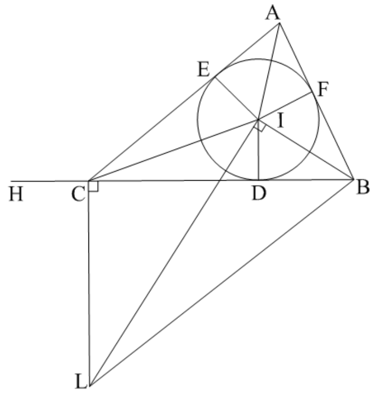


Figure 1 Diagram for Heron's proof of his formula for determining the area of a triangle.

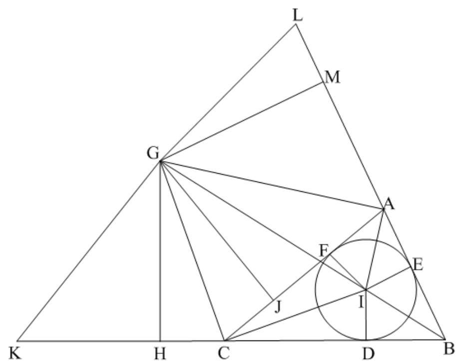


Figure 2 A reproduction of Mei Wending's diagram for his proof of Heron's Formula.

(c) Li Shanlan's proof

Li Shanlan's proof can be found in his 天算或問 (Li, 1867/2002). With three pairs of questions and answers, he justified $(s-a)(s-b)(s-c)=sr^2$. The formula followed from multiplying s and taking square roots on both sides.

As in Figure 3, let $\overline{AE}=\overline{AF}=s-a$, $\overline{BF}=\overline{BD}=s-b$, and $\overline{CE}=\overline{CD}=s-c$. Surprisingly, Li first constructed a height $\overline{AH}=h$, and showed the proportional equality $\overline{CD}:(\overline{AC}+\overline{CH})=\overline{BD}:(\overline{AB}+\overline{BH})=r:h$. Therefore, $\frac{\overline{CD}}{b+\overline{CH}}\times\frac{\overline{BD}}{c+\overline{BH}}=\frac{r^2}{h^2}$. Besides, $h^2=c^2-\overline{BH}^2=b^2-\overline{CH}^2$, so $(c-\overline{BH})(c+\overline{BH})=(b-\overline{CH})(b+\overline{CH})$. Applying the fact $\frac{c+\overline{BH}}{b-\overline{CH}}\times\frac{b+\overline{CH}}{c-\overline{BH}}=\frac{s}{s-a}$, he obtained $\frac{(s-b)(s-c)}{r^2}=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{CD}}{r^2}=\frac{(b+\overline{CH})(c+\overline{BH})}{(b+\overline{CH})(b-\overline{CH})}=\frac{c+\overline{BH}}{b-\overline{CH}}=\frac{s}{s-a}$, and the proof was complete.

(d) The proof in Elias Loomis's *Elements of Plane and Spherical Trigonometry*

The *Elements of Plane and Spherical Trigonometry* (Loomis, 1859) was widely used in the United States in the nineteenth century, and was also translated into Chinese and used in schools founded by Christian missionaries in China (Li, 2005). See Figure 4. The proof involves applying a Euclidean proposition ($\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{BC}\times\overline{BH}$) from another text book by Loomis: the *Elements of Geometry, Conic Sections, and Plane Trigonometry*. Using this proposition, he obtained $\overline{BH}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$, and then $\overline{AH}^2=\overline{AB}^2-\overline{BH}^2=c^2-\frac{(c^2+a^2-b^2)^2}{4a^2}=\frac{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}{4a^2}$. The area of ΔABC is $\frac{\overline{BC}\times\overline{AH}}{2}=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}$, which was then simplified using algebraic manipulations to $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, where $s=\frac{(a+b+c)}{2}$.

