楊玲惠、翁頂升、楊德清（2015）。
發展數位教材輔助學生學習之研究—以科大學生之統計教學課程為例。
臺灣數學教育期刊，2（1），1-22。
doi: 10.6278/tjme.20140904.002

發展數位教材輔助學生學習之研究—以科大學生之統計教學課程為例

楊玲惠[1]　翁頂升[2]　楊德清[3]

[1]大同技術學院餐飲管理系

[2]國立嘉義大學企業管理學系

[3]國立嘉義大學數理教育研究所

本研究透過課程分析進行數位教材之設計與實施，改進教學歷程及評估教學成效。開發之數位教材內容以敘述統計與機率兩單元為主，以 Flash CS6 製作動畫影片，其設計理念藉由動畫帶引統計運算流程與步驟，以及正式的符號，依對應之圖形呈現統計量大小意涵與其資料分佈之特徵，強化學習者在這三者之間的串聯，讓統計思考在統計教學過程中建立，以達成資料、圖形與資訊的聯結進而訓練其批判能力。依學期初前測與期末後測之統計學習態度及統計焦慮調查，資料顯示學習者在學習過程中，在情意（affect）、價值（value）、困難感（difficulty）與認知能力（cognitive competence）四個面向有顯著提升；在統計焦慮層面，學習焦慮（learning anxiety）、考試焦慮（examination anxiety）和解讀焦慮（interpretation anxiety）下降程度具有顯著成效。根據 PLS 分析，驗證統計焦慮對統計學習態度有顯著負向之影響效果，統計學習態度對學習績效有顯著正向之影響效果；但經由教學歷程中數位教材之應用，學習者在統計焦慮與學習績效之關係而言，前測資料驗證統計焦慮對學習績效有顯著負向之影響效果，但後測資料顯示，統計焦慮對學習績效並不具負向影響效果。

關鍵詞：統計態度、統計焦慮、數位教材

通訊作者：楊玲惠，e-mail：linghuey@ms2.ttc.edu.tw
收稿：2014 年 3 月 8 日；
接受刊登：2014 年 9 月 4 日。

Journal homepage: tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=56

Yang, L. H., Weng, T. S., & Yang, D. C. (2014).
Survey of Developing Digital Multimedia Educational Materials in an Introductory Statistics Course of University of Science and Technology.
Taiwan Journal of Mathematics Education, *2*(1), 1-22.
doi: 10.6278/tjme.20140904.002

Developing Digital Multimedia Educational Materials in an Introductory Statistics Course at a University of Science and Technology

Ling-Hui Yang[1] Ting-Sheng Weng[2] Der-Ching Yang[3]

[1] Department of Food and Beverage Management, Tatung Institute of Commerce and Technology

[2] Department of Business Administration, National Chiayi University

[3] Graduate Institute of Mathematics and Science Education, National Chiayi University

This study involved developing digital multimedia materials and assessing their influence on students' attitudes and anxiety towards statistics in a statistics course at a University of Science and Technology. Digital teaching materials were developed for Descriptive Statistics and Probability courses, they featured graphical and visualization techniques to assist students in analyzing data, thinking about statistical ideas, and focusing on the interpretation of results and the understanding of concepts. We assessed students' attitudes and anxiety when they began the course and after they had completed it. Significant effects were observed in 4 attitude scales (affect, value, difficulty, and cognitive competence) and 3 anxiety scales (learning anxiety, examination anxiety, and interpretation anxiety). The difference in scores (posttest-pretest) increases in attitudes and decreases in anxiety which were attributed to using the digital multimedia educational materials. A partial least squares method was used to test the effects of students' statistics anxiety, attitudes toward statistics, and application of digital teaching materials on their achievement in an introductory statistics course. The results of the study revealed that statistics anxiety and attitudes towards statistics were the most accurate predictors of students' achievement in statistics at the beginning of the course. Nevertheless, the analysis indicated that only students' attitudes were a critical factor, directly affecting directly their achievements at the ending of the course. In addition, statistics anxiety exerted an indirect effect on the achievements in statistics by influencing the attitudes of the students towards statistics anxiety. This paper presents a discussion of the implications of these findings for teaching and learning statistics.

Keywords: attitudes towards statistics, statistics anxiety, digital teaching materials

Corresponding author：Ling-Hui Yang，e-mail：linghuey@ms2.ttc.edu.tw
Received：8 March 2014;
Accepted：4 September 2014.

壹、緒論

一、研究動機

國民核心素養的界定，逐漸成為國際上近年來關注的議題。教育部提升國民素養專案計畫報告書中提出，國民「素養」指的是重要的且能帶得走的能力與態度，每位學生都有權力獲得且必須獲得，才可以與時代、社會接軌並滿足生活上解決問題的需求。數學為目前規劃五個領域（語文、數學、科學、數位、教養）中的一項素養。而數學素養的範疇，光具備計算「數」的能力並不夠用，還需要有擷取有價值的資訊、運用邏輯、轉化為合適的模型，並作出合理的決策，甚至是溝通思維等能力。數學素養內容兼顧數學內容領域與數學歷程，其中數學內容領域包含「變化與關係、空間與形狀、數量、不確定性與數據」，數學歷程則包含「形成數學情境；應用數學概念、事實、程序以及推理；詮釋、應用以及評鑑數學結果」。針對統計教學目標而言，則與數學內容領域與數學歷程具有相近之脈絡可尋。2005 年美國統計協會（The American Statistical Association）亦認為統計素養是 21 世紀數學教育的重要核心概念。Gal（2002）指出有關成人之統計素養應包括兩個相關層面（1）可解釋與審慎評估統計資訊、相關資料論證或隨機現象的能力（2）論述或傳遞個人對統計訊息的看法，例如資訊意涵的理解、有關資訊應用之見解及對特定論述是否接受的判斷能力。

同時審視我國目前大學教育的課程規劃，以學校自主規劃為主流，技職體系教育宗旨乃以實用技能為主，強調學生畢業後能馬上投入社會與職場中；而所謂的實用指的是專業實作技能與考取相關證照，統計相關課程的開課情形普遍有越來越少的趨勢，學生缺少生活與邏輯思考的核心能力與素養，無法培養學生可獨立運作與反思性的判斷。Tishkovskaya 與 Lancaster（2012）指出在英國課程規畫中，統計課程也有邊緣化之現象，並說明統計教育在各種不同專業領域下，正面臨著教學與技術改革的根本性挑戰。傳統的教學技術存在著技術形態單一性、承載信息量低、有限功能性等問題。面對科技網絡資訊時代的挑戰，教師須在繼承與創新的前提下，並充分結合網絡時代背景下的多媒體教學技術，著力提升自己的教學技術。

二、研究目的

統計課是大學課程當中相當重要的量化課程（Watson, 1997），許多研究發現，統計課是最容易引起焦慮的一門課（Onwuegbuzie, DaRos, & Ryan, 1997），且平均而言學生在修課過程其態度通常不會有所改變或者有的甚至轉變為負面態度（Evans, 2007; Schau, 2003; Sizemore & Lewandowski, 2009）。因此如何降低學習者之學習焦慮並提昇學習態度，實為身為統計教學者一大課題。

統計教育的改革目標是改變學生的統計態度，提昇統計的教學和學習。國外學者為實現這些目標，從不同的觀點與角度進行多方研究，分為（1）教學和學習方法（2）結合科技於統計教育（3）教學和學習方法之評估三大類（Tishkovskaya & Lancaster, 2012）。同時，目前統計教學技術革新，可經由擴展的生動圖解和視覺化技術，提供有效的新方法來幫助學生探索和分析數據，並思考統計的概念，使他們能夠專注於結果的解釋和理解的概念，而不是局限於計算技巧（Chance, Ben-Zvi, Garfield, & Medina, 2007）。因此，本研究目的在開發與設計統計數位學習教材，基於「結合科技於統計教育」之理念，教材知識內容著重於透過數值與運算，以及正式的符號，連結至圖形之表徵，揭露出該組數據在時間與空間情境面向的關連性，讓統計思考在教學過程中建立，以達成資料、圖形與資訊的聯結進而訓練其批判能力。且以科大/技術學院之統計課程為教師行動研究的場域，藉由統計教學課程與數位輔助教材發展強化科大/技術學院學生對數的使用與解釋；透過教學建立的統計思考，讓學習者能將數字由抽象化變成意義化、具體化的思考模式，並落實在生活應用場域中。研究目的如下：

（一）開發與設計數位學習教材；

（二）透過數位統計課程與教學之實施，驗證能否提升學生之統計學習態度；

（三）減低學習統計課程時之統計焦慮。

貳、文獻探討

一、統計學習態度

Schau 與 Emmioğlu（2012）指出學生的學術態度對於大多數學科學習上是極為重要關鍵要素。基於教育理論與認知理論，一致認為學習態度至少與其專業知能和技能對於學習成果是一樣重要。相關研究運用於統計教學證明，學生完成統計課程時通常保有負面的態度（林曉芳、盧冠樺，2009；Onwuegbuzie, 2004），且認為統計概念不易理解並很難應用到個人專業職場與現實世界 (Hsu, Wang, & Chiu, 2008; Suanpang, Petocz, & Kalceff, 2004; Schau, & Emmioğlu, 2012)。許多研究發現，平均而言學生在修課過程其態度通常不會有所改變或者有的甚至轉變為負面態度（Evans, 2007; Schau, 2003; Sizemore & Lewandowski, 2009）。學生的學習態度對於統計思考的發展以及未來應用於課堂外日常生活知能具有重要影響（Gal & Garfield, 1997）。學習者之態度在認知成就表現上為其關鍵影響因素，Mills（2004）指出學生的統計態度會影響到學習者其學習和展現的過程。

二、統計焦慮

許多大學均將統計學納入必修課程，數量研究方法亦是研究所完成論文必具的基本分析能力。但是大部分學生對此課程心生恐懼，並認為統計課是所有課程當中，最容易引起焦慮的一

門課，且研究發現學生的統計課程有拖延修課的習慣（Onwuegbuzie et al., 1997），而研究所學生比大學部學生更有拖延學業的傾向(Onwuegbuzie, 2004)。Onwuegbuzie 等人（1997）將統計焦慮定義為當學生不論在任何時候、任何狀況接觸到有關統計的情境時，就會產生的狀態性焦慮反應。

相關研究表示，約有 80%的社會及行為科學研究生（Onwuegbuzie & Wilson, 2003）對學習統計感到焦慮，且研究指出統計焦慮已明顯的影響到商管（Zanakis & Valenzi, 1997）、心理（Lalonde & Garner, 1993）、教育學系（Fitzgerald, Jurs, & Hudson,1996; Onwuegbuzie, Slate, Paterson, Watson, & Schwartz, 2000）不同領域學生學習統計的態度、動機與學業表現（DeVaney, 2010）。統計焦慮對於學生在統計課程中的學習成就具有顯著的負向影響（Fitzgerald, 1997）。所以近年許多研究提出，如何幫助大學生克服學習數學與統計的恐懼是重要的努力議題（李永明、吳麗莎，2004；張偉，2010；畢建芝、段生貴、劉宇輝，2005），例如採用數位學習（Suanpang, Petocz, & Kalceff, 2004）、線上教學（DeVaney, 2010）、善用教師即時行為（Williams, 2010）可有效降低學生之統計學習焦慮。Onwuegbuzie 等人（2000）認為統計焦慮是學習態度的決定因素；而兩者之間亦呈顯著負相關（Finney & Schraw, 2003），同時 Lalonde 與 Gardner（1993）說明統計焦慮並不會直接影響學生在統計課堂的學習，但會影響學生的學習統計態度與動機（Williams, 2010）。

三、數位教材

數位學習是使用者透過電腦、廣播、錄音帶、網路等數位化電子資源媒體來進行學習的方式，以數位工具透過有線或無線網路，取得數位教材，進行線上或離線之學習活動。具體而言，數位學習內容整合了網路通訊、電腦與多媒體技術，從傳統教室的面對面教育方式，轉型成為運用網際網路來提供使用者不受時間和地點限制的學習環境。數位學習強調「內容、指導、學習者與科技」四種內涵之間的合宜互動與調適，在此資訊教育環境中，教師必須重新審視傳統的教材和教學內容，並整合教科書、文字、圖像、漫畫、動畫和影音錄製影片，以數位化的形式傳遞信息，並將其轉化建置成數位教材（Chen, Hsu, Lin, & Chou, 2010; Giller & Barker, 2006）。基於多媒體的基礎技術，因圖文並茂的表現提供了大型信息、互動性高、使用方便、操作簡單方便的許多優勢（Zhang & Fan, 2014）。當學生在傳統教室上課時，無法全部理解時，可以在課餘時間，透過數位學習平台來閱讀數位教材，得以重複學習。

由於科技的發展，改變教師與學生在教學與學習策略上的轉變，藉由電腦科技提供有效新方法展示圖形視覺化效果，協助學生分析數據和統計思考，使他們能夠專注於結果的解釋和理解的概念，而不是單單專注於計算。近來，數位工具是未來世界公民應具備數學素養時不能忽視的輔助工具，動畫技術領域更被視為具有發展潛力之要項（Tishkovskaya & Lancaster, 2012）。

有關統計教學方面，DeVaney（2010）研究線上教學與校內教學兩組研究生，驗證線上統計教學在學期初較容易產生高度學習焦慮與較低的學習態度，兩組學生在期末學習焦慮與學習態度的評估是相近的，然而線上教學組在期末學習焦慮明顯降低、學習態度正向提升。

四、Kano 二維品質模式

在近幾年來有關教學品質之相關研究領域上，國內外多位學者都採 Kano 二維品質模式，從顧客的觀點來分析學生對於各種教育環境軟硬體品質觀點與歸類（張旭華、呂鐀洧，2007；楊玲惠、何光明、周鉦凱，2012；劉明盛，2008；Babić-Hodović & Mehić, 2004）。本研究運用 Kano 二維品質模式，探究研究對象對於此數位教材之教育品質屬性歸類上的需求，以做為教學與教材設計改善參考依據。Kano 二維品質模式將橫軸視為品質要素之具備程度，縱軸為顧客的滿意度，利用橫軸與縱軸的相對關係，將品質屬性區分成五種品質要素的類型（1）魅力品質要素（2）一維（一元）品質要素（3）當然（必須）品質要素（4）無差異品質要素（5）反向（反轉）品質要素（圖 1）。

1.魅力品質要素（attractive quality element, A）：當品質如果具備，會讓顧客滿意度提升；反之，如果品質要素未具備時，顧客只會感到無所謂或勉強接受，並不會導致顧客的不滿意。

2.一維品質要素（one-dimensional quality element, O）：當品質要素提供愈充分 時，顧客滿意度則相對愈高；品質要素提供愈少時，顧客滿意度將會愈不滿意，換言之，此要素供應量愈多愈好。

3.當然品質要素（must-be quality element, M）：當品質要素具備時，顧客會視此品質要素為理所當然，並不會造成顧客滿意；然而一但品質要素不具備時，卻會立即造成顧客的不滿。

4.無差異品質要素（indifferent quality element, I）：無差異品質要素不論具備與否，都不會造成顧客的滿意或不滿意。品質好壞與否，對於顧客滿意度皆不會造成太大的影響，因此在降低成本的考量下，可考慮排除此要素。

5.反向品質要素（reverse quality element, R）：當具備此品質要素時會造成顧客的不滿，未具備時反而會使顧客感到滿意。此反向品質不僅浪費成本且使顧客不滿意，應不予以提供（楊玲惠、何光明、周鉦凱，2012）。

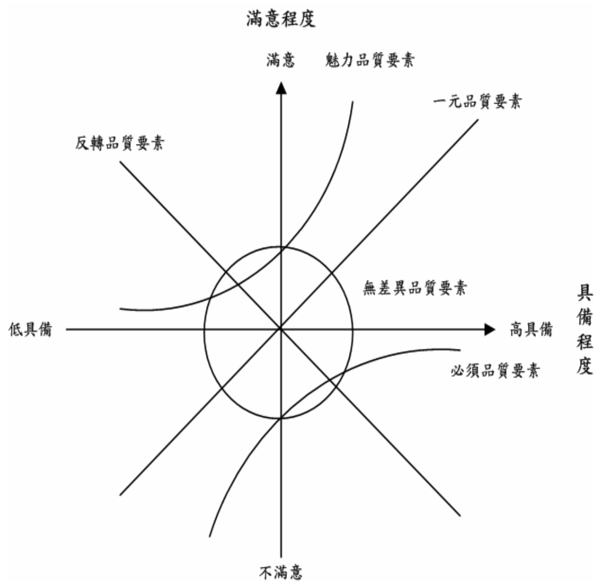


圖 1　Kano 二維品質模式示意圖

參、研究方法

本研究依據研究背景、目的與相關文獻之探討後，進行數位教材之設計與實施改進教學歷程及學習成效評估，並採問卷調查方法進行資料蒐集和驗證分析。

一、研究樣本

本研究以南部地區一所技術學院學生為研究對象，共 98 位大專生參與本研究。統計態度與統計焦慮量表施測，分別於學期初進行前測，期末最後第二週完成後測。學習成效分別於期中、期末執行測驗評估，因此四次的施測中有缺席一次即不列入分析資料，共有 68 位學生完成前後測資料填答及相關學習成效評估。

二、研究工具

本研究共有兩大主軸，一者為數位教材開發與製作，另一研究目的在檢視統計課程數位教材之實施與教學，對於學生在進入課程時期初與修課結束後學習態度與焦慮情緒的轉變及其對學習成效之影響。採用 Kano 二維品質模式進行「提供數位教材」在統計學教學品質之歸類。有關學習成效測驗題項設計內容包括：統計圖表（4 題）、統計觀念（3 題）、統計量計算（5 題），以答對題數計分。並以符號檢定檢測學習者期初、期末學習成效分佈具有顯著差異性。

（一）數位教材開發

本研究開發之數位教材內容以敘述統計與機率單元為主，以 Flash CS6 製作動畫影片，其設

計理念藉由動畫帶引統計運算流程與步驟，以及正式的符號，依對應之圖形呈現統計量大小意涵與其資料分佈之特徵，強化學習者在這三者之間的串聯，讓統計思考在教學過程中建立，以達成資料、圖形與資訊的聯結進而訓練其批判能力。有關動畫教材的部分畫面截圖如圖 2-圖 4。