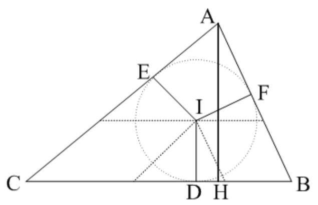


Figure 3 A reproduction of Li Shanlan's diagram in his 天算或問.

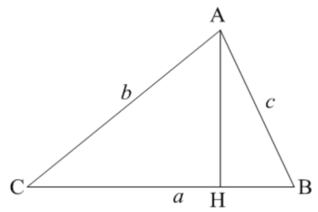


Figure 4 Diagram for Elias Loomis's proof of Heron's Formula.

IV. Data Analysis and Findings

With the collected reflections written by those teachers, we can now explain why reading ancient mathematical texts might enhance teachers' content knowledge and PCK, according to Veal and MaKinster's taxonomy. The reflections were originally written in Chinese. Quotations were translated into English by the authors from the teachers' reflections. As mentioned earlier, the teachers' reflections were analysed by the participating author and the non-participating one to seek trustworthiness through triangulation. Therefore, the excerpts of the reflections quoted in this section objectively represent to a certain extent the changes of the teachers. In what follows we list our findings about the teachers' enhancements and provide excerpts of the teachers' reflections as the evidence in our analysis.

1. Enhancements of mathematical knowledge and the connection between content knowledge and socioculturalism

From the previous section, we know that Heron's Formula was first proposed in an historical scene due to the need for solving real-world problems, and geometrical representations were used in early proofs. Those proofs expanded the teachers' understanding of the mathematical content knowledge on Heron's Formula. Teachers Alpha wrote,

> [W]hen I first saw Heron's original proof, on the one hand, I was alerted to the scant knowledge I had; on the other hand, I had a sudden realisation, because it was only natural that Heron's idea came from geometrical concepts and figures…[H]ardly any textbook version mentions Heron's original proof.

Veal and MaKinster's terminology can be applied in describing the change in Teacher Alpha's professional knowledge. First, the teacher's mathematical knowledge was improved for he learned how to prove Heron's formula with Euclidean geometry. Second, the connection between content knowledge and the knowledge of context and socioculturalism were enhanced. The reason we say this is that Teacher Alpha realised he had actually known that, in Hellenistic Alexandria, where Heron worked, there was no symbolic algebra (because it was invented in the eighteenth century), and all geometrical propositions were proved with Euclid's approach and Aristotelian logic. Teacher Alpha linked the mathematical content and socioculturalism in history.

2. Enhancements of the awareness to different representations and structures of proofs

We also observed that all the teachers, except Teacher Beta, mentioned that they noticed the different representations – geometrical and algebraic – used in the texts. The same three teachers also reflected on how they might be able to use the characteristics and differences among the proofs in lessons, thus enriching their teaching repertoire. For instances, Teacher Gamma wrote:

> [Heron's and Mei's proofs] had the same basic strategy: first they used the inscribed circle to obtain the area of the triangle, and then they used proportions to obtain the relationships between rs and segments s, s-a, s-b, and s-c. Both proofs have only one inconvenience in teaching; namely, because we cannot see the role a 'height' plays, teachers cannot link '1/2 × base × height' to Heron's Formula. For this problem, Li Shanlan's proof provides a solution.

This excerpt provides evidence that the teachers' content knowledge on the structures of the proofs was enhanced.

3. Enhancements of the connection between the teachers' content knowledge and assessment.

Assessment is another attribute that is connected to content knowledge. Teacher Delta stated that:

> [U]sing Pythagorean Theorem to prove Heron's Formula may be able to prevent students from perceiving that Heron's Formula is merely a procedural knowledge.