（二）統計態度調查量表

因國內有關統計素養研究之對象，大多聚焦於國小、國中青少年；至於統計態度量表許多學者會採用 PISA 問卷題目對於態度之內涵進行問卷編製；然而，對於大專生方面，有關生活統計素養之研究文獻較缺乏，統計學習態度量表之建置更顯不足。但國外之統計態度的研究調查已發展較為完備，且具有良好信度與效度的統計態度量表問卷，分別以 ATS（the Attitudes Toward Statistics scale)（Wise, 1985）與 SATS（the Survey of Attitudes Toward Statistics）（Schau, Stevens, Dauphinee, & Vecchio, 1995）量表最常被採用與研究。ATS 問卷向度分為統計領域、統計課程的態度；SATS-28 之統計學習態度量表（Survey of Attitudes Toward Statistics），評量包括情意（affect）、認知能力（cognitive competence）、價值感（value）、困難感（difficulty）四個層面，SATS-36 增加興趣（interest）與努力（effort）兩個層面。Schield（2009）以大學生之統計素養與態度進行研究發現統計素養與 SATS-36 態度問卷中的「努力（effort）」層面有顯著相關；Chiesi 與 Primi（2009）亦指出學生統計學習態度量表得分與其統計表現具有顯著正相關。本研究採用 SATS-36 翻譯為中文，其內涵探討為（1）情意：個體面對統計時的感受（例如：我喜歡統計學)；（2）認知能力：個體審視自己對於統計知識與技能的感受（例如：我有能力學習統計學）；（3）價值感：個體對於統計在個人生活和職場的價值性、有用性之認定（例如：我每天生活中會使用到統計)；（4）困難感：個體對學習統計的困難度評估（例如：統計公式是容易理解）；（5）興趣：個體面對統計時的學習興趣（例如：我有興趣學習統計學）；（6）努力：個體學習統計時的努力態度（例如：我會努力用功於統計考試），量表採五點李克特氏的計分方法。

（三）統計焦慮量表

在近二十年國外的統計焦慮的研究中，經常被使用來研究評量統計焦慮的量表有 Cruise、Cash 與 Bolton（1985）編修之統計焦慮評量表（Statistical Anxiety Rating Scale, STARS），此量表總共有 51 題項六個分量表，用來測量大學生在修習統計課或做統計分析時的焦慮程度。後續 Vigil-Colet、Lorenzo-Seva 與 Condon（2008）評估統計焦慮評量表（STARS）僅有 12 題有直接關係存在，且增編 12 題，建構統計焦慮量表（Statistical Anxiety Scale, SAS），包括考試焦慮、尋求幫助焦慮和解讀焦慮。國內學者郭國禎與駱芳美（2005）根據 Cruise 等人及 Onwuegbuzie 等人（1997）統計焦慮的概念編成統計焦慮量表，測試我國大學生，將統計焦慮歸納為：對統計課的生理焦慮反應、心理焦慮反應、自在感（自信心）及對統計評量的焦慮感。本研究採用

Vigil-Colet 等人和郭國禎、駱芳美（2005，2011）量表重新修訂題項並將量表擴增為（1）學習焦慮（例如：對於閱讀一些具有統計分析的期刊文章感到困擾）;（2）考試焦慮（例如：考試時會因緊張而無法作答）;（3）尋求幫助焦慮（例如：不敢至教師辦公室問問題）;（4）解讀焦慮（例如：解釋期刊文章表單之意涵感到困擾）四個分量表，量表採五點李克特氏的計分方法。

（四）Kano 二維品質題項

Kano 二維品質模式是設計正反面題組問卷，用來瞭解學生對教育品質屬性充足時及不充足時兩種情況下的認知感受。問卷題項設計：

正向問題：在統計教學中，若**能搭配**電腦數位教材／多媒體動態教材輔助教學，您的感受如何？

（1）很不喜歡（2）勉強接受（3）沒有關係（4）理所當然（5）很喜歡

反向問題：在統計教學中，若以課堂講授，**沒有採用**電腦數位教材/多媒體動態教材輔助進行教學，您的感受如何？

（1）很不喜歡（2）勉強接受（3）沒有關係（4）理所當然（5）很喜歡

經由受測者對每個品質要素在充足時及不充足時的感受，交叉配對出五種不同的品質屬性（表 1），藉由每個品質要素得出不同二維品質屬性歸類的累計頻次，以統計上相對最高頻次的品質要素得出不同二維品質屬性歸類。若有不同二維品質特性歸類的累計頻次數相同時，判定最終二維品質特性歸類之準則為 M > O > A > I（楊玲惠、何光明、周鉦凱，2012）。

表 1

品質要素屬性判定決策矩陣（Matzler & Hinterhuber, 1998）

反向問項	品 質 屬 性 不 具 備				
顧客需求	很喜歡	理所當然	沒有關係	勉強接受	很不喜歡
很喜歡	無法判定	魅力品質	魅力品質	魅力品質	一維品質
理所當然	反向品質	無差異品質	無差異品質	無差異品質	當然品質
沒有關係	反向品質	無差異品質	無差異品質	無差異品質	當然品質
勉強接受	反向品質	無差異品質	無差異品質	無差異品質	當然品質
很不喜歡	反向品質	反向品質	反向品質	反向品質	無法判定

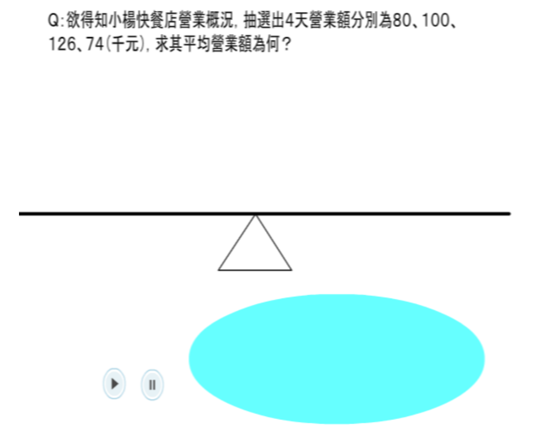
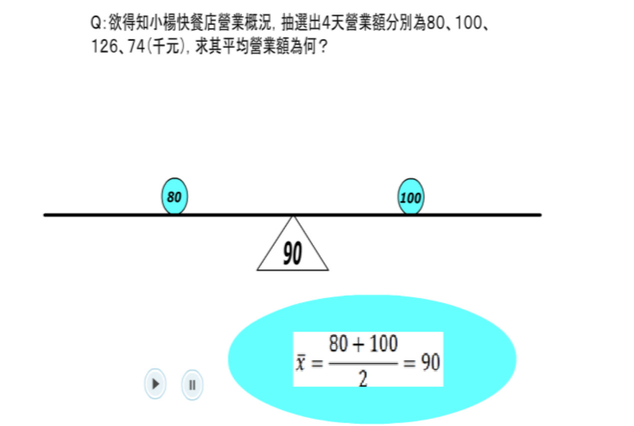
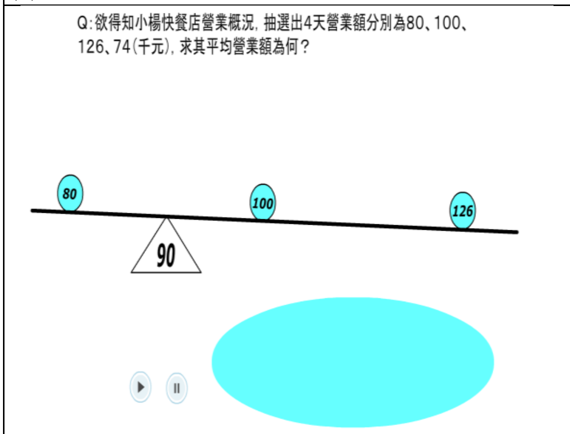
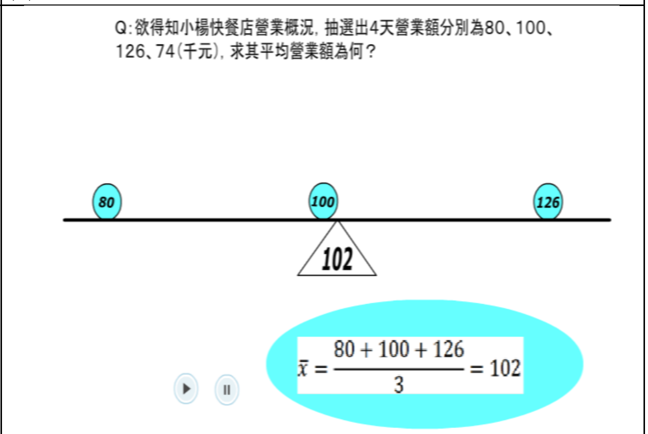
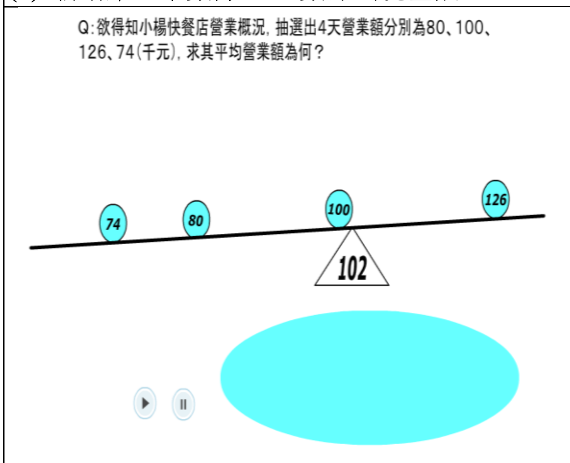
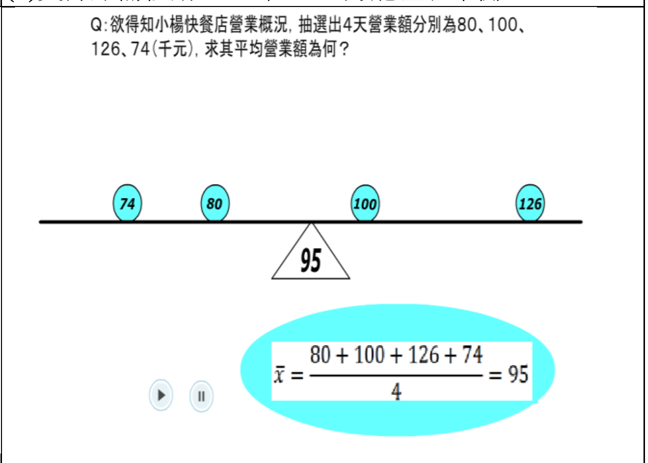
<table>
<tr><td colspan="2">(A)樣本平均數</td></tr>
<tr><td colspan="2">動畫目的：動畫呈現主要目的是找尋一個代表性的數值，決定資料的「中心點」，目的就是在描述資料之平均數即為資料的平衡中心位置。</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ex 抽選安嘉簡餐店 4 天營業額分別為：80、100、126、74 (千元)，求平均營業額為何？</td></tr>
<tr><td>(1)在數線上呈現兩筆資料 80、100 之相對位置</td><td>(2)找出平均數 90 於數線之位置，呈現左右平衡效果</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(3)新增第三筆數據 126，數線出現右傾之現象</td><td>(4)支撐點需移動至 102 位置，方能達左右平衡之現象</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(5) 新增第四筆數據 74，數線出現左傾</td><td>(6)支撐點需移動至 95 位置，方能左右平衡</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

圖 2 樣本平均數動畫截圖

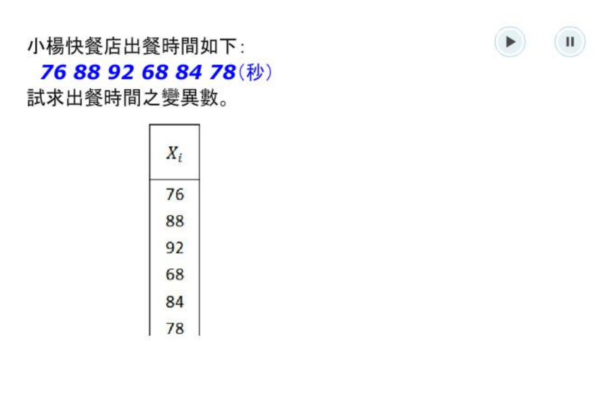
(B) 樣本變異數

動畫目的：利用動畫之視覺效果且採用表格陳列方式說明樣本變異數之計算流程。

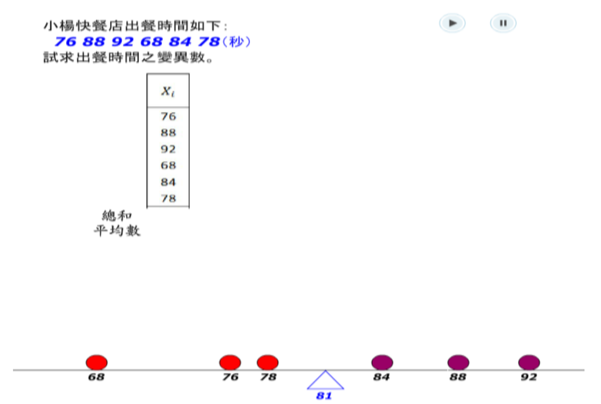
Ex 小楊快餐店出餐時間如下(單位：秒)：　76　88　92　68　84　78

試求出餐時間之樣本變異數。

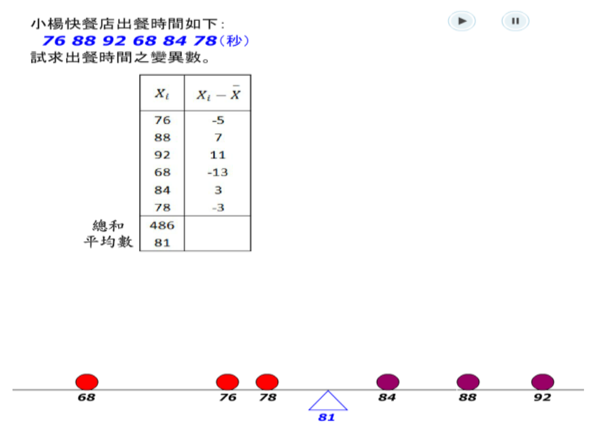
(1) 以表格列出 6 筆資料



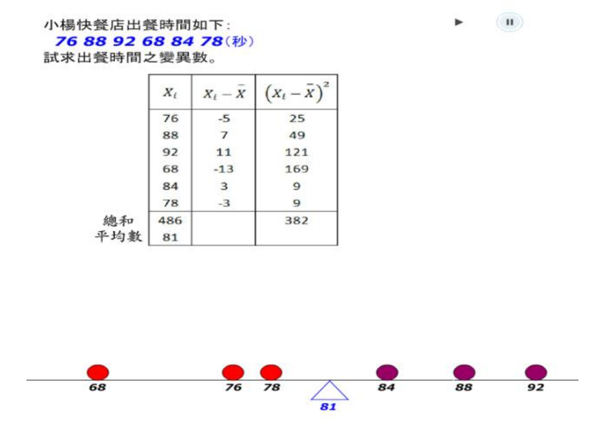
(2) 利用點圖呈現 6 筆資料之分布情形



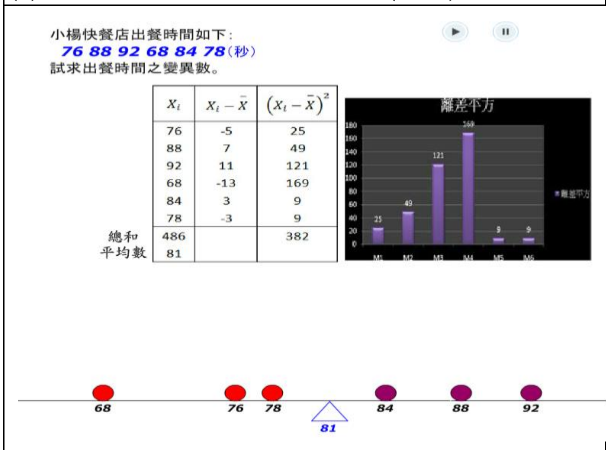
(3)利用表格計算 6 筆資料之離差



(4) 利用表格計算 6 筆資料之離差平方和



(5)可利用滑鼠點選表格呈現離差(平方)圖



(6)利用離差平方和計算樣本變異數

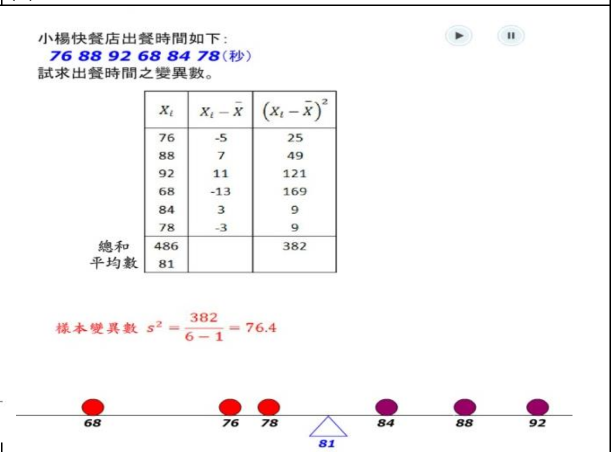


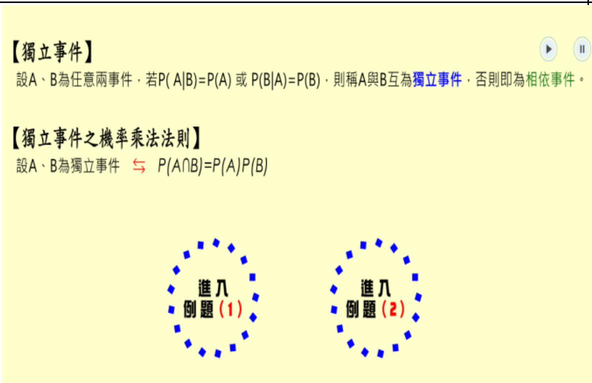
圖 3　樣本變異數動畫截圖

(C) 獨立事件乘法法則

動畫目的：利用動畫之視覺效果與獨立事件結合日常生活事件-擲筊，說明獨立事件乘法法則之適用情境。

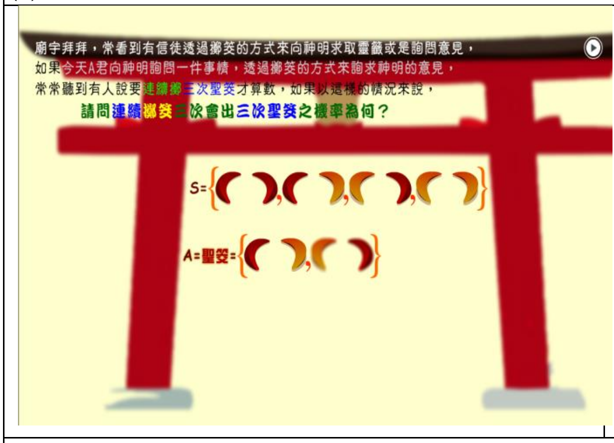
Ex 廟宇拜拜，常看到有信徒透過擲筊的方式來向神明求取靈籤或是詢問意見，如果今天 A 君透過擲筊的方式來詢求神明的意見，常常聽到有人說要連續擲筊三次聖筊才算數，如果以這樣的情況來說，請問連續擲筊三次會出三次聖筊之機率為何？

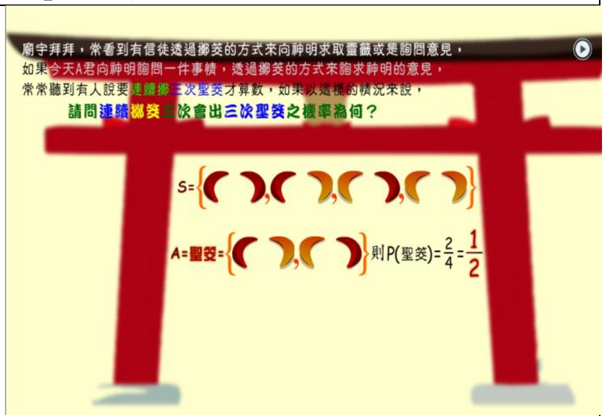
(1) 定義獨立事件及獨立事件之乘法法則



(2) 以日常生活中擲筊事件說明

(3)以動態圖像呈現樣本空間與事件，並說明出現「聖筊」之機率





(4)說明獨立事件乘法法則之適用情境

圖 4　獨立事件動畫截圖

肆、研究結果與討論

以結構方程模式對統計態度量表及統計焦慮量表進行驗證性因素分析，進一步檢驗兩份量表的建構效度與信度。

一、測量模式分析

問卷結果以 SPSS 統計軟體，進行基本資料之統計處理及分析。因本研究受限於計畫執行期間修課學生數之限制與進行四次問卷與測驗評估，因此四次的施測中有缺席一次即不列入分析資料，導致有 30 位樣本資料流失。基於部分最小平方法（Partial Least Squares; PLS）適用於小樣本資料之分析之特性（Chin, 1998），且 PLS 分析法能同時評估構念的信度和效度，並檢驗測量模型間路徑關係與強度，故採 SmartPLS 2.0 進行結構方程式模式分析，進行研究理論的測試。

由於本研究採用測量量表大都引用自國內外知名學者發表之學術期刊文章，並根據適用對象翻譯修正其問卷部分內容及用詞，故本研究所使用之項項，應存在著一定的內容效度。在建構效度方面，依 Fornell 與 Larcker（1981）建議收斂效度的三個原則，分別為個別項目的信度、組成信度（Composite Reliability; CR）和平均萃取變異量（Average Variance Extracted; AVE）。其中，個別項目的信度指標以因素負荷量應大於 .50，且達到顯著水準；組成信度則需超過 .60；以及各構面之 AVE 需大於 0.5。統計態度量表所有題項的因素負荷量介於 .52 到 .91 之間，CR 值介於 .83 到 .92 之間，各個構面的 AVE 介於 .50 到 .75 之間；統計焦慮量表題項的因素負荷量介於 .53 到 .92 之間，CR 值介於 .80 到 .93 之間，各個構面的 AVE 介於 .55 到 .78 之間。因此，本研究量表題項具有一定程度的收斂效度。

根據 PLS 分析結果之因徑係數（如圖 5、6），就潛在變數受前因變數之影響係數 R^2（前因變數對該潛在變數之解釋力）而言，發現前測資料之統計學習態度受前因變數統計焦慮之影響係數為 .211，學習成效受前因變數之影響係數為 .238；後測資料之統計學習態度受前因變數統計焦慮之影響係數為 .304，學習成效受前因變數之影響係數為 .332，由分析結果可見潛在變數間具中度解釋力。

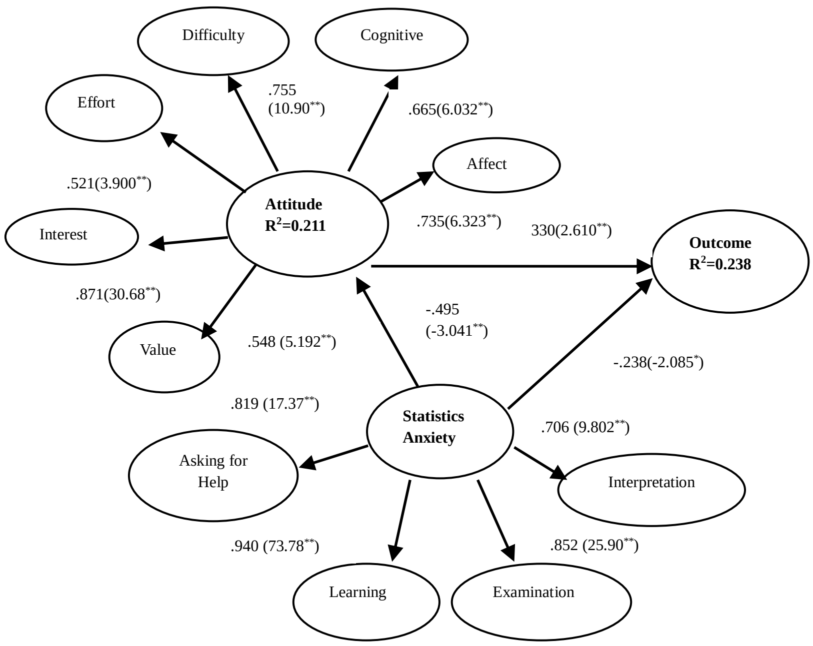


圖 5　結構模型的路徑分析（前測）

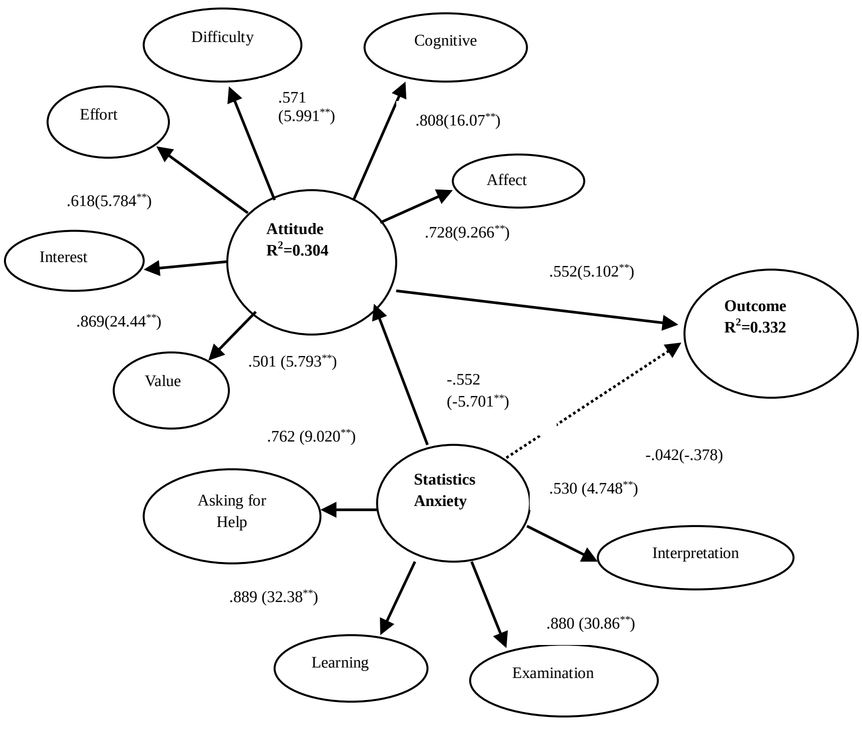


圖 6　結構模型的路徑分析（後測）

將分別就統計焦慮與統計學習態度、統計學習態度與學習成效、統計焦慮與學習成效及前後測差異性比較，分述如下：

（一）統計焦慮與統計學習態度之關係

前後測資料顯示統計焦慮對統計學習態度有顯著負向影響效果（β_{11} = -.460，t = -3.041；β_{12} = -.552，t = -5.701）。

（二）統計學習態度與學習績效之關係

統計學習態度對學習績效有顯著正向之影響效果（β_{21} = .330，t = 2.610；β_{22} = .552，t = 5.102）。

（三）統計焦慮與學習績效之關係

前測資料顯示統計焦慮對學習績效有顯著負向之影響效果（β_{31} = -.238，t = -2.085），但後測資料之統計焦慮對學習績效未達顯著影響效果（β_{32} = -.042，t = -0.378）（表 2）。

表 2

潛在變數間之標準化因徑係數與 *t* 值

	前測		後測	
	標準化係數	*t* 值	標準化係數	*t* 值
統計學習態度 -> 情意	.735	6.323**	.728	9.266**
統計學習態度 -> 認知能力	.665	6.032**	.808	16.072**
統計學習態度 -> 困難感	.755	10.900**	.571	5.991**
統計學習態度 -> 努力	.521	3.900**	.618	5.784**
統計學習態度 -> 興趣	.871	30.678**	.869	24.436**
統計學習態度 -> 價值感	.548	5.192**	.501	5.793**
統計焦慮 ->尋求幫助焦慮	.819	17.372**	.762	9.020**
統計焦慮 -> 學習焦慮	.940	73.782**	.889	32.384**
統計焦慮 -> 考試焦慮	.852	25.898**	.880	30.863**
統計焦慮 -> 解讀焦慮	.706	9.802**	.530	4.748**
統計焦慮 -> 統計學習態度(β_1)	-.460	-3.041**	-.552	-5.701**
統計學習態度 -> 學習成效(β_2)	.330	2.610*	.552	5.102**
統計焦慮 -> 學習成效(β_3)	-.238	-2.085*	-.042	-0.378

*p < .05, **p < .01

（四）前後測差異性比較

依期初前測與期末後測有關統計學習態度及統計焦慮調查，進行成對 *t* 檢定，資料顯示學習者在情意（affect）、價值（value）、困難感（difficulty）與認知能力（cognitive competence）四個面向有顯著提升；至於統計焦慮層面，在學習焦慮（learning anxiety）、考試焦慮（examination anxiety）和解讀焦慮（interpretation anxiety）下降程度具有顯著成效（表 3）。

表 3

統計學習態度與統計焦慮前後測差異性檢定

		前測	後測	配對 t 檢定 (後-前)
		M (*SD*)	*M* (*SD*)	t 值
統計學習態度	情意	2.935 (.78)	3.491 (.66)	5.922**
	努力	3.776 (.78)	3.809 (.63)	.299
	興趣	3.048 (.81)	3.118 (.85)	.682
	價值感	3.006 (.61)	3.424 (.48)	6.103**
	困難感	3.132 (.70)	3.374 (.59)	3.430**
	認知能力	2.794 (.80)	3.338 (.77)	6.008**
統計焦慮	學習焦慮	3.162 (.73)	2.875 (.75)	-3.272**
	尋求幫助焦慮	2.651 (.92)	2.493 (.74)	-1.720
	考試焦慮	3.218 (.82)	2.882 (.82)	-5.389**
	解讀焦慮	3.081 (.62)	2.790 (.51)	-4.489**

$^*p < .05$, $^{**}p < .01$

（五）學習成效差異性比較

以符號檢定進行前後測學習成效兩個配對母體分布是否相同。符號檢定時，利用兩個配對樣本的差，屬於正值或負值，轉換為正號與負號的數量（n+與 n-），以檢定兩個配對母體的分布是否相同。資料顯示學習成效以符號檢定亦驗證期初、期末學習成效分佈具有顯著差異性，同時學習成效在期末表現高於期初評估結果（表 4）。

表 4

學習成效前後測差異性檢定

學習成效	(後測) – (前測)			符號檢定
	n^-	0	n^+	$P(X \geq c) = \sum_{x=c}^{68} C_x^{68} \left(\frac{1}{2}\right)^{68}$
統計圖表（4 items）	14	12	42	.034
統計觀念（3 items）	6	18	44	.005
統計量（5 items）	3	8	57	.000
整體評估	3	5	60	.000

二、Kano 二維品質模式

經問卷調查彙整（表 5），學生認為在統計教學上，教師若能提供此設計數位教材被歸為「魅力品質」，即當此教學品質要素如果具備的話，會讓學生學習滿意度提昇；反之，如果此教學品質要素未具備時，學生只會感到無所謂或勉強接受，並不會導致學生的學習滿意降低。

表 5

Kano 二維品質要素歸納表

教學項目	Kano品質屬性歸類比重%						屬性歸類
	A	O	M	I	R	Q	
數位教材	43.2%	25.0%	6.8%	22.7%	0.0%	2.3%	魅力品質（A）

註：A: 魅力品質；O: 一維品質；M: 當然品質；I: 差異品質；R: 反向品質；Q: 無法判定

伍、結論

本研究藉由開發與設計數位學習教材，發現參與此計畫學生在學習態度方面情意、價值、困難感與認知能力有顯著提升，至於努力與興趣兩方面無法達到增進之效能。評估統計焦慮層面於學習焦慮（learning anxiety）、考試焦慮（examination anxiety）和解讀焦慮（interpretation anxiety）三方面均有明顯下降，然而尋求幫助焦慮（asking for help anxiety）仍無法有效改善。以整體研究架構而言，數位學習教材開發與教學實施，重新驗證統計焦慮會直接影響學生在統計課堂的學習態度與學業表現，經由數位學習教材的使用會減低統計焦慮直接影響學生的學業表現，此結果與 Finney 與 Schraw（2003）、Mills（2004）以及 Onwuegbuzie 等人（2000）之研究結果一致；然而，後測分析結果，統計焦慮不會直接影響學業表現，但會影響學生的學習統計態度進而間接影響學業表現。經由教師行動研究發現與相關研究同時驗證，善用具有視覺、聽覺、動覺不同型態教材，更容易帶動學生學習興趣和提昇學習成效（Uzuntiryaki, Bilgin, & Geban, 2003; Clark & Mayer, 2008）。在此研究歷程中，教學環境由一般教室轉移至電腦教室，教學中搭配數位教材與電腦軟體之操作，例如利用亂數產生器模擬隨機抽樣、繪製統計圖表等。並將數位教材上傳至學校之教學互動平台，以便學習者隨時下載重覆觀看，對於有統計學習焦慮者而言，研究顯示有明顯改善，審視其統計學習態度亦有正向提升。

Lalayants（2012）確認若教師能留意學生的焦慮情形、放慢課程教學步調與提供額外的輔導教學策略，則能降低學生對統計負面看法。Schau 與 Emmioğlu（2012）論述目前少有研究探究何種教學型態介入將會提昇學習者之學習態度，但是若學習態度已有改善時，通常都是與豐富的教學變化有關。Harlow、Burkholder 與 Morrow（2002）採用「提昇學習活動（learning enhancement activities）」，包括同儕輔導、學生課堂回饋與小群體解決問題設計等方式，驗證

此教學活動會降低學習焦慮且提昇自我效能（Schau & Emmioğlu, 2012）。Carlson 與 Winquist（2011）利用習作本教學設計讓學生在課前與課堂中閱讀並進行解決問題教學活動，在情意（affect）與認知能力（cognitive competence）有正向提升，而努力（effort）面反而降低，對於統計困難度（difficulty）認知由「有些困難」降為「沒意見」。

Kano 二維模式能提供企業經營者有效指引，揭露顧客之品質內容，進而瞭解顧客潛在需求，發掘潛在吸引力與具體改變產品成為創新研發方向指標。魅力品質即是具有魅力特質之品質需求，當此品質未彰顯時，顧客根本沒有感覺，但是隨著產品品質的提昇，客戶滿意度以指數方式增加，並且提昇幅度遠高於一維品質。換言之，魅力品質即是顧客「意想不到的品質」，並可創造顧客深度滿足。藉由 Kano 二維模式在教學品質的應用，研究顯示受測學生將數位教材的輔助教學歸納為統計教學過程中之魅力品質，且能部分提昇對統計課程之學習態度與減緩學習焦慮，意謂本研究設計之數位教材在教學歷程中具有正向之引導。

對於學習者而言，在學習歷程中本就是舊知識與新知識在知識認知結構中的不斷分化、重整、調適、成長與改變的過程（劉子鍵、林怡均，2005），當新資訊與學習者的知識結構中相關概念產生聯結時就是有意義的學習。因此，提出兩點建議：

（一）依學習者設計教材與修正教學方法

教學者若能瞭解學生學習統計學的態度與焦慮的形成原因，則可設計教材與修正教學方法來解決教學問題，一方面透過教學實務，以驗證理論；另一方面也同時透過課程研究發展與實施的過程，改進教學歷程與教學結果。

（二）善用數位工具

教育部提升國民素養專案計畫報告書提出，在數位工具日漸普及的今天，討論未來世界公民應具備的數學素養時，絕對不能忽略各種數位工具（含試算表、計算機、數學軟體、多媒體、網路、雲端等）與學習數學之間的關係。數位工具可以將數學概念視覺化、可以協助整理和分析資料、可進行正確和更有效率的計算以幫助學生探索數學概念，更聚焦於決策判斷、反思和推理等問題解決的活動。因此強化數位科技的使用能力，也就構成核心數學素養的一部份。此外，相對於統計素養養成部分，亦應加強數位工具與資訊科技融入教學理論和實務基礎，以及教師的資訊科技訓練，使其有效使用數位工具輔助教學。

教學即是個不斷修正的歷程，若我們期盼學生在學習、生活、社會與職業生涯的情境脈絡中，能辨識問題、解釋與預測各種現象，做出理性反思與判斷，並成為有效率的問題解決者，則需配合教師行動研究，透過教學過程診斷並解決教學上的問題，在進行教學過程中不斷地被評鑑與修正，同時教學成效更是必須不斷地被檢視與評估。

誌謝

研究為國科會專題計畫（NSC 101-2511-S-271-001-）之部份成果，感謝國科會之補助。

參考文獻

林曉芳、盧冠樺（2009）。統計學令研究生害怕嗎？以教育統計學的學習歷程為例。**明道學術論壇，5**（2），41-61。

郭國禎、駱芳美（2005 年 9 月）。**統計焦慮量表的編製**。論文發表於第二屆統計方法學學術研討會暨台灣統計方法學學會年會，輔仁大學，臺北。

郭國禎、駱芳美（2011）。統計焦慮量表信度與效度考驗。**輔導與諮商學報，33**（1），23-38。

張旭華、呂鑌洧（2007）。整合二維品質模式與品質機能展開應用於高等技職教育服務之實證研究。**品質學報，14**（4），405-421。

楊玲惠、何光明、周鉦凱（2012）。技術校院餐飲管理系教育品質屬性之個案研究－Kano 二維品質模式與 IPA 方法的應用分析。**技術及職業教育學報，5**（1），1-39。

劉子鍵、林怡均（2005 年 6 月）。**以概念構圖法探究高中（職）生對「相關」概念之理解及具有之迷思概念**。論文發表於 2005 年學習、教學與評量國際研討會，國立臺灣師範大學，臺北。

劉明盛（2008）。應用 Kano 模式探討大學教育品質—以某科技大學為例。**品質學報，15**（1），39-61。

李永明、吳麗莎（2004）。大學擴招後的文科高等數學教學的研究與探索。**上饒師範學院學報，24**（3），19-21。

張偉（2010）。淺談文科高等數學教學。**數學學習與研究，5**，16。

畢建芝、段生貴、劉宇輝（2005）。概率論與數理統計教學內容和課程體系的改革與實踐。**中國科技信息，16**，555。

Babić-Hodović, V., & Mehić, E. (2004). Quality dimensional analysis: A basis for marketing strategy of higher educational institutions. *Zagreb International Review of Economics and Business*, (1), 171-187.