Teacher Gamma also wrote in another place about the aspect of assessment:

> Knowing the geometrical counterparts of s, s-a, s-b and s-c […] helps in problem-solving, such as in solving the [following] problem [that was used in an exam]: ‘Given $\triangle ABC$, $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 5$, and $\overline{CA} = 6$. Its inscribed circle touches three sides at points D, E, and F. If the area of $\triangle AEF$ and $\triangle BDF$ are x and y, respectively, then $x : y = ?$’

These reflections, in Veal and MaKinster’s terms, can be considered as improvements of the connection between content knowledge and assessment, because, after reading Heron’s proof, Teacher Gamma could see the help students might receive from those proofs, and she could identify the link between the proofs and assessments of students’ knowledge about a triangle and its inscribed circle.

4. Enhancements of the connection between content knowledge and pedagogy

Another enhancement, the connection between content knowledge and pedagogy, can be observed in Teacher Beta’s reflection on Li Shanlan’s proof:

> Li Shanlan seemed to narrate [his proof] from the end, using ‘reverse reasoning’ and ‘transitional objects’…This seems to be different from proving strategies in modern texts. In them, solutions of a problem often begin with the ‘givens’, and then through several ‘transitional objects’ [that are found or created], the problem is solved. But they never explain why those transitional objects are necessary. By contrast, Li Shanlan’s proof began with the ‘result’, and then investigates what ‘transitional objects’ were necessary to achieve this result; therefore, he created and proved them. This is why he arrived at this form of solution strategy, which is actually closer to students’ natural learning curve…[Li Shanlan’s proof] looks like Confucius’ *Analects*, in which the questions and answers between the master and the pupils are used to elaborate and solve problems.

As the reader can see, in this excerpt, Teacher Beta mentions the connection between content knowledge and pedagogy, since he compared the teaching strategies among modern textbooks, Li Shanlan’s proof and the *Analects*.

5. Enhancements of the awareness to students’ possible difficulties and its connection with content knowledge

The excerpt of the reflection in the previous subsection also addresses how students’ problems can be solved after the teacher recognises them. Teacher Delta, too, mentioned how he recognised students’ difficulties after reading those proofs:

> [T]he proofs of Heron's formula…are not so natural, in both the past and the present, because whatever method you use, they are all very tricky. Heron's original proof and Mei Wending's proof require using the radius of the inscribed circle, and you even have to construct very specific lines to fit the requirement…Although Li Shanlan used proportions, he still needed the inscribed circle. And for those who do not know proportional line segments that well, it is difficult to understand Li Shanlan's proof at first glance.

Thus, reading historical proofs also help teachers understand students' difficulties, because the teachers encountered the same difficulties. Therefore, we can see there is an enhancement of the knowledge of students, and its connection with content knowledge.

6. Enhancements of the connections between content knowledge and curricula

In addition, the implicit connection between geometrical and algebraic representations also helped the teachers consider the knowledge context and different strategies for arranging teaching material. Teacher Delta said,

> In the context of senior high school mathematics, it is very natural to verify Heron's Formula with Laws of Sine and Cosine, and we can conveniently check how well students learned the two Laws. If we leave this context, then it is not easy for students to deduce Heron's Formula naturally.

He also noticed the limitation of presenting the formula in this way:

> It seems to be a conclusion for Laws of Sine and Cosine, with no further room for development.

Clearly the connections between the knowledge of context and curricula were enhanced, since Teacher Delta could compare the historical proofs with those in modern textbooks, and realised not only why the author of textbooks present this formula in the context of trigonometry, but also that the textbook proof has no other development, suggesting that using historical proofs might introduced more relevant mathematical concepts in the curriculum.