Carlson, K. A., & Winquist, J. R. (2011). Evaluating an active learning approach to teaching introductory statistics: A classroom workbook approach. *Journal of Statistics Education*, *19*(1), 1-23.

Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J., & Medina, E. (2007). The role of technology in improving student learning of statistics. *Technology Innovations in Statistics Education Journal*, *1*(1), 1-26.

Chen, S. C., Hsu, C. W., Lin, H. C., & Chou, H. Y. (2010). The evaluation and using intention for digital teaching materials of Penghu basalt. *International Journal of Management & Information Systems* , *14*(5), 141-146.

Chiesi, F., & Primi, C. (2009). Assessing statistics attitudes among college students: Psychometric properties of the Italian version of the Survey of Attitudes toward Statistics (SATS). *Learning and Individual Differences*, *19*(2), 309-313. doi: 10.1016/j.lindif.2008.10.008

Chin, W. W. (1998). Issues and opinion on structural equation modeling. *Management Information Systems Quarterly*, *22*(1), 7-16.

Cruise, R. J., Cash, R. W., & Bolton, D. L. (1985, August). *Development and validation of an instrument to measure statistical anxiety.* Paper presented at the annual meeting of the Statistical Education Section, Chicago, IL.

Clark, R. C., & Mayer, R. E. (2008). *E-learning and the science of instruction: Proven guidelines for consumers and designers of multimedia learning* (3rd ed.). San Francisco, CA: Pfeiffer.

DeVaney, T. A. (2010). Anxiety and attitude of graduate students in on-campus vs. online statistics courses. *Journal of Statistics Education*, *18*(1), 1-15.

Evans, B. (2007). Student attitudes, conceptions, and achievement in introductory undergraduate college statistics. *The Mathematics Educator*, *17*(2), 24-30.

Finney, S. J., & Schraw, G. (2003). Self-efficacy beliefs in college statistics courses. *Contemporary Educational Psychology*, *28*(2), 161-186. doi: 10.1016/S0361-476X(02)00015-2

Fitzgerald, S. M. (1997). *The relationship between anxiety and statistics achievement: A meta analysis* (Unpublished doctoral dissertation). University of Toledo, Toledo, OH.

Fitzgerald, S. M., Jurs, S. J., & Hudson, L. M. (1996). A model predicting statistics achievement among graduate students. *College Student Journal*, 30(3), 361-366.

Fornell, C., & Larcker, D. F. (1981). Evaluating structural equation models with unobservable variables and measurement error. *Journal of Marketing Research*, *18*(1), 39-50. doi: 10.2307/3151312

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, *70*(1), 1-25. doi: 10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x

Gal, I., & Garfield, J. B. (Eds.) (1997). *The Assessment Challenge in Statistics Education*. Amsterdam, the Netherlands: IOS Press.

Giller, S., & Barker, P. (2006). An evolving methodology for managing multimedia courseware production. *Innovations in Education and Teaching International*, *43*(3), 303-312. doi: 10.1080/14703290600750879

Harlow, L. L., Burkholder, G. J., & Morrow, J. A. (2002). Evaluating attitudes, skill, and performance in a learning-enhanced quantitative methods course: A structural modeling approach. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal*, *9*(3), 413-430. doi: 10.1207/S15328007SEM0903_6

Hsu, M. K., Wang, S. W., & Chiu, K. K. S. (2008). Influence of attitude, anxiety and self-efficacy toward statistics and technology on statistical package software usage behavior. In J. Wei (Ed.), *Proceedings of the 2008 Southwest Decision Sciences Institute Annual Conference* (pp. 112-121), Houston, TX.

Lalonde, R. N., & Gardner, R. C. (1993). Statistics as a second language? A model for predicting performance in psychology students. *Canadian Journal of Behavioural Science*, *25*(1), 108-125. doi: 10.1037/h0078792

Lalayants, M. (2012). Overcoming graduate students’ negative perceptions of statistics. *Journal of Teaching in Social Work*, *32*(4), 356-375. doi: 10.1080/08841233.2012.705259

Matzler, K., & Hinterhuber, H. H. (1998). How to make product development projects more successful by integrating Kano’s model of customer satisfaction into quality function development. *Technovation*, *18*(1), 25-38. doi: 10.1016/S0166-4972(97)00072-2

Mills, J. D. (2004). Students' attitudes toward statistics: Implications for future. *College Student Journal*, 38(3), 349-361.

Onwuegbuzie, A. J. (2004). Academic procrastination and statistics anxiety. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, *29*(1), 3-19. doi: 10.1080/0260293042000160384

Onwuegbuzie, A. J., DaRos, D., & Ryan, J. M. (1997). The components of statistics anxiety: A phenomenological study. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *19*(4), 11-35.

Onwuegbuzie, A. J., Slate, J. R., Paterson, F. R. A., Watson, M. H., & Schwartz, R. A. (2000). Factors associated with achievement in educational research courses. *Research in the Schools*, *7*(1), 53-65.

Onwuegbuzie, A. J., & Wilson, V. A. (2003). Statistics anxiety: Nature, etiology, antecedents, effects and treatments -- A comprehensive review of the literature. *Teaching in Higher Education*, *8*(2), 195-209. doi:10.1080/1356251032000052447

Schau, C. (2003, August). *Students' attitudes: The "other" important outcome in statistics education.* Paper presented at the 2003 Joint Statistical Meetings, San Francisco, CA.

Schau, C., & Emmioğlu, E. (2012). Do introductory statistics courses in the United States improve students' attitudes? *Statistics Education Research Journal*, *11*(2), 86-94.

Schau, C., Stevens, J., Dauphinee, T. L., & Del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the survey of attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, *55*(5), 868-875. doi: 10.1177/0013164495055005022

Schield, M. (2009). Assessing statistical literacy and attitudes following a second course of business statistics. Retrieved from http://www.StatLit.org/pdf/2009PhelpsASA6up.pdf

Sizemore, O. J., & Lewandowski, G. W. (2009). Learning might not equal liking: Research methods course changes knowledge but not attitudes. *Teaching of Psychology*, *36*(2), 90-95. doi: 10.1080/00986280902739727

Suanpang, P., Petocz, P., & Kalceff, W. (2004). Student attitudes to learning business statistics: Comparison of online and traditional methods. *Educational Technology & Society*, *7*(3), 9-20.

Tishkovskaya, S., & Lancaster, G. A. (2012). Statistical education in the 21st century: A review of challenges, teaching innovations and strategies for reform. *Journal of Statistics Education*, *20*(2), 1-56.

Uzuntiryaki, E., Bilgin, I., & Geban, O. (2003). *The effect of learning styles on high school students' achievement and attitudes in chemistry*. Paper presented at the Annual Meeting of the National Association for Research in Science Teaching, Philadelphia, PA (ERIC Document Reproduction Service No. ED 475 483).

Vigil-Colet, A., Lorenzo-Seva, U., & Condon, L. (2008). Development and validation of the statistical anxiety scale. *Psicothema*, *20*(1), 174-180.

Watson, J. M. (1997). Assessing statistical thinking using the media. In I. Gal & J. B. Garfield (Eds.), The *assessment challenge in statistics education* (pp. 107-121). Amsterdam, the Netherlands: IOS Press.

Williams, A. S. (2010). Statistics anxiety and instructor immediacy. *Journal of Statistics Education*, *18*(2), 1-18.

Wise, S. L. (1985). The development and validation of a scale measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, *45*, 401-405.

Zanakis, S. H., & Valenzi, E. R. (1997). Student anxiety and attitudes in business statistics. *Journal of Education for Business*, *73*(1), 10-16. doi:10.1080/08832329709601608

Zhang, Z., & Fan, L. (2014). Research on negative influence and strategies of multimedia education in universities. In T. Shaw (Ed.), *Proceedings of the 2014 International Conference on Education Reform and Modern Management (ERMM 2014)* (pp. 165-168), Phuket, Thailand: Atlantis Press. doi:10.2991/ermm-14.2014.46

劉宣谷（2015）。
數學創造力的文獻回顧與探究。
臺灣數學教育期刊，2（1），23-40。
doi: 10.6278/tjme.2050313.002

數學創造力的文獻回顧與探究

劉宣谷

國立臺北教育大學數學暨資訊教育學系

數學創造力的描述至今尚未明確，本文將從四個不同的觀點回顧數學創造力。數學創造產出的新穎與一般創造力無中生有的新穎性不同，且數學創造力的「新穎」並非全然的無中生有而是將重點放在舊知識的「再結合」。使用創造力量表測量學童的創造力可能窄化了創造力的豐富內涵，部分學者改以「多元解題」的方法分析數學上的創造力指標。從創造力階段理論學童在數學創造的醞釀過程中藉由重組過去的知識與比對題目的條件，在反覆的組合和比對的過程中對學童對於舊知識產生新的認識。創造力的貢獻分為歷史上和心理上的貢獻，學校層次的研究焦點在國小孩童是否具備「心理上的數學創造力」。數學知識與數學創造力同等重要，提供學童發散性思考和連結舊經驗的環境有助於提升學童的數學創造力。

關鍵詞：創造力指標、創造力階段理論、創造貢獻、數學創造力

通訊作者：劉宣谷，e-mail：hkliu.ntue@gmail.com
收稿：2014 年 8 月 8 日；
接受刊登：2015 年 3 月 13 日。

Journal homepage: tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=56

Liu, H. K. (2015).
A survey and discussion of mathematical creativity.
Taiwan Journal of Mathematics Education, 2(1), 23-40.
doi: 10.6278/tjme.20150313.002

Survey and Discussion of Mathematical Creativity

Hsuan-Ku Liu
Department of Mathematics and Information Education, National Taipei University of Education

Specific descriptions of mathematical creativity have not been proposed. This article reviews mathematical creativity from four aspects: products, indicators, processes, and contributions. A description of novelty in mathematical creativity is different from that of original creativity; novelty focuses on the recombination of “old” knowledge in mathematical creativity. The use of creativity tests for measuring creativity indicators may lead the field into a narrow and limited conception of creativity. Recently, scholars have begun to use the multiple-solution task to analyze indicators of mathematical creativity. Regarding creative processes, students recombine mathematical knowledge and compare the recombinations by using the requirements of problems during the incubation period. Through these recombination processes, students obtain new understanding regarding the old knowledge. Creative contributions exist in two forms: historical creativity and psychological creativity. At the school level, the concept of psychological creativity has been adapted for researching the mathematical creativity of elementary school students. Mathematical knowledge and mathematical creativity are both critical. Fostering an environment that encourages divergent thinking and connects to related mathematical knowledge assists in nurturing a student’s mathematical creativity abilities.

Keywords: creative indicator, creative process, creative contribution, mathematical creativity

Corresponding author：Hsuan-Ku Liu，e-mail：hkliu.ntue@gmail.com
Received：8 August 2014;
Accepted：13 March 2015.

壹、前言

創造力的論述約略可分為幾個大的面向：（1）從產出（product）的方向發展，認為產出必須具備新穎性（novelty）和意義性（meaningful）（Jackson & Messick, 1965; Romey, 1970）；（2）或者從創造貢獻的角度認為創造產出可分為尋常的創造（ordinary creativity）或非尋常的創造（extraordinary creativity）（Kaufman & Beghetto, 2009），尋常和非尋常最大的差異在創造者對於領域版圖的變化是否顯著（significant）；（3）也有學者從過程（process）的角度討論，認為創造過程包含四個階段—準備期、醞釀期、頓悟期和驗證期（Wallas, 1926）；（4）從創造力指標的方向認為創造者須具備流暢性（fluency）、變通性（flexibility）、原創性（originality）和精緻性（elaboration）等四個指標（Guilford, 1950; Torrance, 1962）。至今對於創造力的定義仍不存在一體適用的看法。

反思數學是什麼，早期多數的學者認為數學的定義可以分為三個型式：邏輯論者（logicist）、直觀論者（intuitionist）和形式論者（formalist），邏輯論者使用符號邏輯證明數學的概念、敘述和原理；直觀論者主張數學是建構數學物件的心智活動；形式論者認為數學是形式系統的科學（science of formal system），其中形式系統是如何由符號（symbol）和記號（token）組成公式或規則（rules）所形成的集合。近年來多數的學者開始從樣式（pattern）的角度思考數學，樣式是具有重複性與延伸性的物件，多數的數學家同意數學是探究樣式的科學（science of pattern），也就是數學家尋找樣式並使用樣式形成新的概念或假說，近年來樣式覺察已是數學教育的重要目標之一。從數學的意涵我們或許可以概略的說提出新（new）的符號或利用已知的樣式組成新的樣式是創造力在數學範疇上的展現。然而「數學創造力」是「創造力」討論的特定（specific）領域，討論數學創造力的內含必須同時包含「創造力」與「數學」兩個向度；換言之數學創造力是討論數學範疇上的創造力。但創造力本身的內涵不存在一體適用的描述，目前多數學者對於數學創造力仍未存在適當定義（Haylock, 1987; Mann, 2005; Nadjafikhah, Yaftian, & Bakhshalizadeh, 2012; Sriraman, 2005）。

近年來國內數學上的創造力研究儼然成為數學教育學門的重要議題之一。然而國內學者對於數學創造力的研究約略可分為三個方向。（1）探究數學創造力與數學成就間的關係，如蕭佳純（2002）指出國小學童內在動機、數理知識和提升創造利意向對創造力表現產生直接正向的影像效果；但對於學科知識較豐富的學生，教師強調創造力意向的創造力教學行為對創造力表現的加乘效果並不如學科知識較差的學生，探究原因可能跟學科知識較豐富的學生較重視學科的學習成就有關。（2）探究資優學生在數學創造力上的表現，如魏明通（1994）使用托弄思創造力測驗對數學資優班學生和普通班學生進行比較，發現數學資優班學生在流暢性、變通性和

創造性的表現均優於普通班學生。（3）發展數學創造力測驗工具和創造力指標或評量的發展，如陳李綢（2006）以史騰柏格的創造三面模式理論發展國小高年級學童的數學創造力診斷與認知歷程分析工具。

然而國內以探究數學創造力內涵為主題的研究至今仍鮮少發現。研究人員對於數學創造力的了解與掌握決定上述課程規劃與創造力評量的設計目標，對於新進的研究人員多在分散的論述中尋找和學習適合的數學創造力內涵，在浸淫時間不足的情況下常難以窺其全貌甚至迷失在亂無章法的論述中。因此為數學創造力研究提出俱整合性的文獻回顧論文將可帶領新進的研究者快速窺視數學創造力的樣貌；同時也可透過整合性的交流與分享充實國內學者對於數學創造力的認知更加的紮實，甚至發展出屬於國內的不同想法。

多數的學者依然延續一般創造力的定義討論數學創造力，因此數學創造力的描述約略也可從產出、貢獻、過程和指標等不同方向論述；Vygotsky 認為數學的創造產出是發展數學新知識的重要機制之一（引自 Leikin, 2009），其發展的基本將重點放在符號、規則或樣式的產出，Spraker 認為數學創造力是為了解決數學問題而產生原始和適用的解決方案（引自 Haylock, 1987）。從創造貢獻的程度討論數學創造力可分成專家層次（professional level）和學校層次（school level）（Shviki, 2010）；「專家層次」的數學創造力是有原創性的產出顯著推廣知識的版圖（Shviki, 2010），只有在工作領域留下歷史的成果的偉大貢獻者才稱為具有數學上的創造力（Usiskin, 2000），因此探討專家層次的數學創造力研究主要是針對數學的研究人員。反之，探討「學校層次」數學創造力主要放在學童是否具備「心理上的數學創造力」（psychological mathematical creativity），也就是學生對於解出數學問題時其切入題目的角度與觀點能否提出過去未曾看過的「新」（new）想法，當面臨過去未曾接觸過的數學情境或數學問題時，能「適當」（adapted）改變已知的數學工具或將已知的數學工具用在過去截然不同的數學情境上（Usiskin, 2000）。Hadamard 和 Poincaré 均強調數學的創造過程與創造性思維的認知能力或心智活動有關，他們在數學創造過程的討論沿用完形模型（gestalt model）（引自 Sriraman, 2005, p. 26）認為創造過程的四個階段依然存在於數學問題解決的過程中（Skemp, 1971）；也就是創造者在「準備」階段將數學問題做完整的分析與討論，並從過去的經驗中尋找與問題相關的知識，當過去的經驗無法正確找出問題的解答則進入「醞釀」階段等待「頓悟」的發生（Haylock, 1987）。心理學家則從創造個人的角度出發認為創造力是人類智能行為的成份之一，提出測量創造者的創造力的指標（Guilford, 1950; Torrance, 1962）；然而創造力測驗可能把研究者個人對創造力的窄化觀點呈現於量表之中限制了創造力研究的範疇（Sternberg & Lubart, 1991, 1995, 1996），近年來部分學者改以多元解題的方式觀察學童在數學創造力指標的表現情形（Leikin, 2007; Leikin, Levav-Waynberg, Gurevich, & Mednikov, 2006; Levav-Waynberg & Leikin, 2012）。

本文延續創造力探究的發展過程先從「產品」的角度討論何謂創造產出，再討論創造產出的貢獻程度和創造產出的發展過程，接著從「個人」的方向討論觀察創造者數學創造力的創造力指標，最後以如何提升創造者的數學創造力作為全文的結尾。因此本文的第貳節探究數學創造力的新穎性和實用性，第參節說明數學創造的貢獻，第肆節說明數學創造力階段理論，第伍節說明數學創造力指標，第陸節討論經由結論與建議討論數學創造力與數學教學的關連性。

貳、數學創造的新穎性和實用性

一、創造力的新穎性與實用性

創造力研究的發展從產出（product）的探究到創造個體的討論，再到個體受環境的影響，最後開始發展個體和環境間的互動關係，逐漸形成完整的體系。早期的研究大多探討何種的產出可被稱為具創造性（creative），如牛津字典的解釋是「具備製造新事物尤其是藝術工作上的能力或技能」（having the skill and ability to produce something new, especially a work of art）。依隨創造是無中生有的字義，多數的學者均同意創造產出必須是新穎（novelty）或原創的（original），然而隨著創造的目的性，創造的產出被附予了實用性（useful）、適用性（appropriate）或意義性（meaningful），也就是創造產出必須針對真實的問題或目標作出貢獻，從實用性和適用性（adaptive）觀點定義創造力時，又將其定義為「產生意想不到、原有的行為的能力，而其行為是有用且合適的」或「製造具實用性和適用性的非預期或原創工作的能力」。如 Romey（1970）認為創造力是結合想法、事物、技巧或新途徑的能力；Jackson 與 Messick（1965）認為合適性是判斷一個有創造力成果的重要評斷。許多成果中，多樣和獨到的見解可以被判定為有創意的，只有根據明確的標準確認想法在問題的情境中是適當的。所以綜觀上述學者所提及，創造力為結合過去的想法、事物、技巧，而聯想出一些新的事物的表現，而此事物是新穎且有用的，並且無法透過機械的方法來實現。Hausman（1984）認為創造性產品與舊有產品間會有一種突破。在一般創造力中常認為新穎性是無法用既有知識加以綜合或分析出來的創造性產品。須完全獨立於創造者的知識或舊經驗發展出來的。Vygotsky（1984）認為創造力是發展新知識的重要機制之一了。

二、數學創造力的新穎性

至今新穎和實用已經是學者討論創造產出時的共同核心標準，若數學創造力是討論數學問題或數學情境時的創造產出或創造成果。數學創造力的定義或許不能脫離創造力的核心標準，因此多數的學者從數學的角度重新詮釋創造產出的新穎性和實用性。Spraker 認為數學創造力是為了解決數學問題而產生原始或不尋常、適用解決方案的能力（引自 Haylock, 1987）。Romey

（1970）定義數學創造力為數學思想、技術或新途徑的結合。在一般的創造力常認為所謂的新穎是無法用舊知識綜合出來的創造性產出，但在數學創造力中學者的論述的「新穎」並非全然的無中生有，而是將重點放在舊經驗的「再結合」（recombination），或者是將不同的想法（idea）加以合成（combination）；這樣的合成通常是非常多的但只有極少數的合成是有用的（useful）（Poincaré, 1952）。Ervynck（1991）認為數學創造是透過合成創造有用的數學概念或發現不同數學觀點下未知的關連性，同時數學創造在數學知識的提升扮演重要的角色。若數學創造力是舊知識或已知樣式的再結合，某種程度隱含創造者若具備較多的舊經驗再重新組合時則擁有較多可供選擇的合成元素，因此從事數學工作的創造者需要較多的時間學習數學的舊知識。相同的論述與創造力的「十年法則」（Gardner, 1993）和具高度數學創造力的個人必具備高度的數學才能（Usiskin, 2000）不謀而合。

三、數學創造力的實用性

數學創造力討論數學上的創造力，也就是在發現或解決一個過去未曾的遇見的數學問題，因此數學創造產出的實用性在於其產出能否解決當前的數學問題。故 Laycock 認為數學創造力是從不同的觀點（perspective）分析問題的能力和選擇適當的方法處理不尋常的數學情境（引自 Idris & Nor, 2010）。Poincaré（1952）認為數學上的發現（discover）在尋找有用合成的過程中會建構大量合成，之後有用的合成將從那些無用的合成中脫穎而出。換句話說，數學創造可以被看成是形成（forming）、再認知（recognizing）和尋找有用的合成，這樣的合成將連結兩個不同的數學知識結構的關聯性，擴大數學的知識版圖。Chamberlin 與 Moon（2005）將學生的數學創造力定義為「產生新穎實用的解決方案和以數學方法去解決虛擬或真實的應用問題的能力」。運用過去的經驗或已學過的數學知識基模為基礎，將遇到的問題或題目以創新的方式加以解決，而其解決問題之方法並非單一而固定的。定義中的實用性經常是能解決一個數學問題，也就是數學的創造者能否為數學問題（或真實世界的問題）提出過去未曾看過的數學解答的能力。在「尋找新解答」的論述下發展尋找不同的問題解決能力能提升學童數學想法的多樣性和解決問題的實用性，已經成為目前培養學生數學創造力的方法之一了。

參、數學創造的貢獻

Kaufman 與 Beghetto（2009）認為創造的貢獻可區分成尋常的創造（ordinary creativity）和非尋常的創造（extra ordinary creativity）兩個不同的層次。Shriki（2010）亦認為數學創造力應分成專家層次（professional level）和學校層次（school level）。其中專家層次應是能製造原創性的工作顯著的推廣知識版圖；而學校層次的定義是對於給定的題目能提供不尋常（unusual）、新

穎（novel）或具洞察力（insightful）的解答；又或者是對於舊的問題能從新的角度加以認知（Sriraman, 2004）。

一、專家層次的數學創造貢獻

「非尋常的創造」是創造者提出的創造造成學門知識範疇的推廣，所提出的創造產出將被記錄到領域中，且在特定的情境下無法透過意向也不能透過機械的方法來實現。Boden（1996）將歷史上從未出現過的創造產出的價值和實用稱為「歷史上的創造力」（historically creativity），也就是個人的創造產出在創新上獲得社會或歷史上的認同。Usiskin（2000）將數學才能區分成八個層次，其中第五級是具有取得數學博士學位能力的專家，第六級是能經常發表數學研究成果的人員，而第七級則是曾經獲得費爾茲獎殊榮的研究學者。學者們獲獎的理由在於為學門的知識領域開創嶄新的道路，也因為他們的貢獻使得學們的知識版圖得以更佳的開拓。因此 Usiskin 認為只有第七級的人員才具有數學創造力，也就是只有極少數的數學專家可以被稱為具備數學創造力。第七級的研究人員開拓數學知識範疇的新邊界，其所創造的理論將被寫入數學領域的瀰母，並記錄於數學史的分頁之中，因此只有極少數的數學家可被稱為具備非尋常的數學創造力（extraordinary mathematical creativity）或歷史上的數學創造力（historically mathematical creativity）。

二、學校層次的數學創造貢獻

為了使得生活更加的便利或舒適，我們經常將生活中的物品透過相關的聯想作適合的改變，這樣的改變在學門的領域中可能本來已經存在，而創造者並未看過或者所提出的改變並不足以改變學門的知識範疇，其所發生的創造則屬於尋常的創造。對於尋常的創造相關的聯想是可以被預測的；Boden（1996）將新穎的條件稱為「心理上的創造力」（psychological creativity），也就是個人為了解決生活上或工作上的問題或困難提出創造者之前並未看過相似成果的創造產出，但其創造產出可能已經存在於學門的領域中，因此「心理上的創造力」在領域上未必具有實質的意義或價值。

國小學童提出的數學解題過程較難推廣數學學門領域的知識版圖，探究國小學童解題的「歷史上的創造力」可能難以觀察到對應的指標。因此在教育上的創造力研究可將數學創造力描述的焦點放在國小孩童是否具備「心理上的數學創造力」（psychological mathematical creativity）的能力。數學資優生對於一道數學題目有時會有許多中想法，來自於其切入題目的角度與觀點；也就是學童能否為了解出數學問題提出過去未曾看過的「新」方法。Usiskin（2000）認為數學才能在第三級或第四級的學童面臨過去未曾接觸過的數學情境或數學問題時，能適當改變已知的數學工具或將已知的數學工具用在過去截然不同的數學情境上。具備數創造力的學生經常出

現在第三級或第四級中，建議教師可嘗試使用鷹架理論協助學童朝第五級的層級邁進。Laycock 認為具有創意的數學是在一個給定問題進行許多方面的分析，透過不尋常的方法觀察其相似性與差異性的能力（引自 Idris & Nor, 2010）。Leikin 與 Lev（2013）認為數學資優生相較於一般生具備好的洞察力，解決數學問題的成功率也較高。故若要探究國小資優數學創造力，可了解資優學童出現許多中間的過程與想法。有數學創造力的學生大多能夠提出擴大和深化原來的數學問題，以及用多種方式解決面對的數學問題。

Bishop 認為數學創造性思維需要數學上兩個非常不同的互補思維方式，分別為「直覺」與「邏輯」來分析思考，又或者說數學創造工作需要同時具備「發散思考」和「聚斂思考」的能力，透過發散思考尋找「新穎」的創造產出和透過聚斂思考驗證創造產出的「實用性」（引自 Helsinki, 1997）；俱創意的人才重視發散思考的能力，其對不同數學概念的連結是富有想像力和超出邏輯思考的，這是創造思考中需要的能力並做為作為創造過程的一部分；也就是當遇到未曾經歷的數學問題時，能連結多個看似不相關的知識或經驗解決陌生的數學問題。如證明實數是不可數無限集合 Georg Cantor，他將 0 和 1 之間的數以不尋常的方式列出需要高度的「發散思考」的能力，但演繹和推論證明的正確性時卻需要高度的「聚斂思考」能力。

肆、數學創造力階段理論

一、創造發生的四個階段

除了分析創造力的產出是否具備流暢、變通、原創和精緻等特性，完形（gestalt）模型認為，創造的過程分成四個階段：準備、醞釀、頓悟和驗證（Wallas, 1926）；準備期是創造者進行創造工作的前置階段，創造者從領域（domain）的知識庫中學習創造所需的專門知識，並使用習得的知識和能力處理俱創造性的問題。創造者須使用聚斂思考模式和邏輯性的方法分析眼前的問題，比對創造者的專業技能是否足以處理，從學習專業技能到接觸領域知識版圖的邊界，到發現足以突破邊界的問題少則數年多則數十年。如前所述的十年法則，創造者在提出具歷史意義的創造產出，大多已經過長期的準備期。當創造者面對問題並發現本身的專業技能無法尋找出問題的解答，創造者將暫時停止尋找解答，同時進入所謂的醞釀期。第三階段頓悟經常是瞬時的反應，創造者經常在從事沒有關聯性的活動或問題時，原問題的解答卻突然浮現於腦海中。最後階段，創造者重新面對問題並嘗試驗證頓悟的解答是否正確。根據心向理論創造者可擱置問題，等待問題沉澱於長期記憶中後解答浮現的機率較常時期面對問題要高，此外 Dodds、Ward 與 Smith（2004）建議較長的準備期提供較高的醞釀效果。

二、數學創造過程的四個階段

Hadamard 和 Poincaré 在數學創造過程的討論沿用完形模型（引自 Sriraman, 2005, p. 26），也就是在創造思考的過程數學家們認為在問題解決的數學創造思考過程依然存在準備、醞釀、頓悟和驗證四個階段（Skemp, 1971）。Haylock（1987）認為「準備階段」是將所面對問題做完整性和意識性的分析與討論，嘗試了解題目的論述與附帶的所有條件，在此時期創造者將過去的經驗中尋找與問題相關的知識，創造力的張力觀認為舊經驗可能僵化創造者的思維模式，當舊經驗無法正確找出問題的解答是則進入「醞釀階段」。

對於創造性成就而言，準備期（沉寂時期）是創造發生的必要投資，在一個學門或領域長久浸淫是必要條件；創造性成就的發生需要的時間遠超過只是學習領域入門知識所需的時間（Hayes, 1989）。在準備階段孩子能否得到一個進入現場的機會是創造力的另一個重要面向（Csikszentmihalyi, 1999），在許多領域中孩子盡早接受專家訓練是不可或缺的（Bloom, 1985）。

醞釀期可以有效的提升學生的創造思考能力（Sriraman, 2004, 2005），數學教育家將醞釀期融入教室活動中，例如透過教室內的對話或發表（Barnes, 2000）和延長問題導向學習（problem-based learning）的時間（Sriraman, 2003）以提升學生的創造思考能力。從問題解決的觀點多數的學者建議提升學生挑戰困難題目的經驗（Sriraman, 2008, 2009; Stillman et al., 2009），部分的學者採用多元解題（multiple-solution task）的教學方式（Leikin, 2007; Leikin et al., 2006; Levav-Waynberg & Leikin, 2012），其目的均在使得學生有更長的醞釀階段連結不同的數學觀念。近年來更有相當多研究認為醞釀期在創造性解題（creative problem solving）中扮演關鍵的角色（Sio & Ormerod, 2009; Vul & Pashler, 2007）。瞭解醞釀期在創造過程扮演的角色有助於對提升創造力設計更有效果的工作，尤其在教室學習或工作環境安排或規劃上（Vul & Pashler, 2007）。從研究者觀察國小學童的解題經驗發覺學童面對非例行性問題時，其醞釀過程並非全然無意識的，而是反覆重組過去的舊經驗，並嘗試比對與題目所提供的條件是否吻合。縱使最後未能尋找出合適的解法，但在反覆的組合和比對的過程中，研究者認為學童對舊的知識和經驗應有更深入的再認識，此觀察結果與 Sio 與 Ormerod（2009）的實證結果認為醞釀其是培養洞察思考的關鍵有相同的看法。

三、數學的頓悟

從醞釀到頓悟的過程是如何發生的，依然是創造力研究中非常熱門的議題之一。目前為止，有多個理論探討頓悟發生過程（Dodds et al., 2003; Sio & Ormerod, 2009），如不適當心向遺忘理論（forgetting of inappropriate mental theory）和遠距連結理論（remote association theory）。不適當心向遺忘理論是在準備期的階段創造者對問題做出本身並不存在的錯誤假設或限制，在醞釀期時創造者可嘗試忽略相關的錯誤假設擴大問題可能的解答，使得創造者更容易在可能的解答

中尋找到適合的解法；然而遠距連結理論是創造者在面臨新的問題時，與問題相似的舊問題的立即浮現在腦海中，對新問題並不適當的舊解法限制創造者的思維空間，創造者唯有忽略或捨棄舊有的相似解法才能創造出新的產出。Amabile（1989）建議創造者在面臨問題時可嘗試打破心向（breaking set）、突破腳本（breaking out of scripts）和重新感知（perceive freshly）三個方法探詢問題的解答，此外醞釀期也可能不是用意識性的思考而是用潛意識思考問題，所以有頓悟的現象（Weisberg, 1999）。頓悟階段是突然了解解決問題的關鍵所在，答案突然閃現於腦海中。驗證階段則重新回到意識思考的方式，檢驗所求得的答案是正確，並重新尋找答案適當的表達方式。

從實驗的過程中建議頓悟的發生經常來自創造者將問題放置並將焦點轉移到其他的問題（Morgan & Forster, 1999; Sriraman, Haavold, & Lee, 2013）。心理學家提出醞釀期克服心智疲勞的假設，也就是心智經過長時期的狂熱和緊張的工作需要一段時間的休息克服疲憊感。這段時間的放鬆容易產生新的見解。個人在面對問題解決情境時，一旦得到特定的解法後，很容易僵化或盲目的使用舊方法到新問題上，卻忽略而容易的解答。

伍、數學創造力指標

一、數學創造力指標

創造力研究受到心理學家的注意，開始將目標轉移到創造者的狀態和發展，甚至開始思考創造力是否如同智力是種與生俱來的特質，將創造力定義為「個體產生一些新的及不可預測的事物的表現」更進一步的認為創造力是人類智能（intelligent）行為的核心成分之一。心理學家從事創造力研究的核心想法在探究創造者如何（how）產生創造、如何測量（measure）創造者是否具有創造力，或如何使得創造者產生創造力。為了瞭解創造者的創造力，Guilford（1950）與 Torrance（1962）等學者均以流暢性（fluency）、變通性（flexibility）、原創性（originality）和精緻性（elaboration）為創造力的四個核心，用來測量個體是否具備創造力。目前為止，此四個核心指標已經是學者發展創造力量表的核心架構之一。

Hollands（1972）延用創造力的概念重新定義四個指標的數學創造力上的意涵：「流暢性」是在短時間內所生產的許多想法的能力，思維的流暢性提升從事數學領域的問題的想法；「變通性」是能使用不同的方法或建議的能力思維的變通性有利於產生高度不尋常類型的情境；「原創性」是能提出不尋常的或新穎的方法的能力，原創性意指在數學領域上有不尋常的反應，人們可以發現非顯而易見的甚至可能是無關性的解決方案。「精緻性」是將所得到的結果加以延伸或改善。流暢性和變通性必須具備靈活的思維或發散性思考的能力。在數學創造力的研究中多位學者依然採用此指標作為發展數學創造力量表的核心，如 Dunn 與 Maxwell 使用流暢度作為測