7. Enhancements of the connections among content knowledge, pedagogy, and curricula

Further understanding of the content knowledge on Heron's Formula enabled the teachers to discover that it can be used as a bridge between the trigonometry contents in junior and senior high school levels, and Teacher Gamma even developed a feasible design for teaching materials. Teacher

Gamma stated that in Taiwan, the basic area formulae of triangles and rectangles taught in elementary school mathematics, the Euclidean propositions about triangles taught in junior high school mathematics, and trigonometry taught in senior high school, are taught separately with very few connections among them. Geometrical proofs of Heron's formula, if taught in the senior high school level, could serve as a bridge linking contents in the elementary and junior high school levels (such as 1/2 × base × height, triangle congruence properties, similar shapes, inscribed circles and so on) to senior high school mathematics. Those proofs in turn will help students understand the nature and value of the algebraic Laws of Sine and Cosine in a geometrical manner. Finally, through the learning process, all triangle area formulae could be summarised with trigonometry. This shows the teacher's professional growth through this HPM approach, as well as the connections among content knowledge, pedagogy and curricula. According to Veal and MaKinster's model, these connections are vertical connections among attributes, as are several other enhancements described in the previous subsections.

According to the analysis of teachers' reflections, the reading of historical texts of mathematics can improve teachers' comprehension of the mathematical content knowledge in Heron's Formula, complementing current textbooks. Those proofs deepened the teachers' understanding of triangle area and its formulae, so they could extend their teaching material for geometry. Furthermore, they felt the convenience of algebraic methods compared to geometrical representations, which shows that they became more perceptive to the panorama of the structural context of the mathematics curriculum.

V. Concluding Remarks

All the findings echoed three special effects of integrating history in mathematics, which are brought to our attention by Jahnke (2000): the first is replacement – it allows mathematics to be seen as an intellectual activity, rather than as just a corpus of knowledge or a set of techniques; the second is reorientation – it reminds us that mathematical concepts were invented and that this did not happen all by itself; the third is cultural understanding – it invites us to place the development of mathematics in the scientific and technological context in a particular time of certain societies.

Returning to Veal and MaKinster's PCK model, we believe that the two scholars proposed a valuable model but did not explain how those attributes of PCK influenced on or were connected to one another. Our study indicated that, by reading mathematical texts, the in-service teachers came to understand the genesis of Heron's Formula and the evolution of its proofs, realising the respective virtues and difficulties of geometrical and algebraic representations. In addition, the teachers' reflections revealed that the teachers became more knowledgeable of difficulties that might arise when teaching Heron's Formula and related concepts. As for the vertical connections between their mathematics content knowledge and the top-level attributes of their PCK, we can see that in several occasions in their reflections, they demonstrated that their content knowledge on Heron's Formula and its proofs connected with the attributes of context, assessment, pedagogy, curricula, and socioculturalism. Besides, we also see that the horizontal links among the five attributes were strengthened. In other words, an in-service teacher's mathematical content knowledge and PCK might both be enhanced with an HPM approach. This finding is consistent with the results of Smestad (2011) and Clark (2011) regarding pre-service teachers. We believe that this case study serves as a beginning of a direction in research exploring more methods for enhancing the professional knowledge of in-service teachers by using an HPM approach.

A final remark is about the correlation between a teacher's PCK and her maturity of the knowledge related to HPM. Although Veal and MaKinster mentioned that for the attributes of their PCK model, the usefulness, impact, and understanding would not be fully realised or integrated until a teacher has acquired several years of classroom experience (Veal & MaKinster, 1999), teaching experiences and seniority do not hold a salient position in the model. However, in this study we did observe that a teacher's PCK and her maturity of the knowledge related to HPM may be positively correlated. The four high school teachers have at least nine years of experience; thus, none of them were novices, and they easily understood the mathematical knowledge in the proofs. However, their reflections differed. Teacher Gamma, who had the longest experience in teaching and self-learning with an HPM approach, generated more ideas on how Heron's Formula is placed in the mathematical structure of the concept of the area and in the curricular structure in current high school textbooks than other teachers did. She also elaborated more on how it could be used in her own teaching, showing more relevance in PCK. By contrast, the other three teachers, who had less experience in self-learning and applying historical ideas in mathematics teaching, did not have as many opinions on how historical proofs could be utilised in teaching or curricular designs. It would seem that a teacher's PCK and his or her maturity in HPM (i.e., experience in learning and using historical texts and concepts in mathematics teaching and learning) are positively correlated. This study provides evidence of enhancements of PCK through an HPM approach, so a teacher with more experience in teaching and self-learning with historical material may have improved his or her PCK in the same time. Further studies can be conducted on this topic.