量因子（引自 Lee, Hwang, & Seo, 2003）；使用的變通性作為測量因子（Krutetskii, 1976）；同時使用流暢性和獨創性作為測量因子（Mainville, 1972）。最後 Evans、 Song 與 Zosa 等三位學者均同時使用流暢性，變通性和獨創性作為測量因子（引自 Lee, Hwang, & Seo, 2003）。此外 Pitta-Pantazi、Sophocleous 與 Christou（2013）研究認知型態和數學創造力指標的相關性，他將學童的認知型態分成空間的（spatial）、實體的（object）和口語的（verbal）三種。發現空間的認知型態與數學的流暢性、變通性和原創性指標為正相關，實體的認知型態和數學的原創性指標為負相關，口語的認知型態和數學的變通性為負相關。另外他認為不同的認知型態面對數學創造力課題時會採取不同的策略。

Feldman（1999）引述 Sternberg 與 Lubart（1995, 1996）的結論認為創造力測驗是把「研究者」對於創造力的觀點呈現於量表中，所測得的結果可能錯把影子當成實體，甚至窄化了創造力研究的範疇或忽略了創造力的豐富內涵：

> *Preoccupation with testing for creativity as if it were a trait analogous to intelligence led the field into a narrow and limited conception of creativity. In the effort to operationalize variables and gain experimental control over them, extreme simplification of what is meant by creativity was tolerated. One of the consequences of the tendency to restrict creativity to a set of ability like fluency, flexibility, and originality was an impoverished conception of development. Development in the psychometric context meant strengthening existing abilities or teaching abilities to those lacking in them.* (Feldman, 1999, p. 169)

對於使用創造力量表測量學童的創造力是否提升，並非真實的瞭解學童的數學創造力，而是測量出研究者認為俱創造力學童可能的部分行為或反應，是否真實提升學童的數學創造力仍有待進一步的探究和討論。

二、創造力的新指標－目的與持續時間

Gruber 與 Wallace（1999）認為產生許多想法的能力和產生少數上乘想法的能力未必關聯性。在經歷數十年努力後，具有高創造力的人與具有高發散思考能力的證明依然薄弱（Barron & Harrington, 1981）。從 Gardner（1993）對七位具創造力的工作者（包含愛因斯坦、畢卡索、史特拉汶斯基、艾略特、瑪莎葛蘭姆和甘地）的研究中指出要完成一件達到世界聞名的豐功偉業至少都要十年的耕耘與努力不懈。現在 Gardner 的成果被稱為創造力的「十年法則」，也就是為了確保創造力以更有效的形式發展出來，應先精通某一個領域為準備，而這個準備期的關鍵期間大約要花費十年之久（Feldman, 1999）。

為此 Gruber 與 Wallace（1999）為創造力的定義加入兩個新的標準「目的」（purpose）和「持續時間」（duration），也就是創造產出是某種目的的結果和創造者持續很長的時間從事創造產出。他們為目的和持續時間下了這樣的註解：

> *The criterion of duration gives special meaning to the criterion of purpose, extending creative work over time and capturing the notion of a creative life. To life a creative life is one of the intentions of the creative person.* (Gruber & Wallace, 1999, p. 94)

Gruber 與 Wallace（1999）從傑出的創造者的生活觀察，無論創造者的領域有何差異，創造者們均熱愛自己的工作，並且全心全意的投入達到廢寢忘食的程度。當工作活動的挑戰性配合個體的問題解決能力水準時，容易達到這種高度內在動機的狀態（Csikszentmihalyi & Csikszentmihalyi, 1988）。目前多數的學者均同意提升創造者的內在動機有助於創造力的發展（Amabile, 1996; Sternberg & Lubart, 1995）。

若創造者從事創造工作只為了外來的讚賞、名聲或金錢等外在因素，則稱為創造力的外在動機，部分的研究者認為創造者過度在意外來的刺激，則會干擾創造者的注意力並損傷其內在動機（Amabile, 1996; Collins & Amabile, 1999），對創造者的創造力造成傷害。若學生參加比賽只為了獲得獎賞，在沒有競爭時便失去學習的興趣，這類學生的學習就是倚靠外在動機的學習，當外在動機消失後便失去學習的動力，非常不利於對學童在相關領域中創造力的發展。因此在教育的過程中，教學者宜嘗試引起學童的好奇心和意義感，多鼓勵學童探索學習領域，在學童能力所及的範圍內提供學童挑戰自己創造題目的機會，讓學童感受到學習的樂趣和成就感培養內在動機，更應避免契約性的獎賞破壞學生的內在動機，使得學生將學習當作是獲得獎賞的工作（詹志禹，2002）。藉由多位學者的論述作者認為研究者在從事數學創造力的教育研究時，除了尋找數學創造力指標或發展數學創造力量表外，協助創造者能長時間投入於數學問題的思考，使得創造者能持續投入更多的時間在創造過程中的準備的階段，對於提升創造者的數學創造力可能有較高的成果。

三、思考彈性與多元解題

然而部分的研究指出「發散思考」（divergent thinking）的能力和創造力中的流暢性或變通性有高度的關聯性，甚至認為發散思考的人具有較高的創造力（Chamberlin & Moon, 2005）。在解決問題的過程中靈活的結合已知的想法和過去學習的知識是提出創新途徑解決問題的關鍵，因此靈活的思維是提升創造力重要的能力之一。「心智過程的彈性」是指能打破僵化思考的能力，具數學創造力的學生心智通常不受固定解題方法的限制，能自由的切換到不同的思維角度。

數學才能較高的學童通常較俱備靈活處理數學問題的能力，能不受固定形式的約束使用俱創造性的解題方式，且擁有將所學推廣到未曾面對過的數學問題的能力。思維的彈性在數學領域中十分重要，數學資優生經常俱備自由跳離直線思考的過程和輕易轉換正反面思維的能力（Krutetskii, 1976）。因此提升學童變換不同角度思考和解讀問題的能力，有助於提升學童的數學思維的彈性和數學創造力中的變通性。

多元解題（multiple-solution task）是要求學生採用不同方法解決一個數學問題，為了避開使用創造力量表測量可能造成的偏誤，部分學者利用多元解題的分析探討數學創造力的變通性和靈活性。Leikin 等人（2006）針對職前數學教師及高中生進行幾何課程的多元解題與創造力發展的研究，用解決方法數量表示數學創造力中的變通性，用解決方法之間的差異來分析數學創造力中的靈活性。Leikin（2007）認為以不同角度解決問題的方法變成思考的習慣，對於創造性思維的養成有高度的助益。研究結果指出經過多元解題的訓練是可以提高解題的正確性、流暢性及靈活性。Levav-Waynberg 與 Leikin（2012）針對 330 個學生進行多元解題的研究結果指出透過多元解題的課程能提升學童的數學創造力中的流暢性和變通性，因此多元解題的課程環境比傳統學習環境提供更大的機會展示及激發學生的創造力（郭明采，2014）。

陸、結論與建議－數學創造力與數學教學

在數學教師的專業訓練與學生面對聯考的升學壓力下，教學上多務求正確與嚴謹。要求學生的作答過程必須經過縝密「聚斂思考」的過程，更要求學生細心寫下每個證明的步驟，其評量的方式在驗證學生證明過程的邏輯推理是否環環相扣，達成做工精細的美麗數學作品。從數學系畢業的數學教師更害怕被扣上教學不夠嚴謹的評論，在每次的教學過程中均將每個步驟細心寫下供學生抄習。因此我們經常發現數學科的教學現場常是教師一個人唱獨腳戲，將整黑板由左至右滿滿寫完，彷彿形成一幅美麗的藝術作品，而學生的筆記本更是一頁接著一頁努力紀錄。在數學殿堂中嚴謹是非常重要的，每個偉大的數學作品都需要經過反覆嚴謹的論證才能成就現今的輝煌的價值，因此多數的數學教師在課堂上多強調聚斂思考和邏輯性思維的重要性，要求學生的作品滿足創造力指標中的「精緻性」。

研究者認為雖然被放入數學領域的瀰母（meme）都是精緻化後的產出，但數學知識版圖的推廣並非始於精緻，而是終於精緻。臨摹大師的畫作能提升自己繪畫的技術，因此學藝術的科班經常將臨摹當成自我訓練的基本工。但藝術的價值更重要的是作品本身的創造性，過度的模仿使得藝術家失去自我的特色。數學的價值亦是如此，現今的數學教學現場教師太過琢磨於臨摹大師的創作成就，在觀察與發現的階段卻略顯不足，使得學生對數學認識僅停留在記憶、邏輯與推理的階段；因此學生對數學美感的欣賞僅停留在技法上的嚴謹與困難，卻失去數學美感

中最重要的發現與創造。

相當多的研究建議「再認識」問題是提升問題解決創意的基礎能力（Kim, 2009）。Brinkmann（2004）提出如果我們希望學生明白數學的美我們應該利用數學題目中的的複雜性（complexity），使學生體驗到數學中發現的感受（the aesthetic feeling of discovering）不應僅止於展現數學的簡單（simple）。Peressini 與 Knuth（2000）建議培養創造價值的數學工作應鼓勵學生採取循序漸進的系列方法求解，嘗試引導學生觀察顯著的數學概念，要求學生檢視自己的論證和提供思考學生開放性的問題。Cropley（引自張雨霖、陳學志與徐芝君，2010）指出：

> 在教學環境中培育學生創造力的教師應具備九項行為特徵：（1）鼓勵學生獨立學習。（2）採取合作形式的教學。（3）鼓勵學生精熟基本知識，培養擴散思考的知識基礎。（4）延緩判斷學生的觀念。（5）鼓勵彈性思考。（6）鼓勵學生自我評鑑。（7）慎重處理學生提問與建議。（8）提供學生接觸各種材料和不同情境的機會。（9）協助學生因應挫折，培養嘗新、接受不平凡的勇氣。（p. 154-155）

從數學創造力的角度思考，教師應提供學生適當的題目引導學生學習、探索、建構概念和假設、檢驗、論證、採用策略和說明與檢驗結論的機會。同時教師應該協助學生發現（discover）數學知識並引導學生將新的知識應用到不同的數學環境使學生對數學概念能產生頓悟的感受。Neumann（2007）認為培育數學創造力的有效環境是提供互動的環境（interactive environment）；透過和其他正在處理相同問題的工作者交換自己的新想法（new idea）能使創造者對自己的新想法有更多不同的認知。關於培養思維的變通性可透過多元解題的教學方式，將同一道問題提出多種解決問題的方法；具有變通性的學童，經常會有令人驚奇的解法。

數學創造力建構在數學知識的基礎下，在建立適當的數學知識前，提升數學基本能力的過程依然不宜偏廢，以建立學童創造性思考時使用的工具。在國小學童的數學發展過程中，數學基本能力（如記憶力、計算能力和邏輯能力）和數學創造力（如創新能力、連結能力和轉換能力）如同數學能力的兩個樑柱，兩者同時發展才能發展數學才能。缺乏數學基本能力則無法在已知的知識下撰寫與眾不同的解題過程或發展高度抽象性的數學模型；反之過度強化學生數學知識的記憶過程或數學計算能力的精熟程度則關閉了學生學習彈性思考的重要過程，因此數學知識與數學創造力兩者應同時兼顧。在教學的過程應依照學童的數學能力給予不同的課程內容，在學生習得足夠的數學知識後提供具創造性的思考環境，引導學童透過「再思考」來「連結」相關的數學知識，同時提升學童的數學創造力和數學知識的深入認識。

參考文獻

張雨霖、陳學志、徐芝君（2010）。教師創造力信念、創造力教學自我效能對創造力教學行為之影響。**復興崗學報**，**99**，151-172。

郭明采（2014）。**從多元解題觀察國小數學資優生在幾何方面的創造力流暢性及變通性**（未出版碩士論文）。國立臺北教育大學，臺北市。

陳李綢（2006）。國小數學創造力診斷與認知歷程工具研發。**教育心理學報**，**38**（1），1-17。doi: 10.6251/BEP.20060503

蕭佳純（2002）。國小學生內在動機、學科知識與創造力表現關聯之研究：教師創造力教學的調節效果。**特殊教育研究學刊**，**37**(3)，89-113。doi: 10.6172/BSE201211.3703004

詹志禹（2002）。影響創造力的相關因素—從小學教育環境與脈絡來考量。**學生輔導**，**79**，32-47。

魏明通（1994）。高級中學數學與科學資優學生創造力研究。**師大學報**，**39**，525-544。

Amabile, T. M. (1989). *Growing up creativity: Nurturing a lifetime of creativity*. New York, NY: Crown.

Amabile, T. M. (1996). *Creativity in context: Update to the social psychology of creativity*. Boulder, CO: Westview Press.

Barnes, M. (2000). ‘Magical’ moments in mathematics: Insights into the process of coming to know. *For the Learning of Mathematics*, *20*(1), 33-43.

Barron, F. X., & Harrington, D. M. (1981). Creativity, intelligence and personality. *Annual Review of Psychology*, *32*, 439-476. doi: 10.1146/annurev.ps.32.020181.002255

Bloom, B. S. (Ed.). (1985). *Development talent in young people*. New York, NY: Ballantine.

Boden, M. A. (Ed.). (1996). *Dimension of creativity*. Cambridge, MA: MIT Press.

Brinkmann, A. (2004, July). *The experience of mathematical beauty*. Paper presented at *the 10th International Congress of Mathematics Education* Roskilde, Denmark.

Chamberlin, S. A., & Moon, S. M. (2005). Model-eliciting activities as a tool to develop and identify creatively gifted mathematicians. *Journal of Secondary Gifted Education*, 17(1), 37-47.

Collins, M. A., & Amabile, T. M. (1999). Motivation and Creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 297-312). Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511807916.017

Cropley, A. J. (1997). Fostering creativity in the classroom: General principles. In M. A. Runco. (Ed.), *The creativity research handbook* (Vol. 1, pp. 83-114). Cresskill, NJ: Hampton Press.

Csikszentmihalyi, M. (1996). *Creativity: Flow and the psychological of discovery and invention*. New York, NY: HarperCollins.

Csikszentmihalyi, M. (1999). Implications of a systems perspective for the study of creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 313-336). Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511807916.018

Csikszentmihalyi, M., & Csikszentmihalyi, I. S. (Eds.). (1988). *Optimal experience: Psychological studies of flow in consciousness*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511621956

Dodds, A. Rebecca, Ward, B. Thomas, & Smith, M. Steven (2004). A Review of Experimental Research on Incubation in Problem Solving and Creativity. Texas A&M University. Retrieved January 30, 2015, from http://ecologylab.net/research/publications/DoddsSmithWardChapter.pdf

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42-53). Dodrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/0-306-47203-1_3

Feldman, D. H. (1999). The development of creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 169-186). Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511807916.011

Gardner, H. (1993). *Creating minds: An anatomy of creativity seen through the lives of Freud, Einstein, Picasso, Stravinsky, Eliot, Graham, and Gandhi*. New York, NY: Basic Books.

Gruber, H. E., & Wallace, D. B. (1999). The case study method and evolving systems approach for understanding unique creative people at work. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 93-115). Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511807916.007

Guilford, J. P. (1950). Creativity. *American Psychologist*, *5*(9), 444-454. doi: 10.1037/h0063487

Hausman, C. R. (1984). *A discourse on novelty and creativity*. Albany, NY: State University of New York Press.

Hayes, J. R. (1989). Cognitive processes in creativity. In J. A. Glover, R. R. Ronning, & C. R. Reynolds (Eds.), *Handbook of creativity* (pp. 135-145). New York, NY: Plenum Press. doi: 10.1007/978-1-4757-5356-1_7

Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school children. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(1), 59-74. doi: 10.1007/BF00367914

Helsinki, E. P. (1997). The state-of-art in mathematical creativity. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *29*(3), 63-67. doi: 10.1007/s11858-997-0001-z

Hollands, R. (1972). Educational technology: Aims and objectives in teaching mathematics. *Mathematics in School*, *1(6)*, 22-23.

Idris, N., & Mohd Nor, N. (2010). Mathematical creativity: Usage of technology. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *2*(2), 1963-1967. doi:10.1016/j.sbspro.2010.03.264

Jackson, P. W., & Messick, S. (1965). The person, the product, and the response: Conceptual problems in the assessment of creativity≒. *Journal of Personality*, *33*(3), 309-329. doi: 10.1111/j.1467-6494.1965.tb01389.x

Kaufman, J. C., & Beghetto, R. A. (2009). Beyond big and little: The four c model of creativity. *Review of General Psychology*, *13*(1), 1-12. doi: 10.1037/a0013688

Kim, K. H. (2009). Creative problem solving. In B. Kerr (Ed.), *Encyclopedia of giftedness, creativity and talent* (Vol. 1, pp. 188-191). Thousand Oaks, CA: Sage. doi: 10.4135/9781412971959.n88

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children* (J. Kilpatrick & I. Wirzup, Eds.; J. Teller, Trans.). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Lee, K. S., Hwang D. J., Seo, J. J. (2003). A development of the test for mathematical creative problem solving ability. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D:*

Research in Mathematical Education, *7*(3), 163-189.

Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2330-2339). Larnaca, Cyprus: University of Cyprus.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 129-145). Rotterdam, The Netherlands: Sense.

Leikin, R., & Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: What makes the difference? *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *45*, 183-197. doi: 10.1007/s11858-012-0460-8

Leikin, R., Levav-Waynberg, A., Gurevich, I., & Mednikov, L. (2006). Implementation of multiple solution connecting tasks: Do students' attitudes support teachers' reluctance? *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *28*(1). Retrieved from http://www.thefreelibrary.com/Implementation+of+multiple+solution+connecting+tasks%3a+do+students%27...-a0151379485

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2012). The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(1), 73-90. doi: 10.1016/j.jmathb.2011.11.001

Mann, E. L. (2005). *Mathematical Creativity and School Mathematics: Indicators of Mathematical Creativity in Middle School Students* (Unpublished doctoral dissertation). University of Connecticut, Storrs, CT.

Morgan, S., & Forster, L. (1999). Creativity in the classroom. *Gifted Educational International*, *14*(1), 29-43. doi: 10.1177/026142949901400105

Nadjafikhah, M., Yaftian, N., & Bakhshalizadeh, S. (2012). Mathematical creativity: Some definitions and characteristics. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *31*, 285-291. doi: 10.1016/j.sbspro.2011.12.056

Neumann, C. J. (2007). Fostering creativity: A model for developing a culture of collective creativity in science. *EMBO Reports*, *8*(3), 202-206. doi: 10.1038/sj.embor.7400913

Peressini, D., & Knuth, E. (2000). The role of tasks in developing communities of mathematical inquiry. *Teaching Children Mathematics*, *6*(6), 391-396.

Pitta-Pantazi, D., Sophocleous, P., & Christou, C. (2013). Spatial visualizers, object visualizers and verbalizers: their mathematical creative abilities. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *45*, 199-213. doi: 10.1007/s11858-012-0475-1

Poincaré, H. (1952). *Science and method* (F. Maitland Trans.). Mineola, NY: Dover.

Romey, W. D. (1970). What is your creativity quotient? *School Science and Mathematics*, *70*(1), 3-8. doi: 10.1111/j.1949-8594.1970.tb08557.x

Shriki, A. (2010). Working like real mathematicians: Developing prospective teachers' awareness of mathematical creativity through generating new concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(2), 159-179. doi: 10.1007/s10649-009-9212-2

Sio, U. N., & Ormerod, T. C. (2009). Does incubation enhance problem solving? A meta-analytic review. *Psychological Bulletin*, *135*(1), 94-120. doi: 10.1037/a0014212

Skemp, R. R. (1971). *The psychology of learning mathematics*. Baltimore, MD: Penguin Books.

Sriraman, B. (2003). Can mathematical discovery fill the existential void? The use of conjecture, proof and refutation in a high school classroom (feature article). *Mathematics in School*, *32*(2), 2-6.

Sriraman, B. (2004). The characteristics of mathematical creativity. *The Mathematics Educator*, *14*(1), 19-34.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *Journal of Secondary Gifted Education*, *17*(1), 20-36. doi: 10.4219/jsge-2005-389

Sriraman, B. (Ed.). (2008). Creativity, giftedness, and talent development in mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *41*(1-2), 13-27. doi: 10.1007/s11858-008-0114-z

Sriraman, B., Haavold, P., & Lee, K. (2013). Mathematical creativity and giftedness: A commentary on and review of theory, new operational views, and ways forward. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *45*(2), 215-225. doi: 10.1007/s11858-013-0494-6

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (1991). An investment theory of creativity and its development. *Human Development*, *34*(1), 1-31. doi: 10.1159/000277029

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (1995). *Defying the crowd: Cultivating creativity in a culture of conformity*. New York, NY: Free Press.

Sternberg, R. J., & Lubart, T. I. (1996). Investing in creativity. *American Psychologist*, *51*(7), 677-688. doi: 10.1037/0003-066X.51.7.677

Stillman, G., Cheung, K. C., Mason, R., Sheffield, L., Sriraman, B., & Ueno, K. (2009). Challenging mathematics: Classroom practices. In E. J. Barbeau & P. J. Taylor (Eds.), *Challenging mathematics in and beyond the classroom: The 16th ICMI Study* (pp. 243-283). New York, NY: Springer.

Torrance, E. P. (1962). *Guiding creative talent*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Usiskin, Z. (2000). The development into the mathematically talented. *Journal of Secondary Gifted Education*, *11*(3), 152-162. doi:10.4219/jsge-2000-623

Vul, E., & Pashler, H. (2007). Incubation benefits only after people have been misdirected. *Memory & Cognition*, *35*(4), 701-710. doi: 10.3758/BF03193308

Vygotsky, L. S. (1984). Imagination and creativity in adolescent. In R. W. Rieber (Ed.), The collected works of L. S. Vygotsky: Vol. 5, child psychology. (pp. 151-166). New York, NY: Springer.

Wallas, G. (1926). *The art of thought*. New York, NY: Harcourt Brace.

Weisberg, R. W. (1999). Creativity and knowledge: a challenge of theories. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 226-250). Cambridge, UK: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511807916.014

黃俊瑋（2015）。
和算關流分式符號表徵的發展、過渡與概念意義。
臺灣數學教育期刊，2（1），41-68。
doi: 10.6278/tjme.20150313.001

和算關流分式符號表徵的發展、過渡與概念意義

黃俊瑋
國立臺灣師範大學數學系

本研究考察江戶時期重要關流和算家的著作，分析從傍書法發展、過渡至點竄符號系統的過程中，和算家用以表示分式的表徵與符號，並探討相關特色與概念上的意義。研究中發現，分式表徵的發展過程中，共出現了五種表示分式的方式：1.以文字記錄乘除法操作、2.分開記錄被除式與除式、3.將除法運算記於「｜」右邊、4.將除法運算記於「｜」左邊、5.籌式符號「｜」的左右側皆為式或數，左側作為分母、右側作為分子，此分式形成一個數學物件，並可對其執行運算與操作。和算的分式表徵與符號的發展，主要從具程序與操作特色的文字敘述與除法，過渡至數學物件「分式」，即操作性的程序面向先於結構性的物件面向。特別地，分式表徵與符號的發展歷程並非線性，出現了多元的表徵方式，且和算家在分式表徵的使用上，也反應出數學概念具有「程序─物件」二元性並存的特色。而本文釐清了和算家在分式符號使用上的流變，對於判定文本作者、抄寫者或者成書時期，可以當成一項重要的依據。

關鍵詞：分式、和算、符號發展、數學史、點竄

通訊作者：黃俊瑋，e-mail：austin1119@gmail.com
收稿：2014 年 7 月 31 日；
接受刊登：2015 年 3 月 13 日。

Journal homepage: tame.tw/forum.php?mod=forumdisplay&fid=56

Huang, J. W. (2015).
The Development, Transition and Conceptual Meanings of the Symbolic Representations about Fractions in the Seki School of Wasan.
Taiwan Journal of Mathematics Education, 2(1), 41-68.
doi: 10.6278/tjme.20150313.001

The Development, Transition and Conceptual Meanings of the Dymbolic Representations about Fractions in the Seki School of *Wasan*

Jyun-Wei Huang
Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

In this paper, I investigate the contents of the important texts by authors in the Seki school in the Japan's Edo period and analyze the symbolic representations of fractions that *Wasan* mathematicians used in the process of the development and transition from *Bōshohō* (傍書法) to *tenzan* (點竄), and their related conceptual meanings. Through the analysis, I find that there are five different ways used to represent fractions in the process of the development of symbolic representations: 1.recording the division operation by words; 2.recording the divisor and the dividend separately; 3. recording the division operation on the right hand side of '|'; 4. recording the division operation on the left hand side of '|'; 5. the left hand side and right hand side of '|' being both numbers or rod expressions, where the left hand side indicates the denominator and the right the numerator. By this way, the fraction becomes a mathematical object which can be operated and manipulated. The symbolic representations of the fraction are developed and transited, from the rhetorical mathematical expressions and the kind of division with procedural and operational features, to the structural mathematical object "fraction", and thus the operational process precedes the structural object. In particular, the development of the symbols of the fraction is not linear, and multiple representations emerged during the process. The symbols of the fraction that *Wasan* mathematicians used reveal the duality of mathematical conceptions. Finally, the clarification of the development and the shift about the symbols of the fraction used by the *Wasan* mathematicians turns into an important evidence for modern scholars to determine the author, scriber and the date of a text.

Keywords: fraction, *Wasan*, development of symbols, history of mathematics, *tenzan*

Corresponding author：Jyun-Wei Huang，e-mail：austin1119@gmail.com
Received：31 July 2014;
Accepted：13 March 2015.

壹、前言

中國傳統天元術隨朱世傑《算學啟蒙》傳日後，[1]經江戶時期日本和算家的吸收與推廣，逐漸發展出新的符號系統。首先，關孝和（Seki Takakazu，?-1708）創立了傍書法，得以表示出多元高次多項式，除了突破中算天元術乃至四元術的限制，也使得十七世紀和算家得以解決各類涉及高次方程組的難題或代數式幾何問題。傍書法之符號系統可表示出兩式的和、差與積，但無法表示出兩式之商。

因此，到了十七世紀末期，日本數學家可以處理下列代數方程式，例如 Chikara（1999）所舉的例子：

$$a-bx+cx^2-dx^3=0\text{ 與 }3y^3+5xy^2-8x^2y+4x^3=0$$

分別可以表示成下列的型式：[2]

<table>
<tr><td>$\mid$</td><td>甲</td><td></td><td>$\mid$</td><td>甲再
三</td></tr>
<tr><td>$\nmid$</td><td>乙</td><td></td><td>$\mid$</td><td>甲巾
五</td></tr>
<tr><td>$\mid$</td><td>丙</td><td></td><td>$\nmid$</td><td>甲
八</td></tr>
<tr><td>$\nmid$</td><td>丁</td><td></td><td>$\mid$</td><td>四</td></tr>
</table>

後來，經十八世紀關流和算家的發展，松永良弼（Matsunaga Yoshisuke，?-1744）進一步發展出更具一般性、可表示出分式與分數的新符號系統－點竄。後來，經由有馬賴徸（Arima Yoriyuki，1714-1783）所編刊刻的《拾璣算法》一書，當時關流祕傳的「點竄」定則方公諸於世。

上述關孝和所發明傍書法、松永良弼推廣至點竄、有馬賴徸《拾璣算法》公佈點竄的歷程是過去數學史界的共識。再者，可以處理兩式或數之商，以及分式符號的發明，是點竄比諸傍書法最大的差異與突破。然而，就過去研究與相關論述來看，數學史家們偏重於傍書法與點竄這兩套符號的「成品」，對於十七世紀關孝和所發明的傍書法，如何演變進而發展出十八世紀和算家所使用的點竄符號系統，並無太多著墨。特別是和算家對於分式表徵和符號的發展、過渡與變革，以及當時數學家對於分式符號的使用情況，是本研究中深感興趣的問題：和算家如何表示兩式之商乃至形成分式的符號？相關表徵如何演化？再者，此發展與過渡的歷程中，他們所使用的符號系統呈現出什麼樣的特色？另一個有意思的問題是，和算的符號系統源於中算，

[1]《算學啟蒙》作者朱世傑，生卒年不可考，據現傳資料推知大約是 1279 年前後 30 年間，著有《算學啟蒙》（1299）與《四元玉鑑》。前書成書後於中國失傳，現存最早版本為 15 世紀李朝世宗時期的銅活字本。而《算學啟蒙》在江戶初期傳入日本後，對當時日本數學的發展影響深遠，基本上，和算家是透過《算學啟蒙》學習天元術。

[2]筆者將原籌式中的「甲再巾」改成「甲再」，一般而言，和算家會以「甲再」表示甲 3，以「甲巾」表示甲 2，但不會出現「甲再巾」的用法。例如直式的左式指的是下列方程式：「$甲-乙x+丙x^2-丁x^3=0$」。而直式的右式指的是下列方程式：「$3甲^3+5甲^2x-8甲x^2+4x^3=0$」，而原籌式中的「三、五、八、四」為係數，置於「|」的右側，而 x 是主變數，不在籌式中出現。

然而，為什麼中算家反而沒有發展出分式籌式符號？[3]又是什麼樣的需求或因素，促使和算家發展進而完備分式的籌式表示法？筆者期待透過文本的考察能回答這些問題。

另一方面，Sfard（1991）透過對數學概念發展過程的歷史分析與概念分析，提出數（如正整數、有理數、實數、複數）、對稱性或者函數等抽象數學概念，可藉由兩種方式理解與認知，包含結構性的靜態數學「物件」（object），或者操作性的動態數學「程序」（process）。而此「程序-物件」二元性正為數學概念的一體兩面。他也認為對數學概念的認知過程，一般是程序操作面向先於結構物件面向，吾人透過對低階數學物件或具體實物的操作過程，認知新的數學概念，例如對實物進行數數進而理解正整數的概念；又或者對自然數進行除法操作，而慢慢理解分數的概念。因此，分數的概念起先是一種實際的除法操作，接著慢慢將此操作過程「內化」成內心概念上的操作，最後，進入「物化」階段，此時，分數形成了一個結構性的靜態的數學物件，可對其進行操作與運算。因此，本研究中筆者亦進一步以此觀點切入，探討和算家的「分式」概念發展。

本研究中除了參考過去研究成果外，主要透過文本分析與歷史分析的方式，貼近一手和算文本，考察十七世紀末至十八世紀中葉《拾璣算法》刊刻期間，關流和算家著作中的代數符號系統以及兩式之商、分式相關的表徵，探討此時期關流分式符號表徵的過渡與發展，以及此符號系統的重要特色與限制。首先，將從關孝和的傍書法談起，接著從文本中歸納、整理出過渡時期所呈現出的分式相關表徵與符號，最後，綜合評述相關特色以及概念與認知上的意義。

貳、十八世紀中葉之前的重要關流和算家與著作

關孝和又稱關新助，是十七世紀日本江戶時期最重要的數學家，據《寬政重修諸家書》可知，關孝和出生於上野藤岡（今群馬縣藤岡市）的一個武士家庭。1676 年，關孝和世襲武士並仕於甲府藩德川綱重，德川綱重歿後，又仕於其子德川綱豐，擔任與會計有關的勘定吟味工作。1704 年，綱豐成為五代將軍德川綱吉的世子，遷居江戶城西丸，關孝和隨行，遂成為幕府直屬武士，擔任御納戶組頭，負責將軍家的金銀、服飾、調度的出納等工作。1706 年，辭職而後轉為小普請，負責管理工程和技工（徐澤林，2008），而上述相關工作皆與「算」有關。關孝和病歿於 1708 年，生前僅刊刻《發微算法》一書，該書與《三部抄》、[4]《七部書》展現了他在代數符號與方程理論上的創新發展。另外《括要算法》則包含了他在招差、垛積、諸約之法，以及角法、圓周率、球體積及弧長等幾何問題上的研究成果。除了數學上的成就之外，他所創立了關流，更是江戶時期最大也影響最深遠的和算流派。

[3]為求表達上的一致，本文以下以「分式」簡稱「分式（數）」。

[4]關孝和的《三部抄》成書於 1680 年代，由〈解見題之法〉、〈解隱題之法〉與〈解伏題之法〉三個部份組成，並且以抄本形式在門派內流傳。

關孝和創立關流之後，從他的《三部抄》、《括要算法》等著作，我們得以了解他所發明與使用的符號系統－傍書法。也因為當時和算知識仍屬於秘傳時期，這些重要著作主要僅在流派內流傳。師承關孝和的建部賢弘（Takebe Katahiro，1664-1739），曾與關孝和以及其兄建部賢明合著《大成算經》，此為關流初期最重要的集大成之作，後又著述《綴術算經》奉獻給當時的德川吉宗將軍，並深受吉宗將軍信任，得居高位，除了擔任幕府天文顧問外，亦於 1719 年受命測繪日本全國地圖（徐澤林，2008）。

除了前述兩本重要著作外，建部早年的數學學習生涯，共刊刻了三本書，其中，1685 年所著的《發微算法演段諺解》以及 1690 年所著的《算學啟蒙諺解大成》，分別為關孝和的《發微算法》以及朱世傑《算學啟蒙》作諺解，由此可知他熟悉中算天元術以及關孝和的傍書法。他在《發微算法演段諺解》詳細解說了關孝和的《發微算法》書中的術文來由，過程中大量使用關氏創造的符號系統列多元方程多項式與方程式，最終求得一元高次方程式，進而利用開方法求得數值解。不過，無論是關孝和或者建部賢弘的著作中，皆未出現表示分式的符號。一直得到十八世紀中葉，貴為久留米藩藩主的有馬賴徸，托名豐田文景刊刻《拾璣算法》一書，收集當時重要算題，並公開了關流祕傳的知識，當中包含關流重要的點竄符號系統與相關運算法則，此書裡，關孝和的傍書法已被推廣至可以表示分式的符號。

建部賢弘之後，松永良弼與久留島義太（Kurushima Yoshihiro，?-1757）是十八世紀前期關流最活躍的數學家，相較起關孝和與建部賢弘，他們本為浪人，社會地位較低，後皆因數學上的才華，加上磐城平藩的藩主內藤政樹本身愛好數學之故，松永與久留島受聘於該藩中教授算學，並且身份晉升成為武士。

徐澤林（2008）提到《山路君樹先生茶談》一書記載了許多久留島義太的趣事，包含和其他關流數學家之間的交遊情形、講課時總拿著酒、好酒丟官、又將自己的數學著作裁剪糊燈籠等事蹟，可看出久留島義太是個性散漫不拘的人。也因此，他的著作皆未出版，多以稿本形式流傳。松永良弼是關孝和的孫弟子，著作豐富並且系統地整理了關流傳書，是關流重要建設者，並繼承了建部賢弘在圓理上的研究成果，他著作的《立圓率》、《方圓算經》、《方圓雜算》等書，是圓理研究上的重要代表作。

他們兩個人的著作中，出現了多種表示分式的符號，而松永良弼晚期的著作與他的弟子山路主住（Yamaji Nushisumi，1704-1773）的著作，皆已經使用了成熟的分式符號。換言之，自關孝和發明傍書法至有馬賴徸刊刻《拾璣算法》之間，對分式符號發展有所貢獻的關流和算家主要為久留島義太與松永良弼，到了山路主住時期則已經發展完備。綜合上述，本文中將主要以關孝和、建部賢弘、松永良弼、久留島義太、有馬賴徸等和算家的著作為一手文本，考察他們所使用的數學符號，特別是分式表徵的部份。其中，所欲考察的文本包含關孝和的《發微算

法》、《三部抄》與《括要算法》、建部賢弘的《發微算法演段諺解》、井關知辰的《算法發揮》、久留島義太的《久氏弧背草》、松永良弼的《立圓率》、《方圓算經》、《方圓雜算》、山路主住的重要著作，以及有馬賴僮的《拾璣算法》等書。至於本研究所參考一手文本的版本，包含徐澤林《和算選粹》以及《和算選粹補編》所收錄的徐譯版，以及東北大學附屬圖書館電子資料庫收藏的版本。[5]以下，先從關孝和發明的傍書法談起，接著，考察關流分式符號發展並過渡至點竄符號的歷程，最後，提出進一步的討論與結論。