Acknowledgement

The authors would like to thank the two anonymous reviewers for their constructive comments. However, the authors take full responsibility for the opinions expressed and the accuracy of the contents in the paper.

Reference

Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology*, *3*(1), 1-29. doi: 10.1111/j.2044-835X.1985.tb00951.x

Clark, K. (2011). Reflections and revision: Evolving conceptions of a using history course. In V. Katz & C. Tzanakis (Eds.), *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education* (pp. 211-220). Washington, DC: Mathematical Association of America. doi: 10.5948/UPO9781614443001.020

Fan, L. (2003). *A study on the development of teachers' pedagogical knowledge*. Shanghai, China: East China Normal University Press. (In Chinese)

Fauvel, J., & Gray, J. (Eds.). (1987). *The history of mathematics: A reader.* London, UK: Macmillan Education in association with the Open University.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.). (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

Jahnke, H. N. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study*. (pp. 291-328). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47220-1_9

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation: A methodology for human studies*. Newbury Park, CA: Sage. doi: 10.4135/9781412985376.n1

Katz, V., & Tzanakis, C. (Eds.). (2011), *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education*. Washington, DC: Mathematical Association of America. doi: 10.5948/UPO9781614443001

Li, S. (2002). 天算或問 [Some questions about astronomy and mathematics]. In 續修四庫全書編輯委員會 [Continued emperor's four treasuries editorial committee] (Ed.), *續修四庫全書* [*Continued emperor's four treasuries*]. Shanghai, China: 上海古籍[Shanghai Ancient Texts]. (Original work published in 1867)

Li, Z. (2005). *A concise history of mathematical education in the late Qing dynasty*. Jinan, China: Shandong Education Press. (In Chinese)

Liu, P. H. (2009). History as a platform for developing college students' epistemological beliefs of mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*(3), 473-499. doi: 10.1007/s10763-008-9127-x

Loomis, E. (1859). *Elements of plane and spherical trigonometry, with their applications to mensuration, surveying, and navigation*. New York, NY: Harper & Brothers.

Mei, W. (1993). 平三角舉要 [Elements of planar trigonometry]. In 郭書春 [Guo Shuchun] (Ed.), *中國科學技術典籍通彙：數學卷* [*Compendium of Chinese texts on science and technology: mathematics section*]. Zhengzhou, China: 河南教育[Henan Educational]. (Original work published nd)

Rho, G. (2000). 測量全義 [Complete explanation of measurements]. In 故宮博物院 [Palace Museum] (Ed.), *故宮珍本叢刊* [*Collected publication of rare books in the palace museum*]. Haikou, China: 海南[Hainan]. (Original work published in 1631)

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*, 1-22.

Smestad, B. (2011). History of mathematics for primary school teacher education or: Can you do *something* even if you can't do much? In V. Katz & C. Tzanakis (Eds.), *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education*. (pp. 201-210). Washington, DC: Mathematical Association of America. doi: 10.5948/UPO9781614443001.019

Thomaidis, Y. (2005). Two questions on historical conceptions on teaching and learning mathematics. *HPM Newsletter*, *60*, 10-12.

Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study*. (pp. 201-240). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47220-1_7

Veal, W. R., & MaKinster, J. G. (1999). Pedagogical content knowledge taxonomies [Electronic version]. *Electronic Journal of Science Education*, *3*(4). Retrieved October 1, 2005, from http://unr.edu/homepage/crowther/ejse/vealmak.html.

Yang, K. L. (2004). *Constructing a model for high school students' reading comprehension of geometrical proofs* (Unpublished doctoral dissertation). National Taiwan Normal University, Taipei. (In Chinese)