參、關孝和之傍書法

關孝和主要是透過中算書《算學啟蒙》習得天元術（馮立昇，2009），1674 年，他為解答《古今算法記》書中所遺留的 15 個問題，著作了生平唯一刊刻的《發微算法》，從該書術文內容可推知，關孝和已理解中算天元術，並結合其自創的符號系統「傍書法」來解答這 15 個問題。其中的傍書法，使用了漢字及其偏旁部首或日文假名作為簡字代數符號，藉以表示代數方程或代數式，是一種具東方特色的符號代數（徐澤林，2008）。

關孝和所使用的符號主要為「文字式」的符號，其中，他使用「十天干」、「十二地支」與「二十八星宿」等文字作為代數符號。[6]從該書內容來看，第 13 個問題用到的代數符號多達 20 個。而關氏也能熟練地執行變數代換、符號操作以及消元等代數運算，最終由問題條件與圖形相關性質，可推導出一元高次方程式，進而以開方法求得方程式的數值解。例如，第 13 個問題的術文，最終可導出 72 次多項方程式，而第 14 個問題最終所得的方程式更高達 1458 次，代數運算之複雜可見一斑。也由於推導過程繁瑣，關孝和在書中僅以文字略述之。儘管該書實際上並未出現「傍書」符號，但無論傳統中算天元術或者四元術，皆無法表示具這麼多未知數的方程式，因此可斷定，關孝和早在 1674 年之前，已經創立並能熟練地使用「傍書法」以及相關代數符號系統，才得以解前人之難題並完成此書。

不過，關孝和並未在該書中詳細記錄代數操作的過程，僅在各問題的「術曰」裡，留下可求得該問題答案的術文－程序性的演算法，並未寫下推導出這些結果的過程與來由，使得一般讀者難以理解，也因此關氏受到當時其他數學家的批評。後來，關孝和的弟子建部賢弘於 1685 年刊刻《發微算法演段諺解》，目的為了解說《發微算法》書中各術文的來由，這也使得關流所用符號與解方程的方法公諸於世。而建部賢弘（1685）也以「**此演段，和漢算者所未發明也，誠可謂師之新意妙旨，冠絕古今也。**」稱讚、歸功於其師關孝和。此書共分成元、亨、利、貞

[5]東北大學附屬圖書館電子資料庫網址如下：
http://dbr.library.tohoku.ac.jp/infolib/meta_pub/G9200001CROSS

[6]包含甲、乙、丙、丁、…、癸等十天干。子、丑、寅、卯、…、亥等十二地支。角、亢、心、房、…、軫等二十八星宿。

四卷，其中的〈元卷〉羅列《發微算法》當中的 15 個問題與「術文」，其它三卷則是求解這 15 個問題的代數運算過程。值得一提的是，第 12 問與第 13 問的代數運算過程，分別占了 34 頁與 43 頁的篇幅，其中，解第 12 個問題所出現，最龐雜的單一代數式，竟橫跨了 6 頁的篇幅才得以表示。[7]

除了《發微算法演段諺解》公佈了關流早期所用的符號外，事實上，關孝和於 1683 年所著作的〈解見題之法〉，應屬最早出現「傍書法」籌式的和算文本。〈解見題之法〉書中提到：「**合者，依術意，圖正負與段數，而傍書加、減相乘者名，宜分之合之。**」這裡指的便是利用「籌式」來表示代數式的「正負與係數」，並在籌式的右邊置上相對應的代數式。包含「籌式」與「代數符號」即成為一組「傍書式」。[8]同一組「傍書式」之中，相鄰的兩個符號代表相乘關係，放在左右的多組「傍書式」之間則為加減關係，至於是加或減則依其籌式之正負來決定。

若以關孝和在書中所給的例子「**分術。置甲，以乙相乘，得二段右積　|甲乙**」來看，當中的「**|甲乙**」指的便是 1 倍的甲乘乙。另外，「**合術。置乙，加入丙，共得數以甲相乘　|甲丙 |甲乙，折半之，得積。**」當中出現的籌式「**|甲丙 |甲乙**」，指的便是 1 甲．丙＋1 甲．乙。依據這些規則，單一傍書式可表示出未知數之正整數冪次（即單項式）以及若干個單項式之積。多個傍書式左右或上下擺放則可表示出它們之和、差與線性組合。又例如下述式子：「**假如 |斜巾 |方巾，添之|||方巾**」所指的是正方形的對角線長度的平方加上邊長長度的平方等於邊長長度平方的三倍。其中，關孝和除了以簡字「巾」表示某式（數）的平方之外，[9]他也利用「再」表示某式（數）的「三次方」、以「三」表示某式（數）的「四次方」等等。於是，關孝和所創的「傍書法」符號，可表示出係數帶有文字項的多項式，例如，可將「甲+乙子+丙子^2+丁子^3」表示成：

|甲 |乙子 |丙子巾 |丁子再

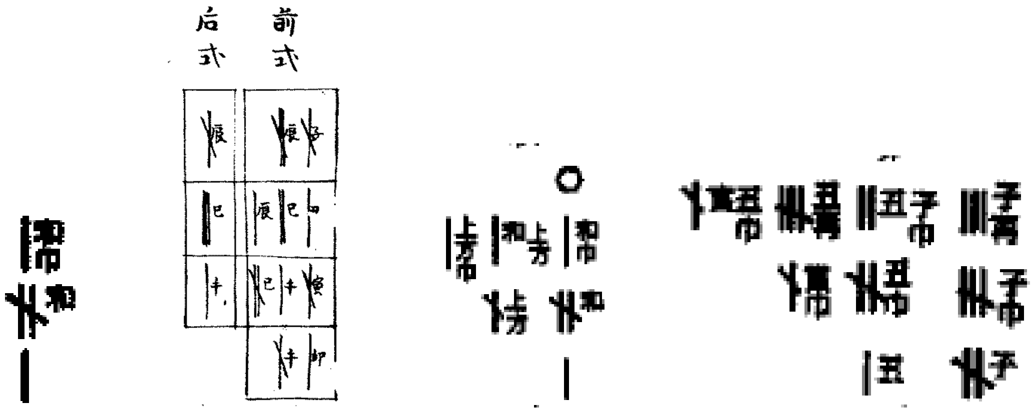
關孝和的代數符號並不局限於「傍書法」，在列方程式的過程中更融合了中算「天元術」的傳統與特色，以上下位置代表「所求未知數」的不同冪次項，將多項式或方程式的各項，由上往下作升冪的排列，同一列裡的傍書式則為該項的係數。例如，若以子為主變數，那麼「|甲 |乙子 |丙子巾 |丁子再」可進一步表示成：

|甲
|乙
|丙
|丁

[7]解這 15 個問題的演段過程中，所出現的複雜代數式，往往需要 5~6 頁的篇幅才得以表示。
[8]一般和算書中，史家們將關孝和的代數系統稱為「傍書法」，即是依此而得名。在此，筆者進一步將關孝和的符號代數式稱為「傍書式」。
[9]「巾」即冪的簡寫。

又例如圖 1 中，關孝和《解伏題之法》出現的天元傍書式，其中，圖 1（a）所列的式子指的便是「 $\text{和}^2-2\text{和}x+x^2$ 」。以下，筆者將此融合天元術與傍書法的代數式稱為「天元傍書式」。

再以圖 1（b）看來，此式同樣為《解伏題之法》之中所出現的天元傍書式，以圖中的後式為例，該式代表的是方程式「$-\text{辰}+2\text{巳}x+\text{午}x^2=0$」。又如圖 1（c）的代數式即為多項式「$1x^3+\left(-1\text{上方}-2\text{和}\right)x^2+\left(1\text{上方}^2+1\text{和}\cdot\text{上方}+\text{和}^2\right)x$」。圖 1（d）所表示的多項式則是「$\left(1\text{丑}-2\text{子}\right)x^2+\left(-1\text{寅}^2-2\text{丑}^2-3\text{子}^2\right)x+\left(-1\text{寅丑}^2-3\text{丑}^3+2\text{丑子}^2+3\text{子}^3\right)$」。一般而言，和算家若無特別指明，該籌式為多項或方程式，需由前後文脈絡才能判斷。



（a）　（b）　（c）　（d）

圖 1　關孝和《解伏題之法》中的天元傍書式。引自「**和算選粹**（頁 120）」，徐澤林，2008，北京：科學出版社。

綜合上述例子，關孝和在《解見題之法》與《解伏題之法》之中所使用的天元傍書式，是以其獨創的傍書法，融合了傳統天元術的特色，一方面以「縱向位置」表示主要未知數的冪次，並透過「文字符號」的引入，解放了原本四元術利用上下左右等不同「方位」表示不同未知數的方式。如此，和算家可以在沒有「加減符號」的情況下，表示出含文字符號的一般多項式與多項方程式，亦可推廣至表達多元高次多項式或方程式的情況。此外，關孝和利用巾、再、三、四等文字來表示數與式的冪次，這種表示法相當於以「甲巾」記錄「甲的平方」；以「甲再」記錄「甲的三次方」；以「甲三」記錄「甲的四次方」等；[10]因此，廣義來看，巾、再、三、四等文字可看成代表指數的符號。關孝和並利用上下位置來表示多項式或方程式的不同冪次項，但他並未發展出可以表示「分式」與「負冪次」的符號。

[10]「甲三」即甲再乘上三個甲，亦即甲的四次方。

肆、分式符號的過渡

十七世紀末期，和算家所用的傍書法，僅利用籌式符號「｜」的右側位置，記錄相關的代數符號，其中包含單項式或單項式之乘積作為一個「傍書式」，並可表示出傍書式的和、差與積或係數乘積：

以　|甲 |乙　　表示甲＋乙

以　|甲⺦乙　　表示甲－乙

以　|甲乙　　表示甲·乙

以　-‖甲或 |$\frac{+}{=}$甲　　表示 12 甲

但並未出現分式的表示法。一直到《拾璣算法》書中的「點竄」定則，才明白地指出如何表示分式以及相關運算法則。換言之，關孝和所發明的傍書法與十八世紀中葉關流和算家所用「點竄」，之間最大的差別在於「分式符號的使用」。另一方面，李冶（1192-1279）於《益古演段》或《測圓海鏡》所列的天元式裡，[11]常數項的下一位為x^{-1}項，而再下一位為x^{-2}等依此類推，如此得以表示出未知數的負冪次，意即可以表示出形如$ax^3+bx^2+cx+d+ex^{-1}+fx^{-2}$的式子（郭書春、李兆華，2010）。但傳入日本的天元術則否，關孝和的天元術是習自朱世傑的《算學啟蒙》，常數項的下一位為「商」，即$\sqrt{x}$項，如圖 2 所示為江戶時期算家所用的算盤圖，作為江戶時期數學家從事數學知識活動時，用以計算的表面。當時數學家便是在畫有此格子狀的算盤上擺弄算籌，進行開方解方程式。[12]由上往下依序為商、實（常數項）、方（一次項）、廉（二次項）等，當中並不包含負冪次項。因此，早期和算家列方程式的過程中，並不表示出負冪次項，也未發展出負冪次項的列式法。然而，基於和算家求解問題與列式過程等種種需求，和算家們勢必得發展出能表示分式的方法。

---

[11]李冶為金元數學家，其於 1248 年著《測圓海鏡》，1259 年著《益古演段》，目前《測圓海鏡》是有關天元術最早的也是最重要的第一手資料（郭書春、李兆華，2010）。

[12]《算法新書》作為幕末重要和算教科書，因此收錄此圖作為教學演示用。作者千葉胤秀在 19 世紀初期在一關藩一帶開設算學道場，門徒號稱三千。其死後，他的子孫繼續在一關教授算學，承繼算學道場，使得算學成為千葉一家之家學，數代相傳，。也由於千葉一家的耕耘與貢獻，使得一關一帶成為和算最隆盛的地區之一。而圖二所指的算盤，不一定是製成木板的形式，當時的數學家會將此算盤與方格畫在紙上，方便數學家隨身攜帶，以利進行解方程式與計算所需。

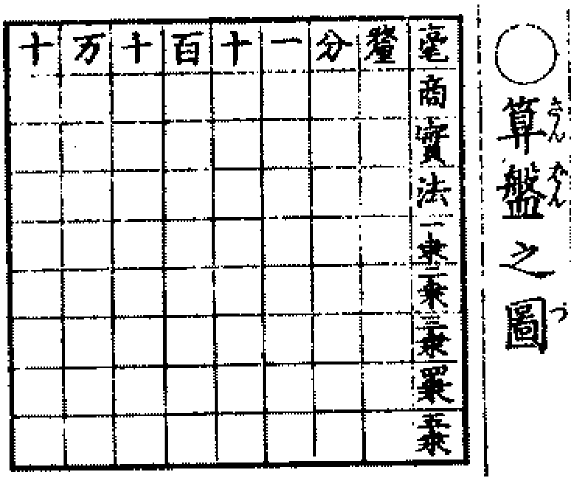


圖 2　江戶時期用以計算的表面－算盤之圖。引自「**算法新書**〈卷三〉天元術」，千葉胤秀，1830。

關孝和的傍書法主要利用了「｜」的右側空間記錄未知數或相關變數，因此空下了左側的空間，部份和算家（例如井關知辰與久留島義太）都曾利用左側空間記錄新變數名稱，經輾轉演變後始利用左側空間記錄「除法」操作。

首先，非關流數學家井關知辰於 1690 年所著作的《算法發揮》，開始利用「|」的左邊空間，然而，他所用的符號並無表示分式的意義。圖 3 為《算法發揮》中所用的符號，他將「| 何巾一正」、「|一算負」等項，[13]分別重新令作新變數「㋑、㋺、㋥、㋭」等，並置於「|」左側，亦即籌「|」左側的「㋑」便是用來代表「何巾一正」的新變數。換句話說，「|」的左側空間，井關知辰僅是用來記錄新的「變數符號」。

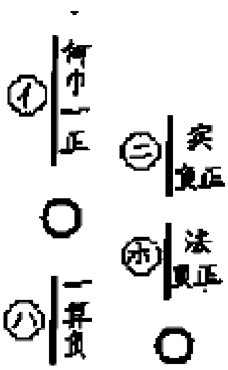


圖 3　井關知辰《算法發揮》所使用的符號。引自「**和算選粹**（頁 317）」，徐澤林，2008，北京：科學出版社。

[13]「| 何巾一正」的意思為「+ 1・何 ^{2}」、而「|一算負」的意思即為「-1」，它表示負項的方式較特別，是在該式「|」的右側加上「負」，而非在符號「|」上畫一斜線，形成「亻」的方式。而井關知辰在文本中，為了方便說明以及簡單的目的，他利用符號「㋑」來代表、指稱式子中所出現的「| 何巾一正」一項，這相當於令了新變數，作了變數代換的動作，以簡單的新變數來指稱原本較複雜的項。文本中，他處理其它複雜文字項時亦同。

到了十八世紀，關流和算家松永良弼與久留島義太等人，則進一步利用「|」左側空間，將前述傍書符號推廣，逐漸發展出可以用來表示分式的符號。從相關文本的考察，我們歸納整理了十八世紀和算家們用以表示兩式（數）之商與分式的表徵與符號，從中可發現相關表徵非常多元，主要包含五種方式，以下各作說明與討論。

一、以文字記錄乘除

和算數學著作，主要承襲中算的傳統，主要包含題、答、術，其中題為問題；答為問題的答案，早期問題多是求數值解；術則是公式或演算法。一般而言，將問題中的已知數或量，代入術文中的演算法，經程序性、機械性的代數操作或數值運算後，可求得問題的答案。在此傳統背景之下，早期和算家尚未發展出「分式」符號時，文本中處理分式的方式，主要是透過文字描述的方式來說明或記錄「乘除的動作」。

例如當他們在表示$\frac{1}{2}$或$\frac{甲}{2}$的概念時，是透過「以二約之」、「折半之」、「法二」、「二除」、「二而一」等方式記錄將某式（數）除以二的除法運算，取代分數「二分之一」或者分式「二分之甲」等概念。又或者以「a乘b除」的程序性操作，來表示分數$\frac{a}{b}$或表示某數乘上$\frac{a}{b}$。這種分式（數）表徵，往往依附在程序性的術文中，以文字方式呈現，而非獨立的數學物件。

以關孝和（1683）的《三部抄》當中的〈解見題之法〉為例，「分術」的術文中出現「**二積相并，折半之**」；而求「方錐」體積的術文出現「**得數，以三約之**」。又或者建部賢弘（1722）的《綴術算經》第四個問題的術文，出現了「**底面乘之，六而一，得積也**」。都是以文字呈現或記錄除的動作，取代分數或分式。

二、另記被除式與除式

許多場合裡，和算家也沿用中算家的習慣用法，利用「實」與「法」分別記錄被除式（數）與除式（數）或者分式的分子與分母，並以之表示將實之式（數）除以法之式（數）後，得所求分式。例如，松永良弼早期的著作《立圓率》一書，便是以實與法來表示分式的分子與分母（如圖 4 所示），其中的實相當於球體積公式的分子項，而法則為球體積公式的分母項。又如關孝和《括要算法》當中的問題：「**今有原一十個，逐增六分，問極數幾何？**」此問題的意思是有一個首項$a=10$、公比為 0.6 的無窮等比級數，求此無窮等比級數之和。《括要算法》書中所給術文為：「**置一內減六分，餘四個為法，以原一十個為實，實如法而一，得極數，合問。**」若以現代的符號來表示，此公式即$S=\frac{a}{1-r}=\frac{10}{1-0.6}=25$，然而，當時的和算家並無法表示出分數，故他先計算出分母$1-r=1-0.6=0.4$，將此值記為法，再以首項 10 為實，實除以法的結果可得

25，即為此無窮等比級數之和。

除了以實法分別記錄分子與分母外，和算家也會利用「周三徑一」或「周率三五五、徑率一一三」的方式來記錄圓周率$=\dfrac{\text{圓周}}{\text{直徑}}\approx\dfrac{355}{113}$這個近似比值的分子與分母。

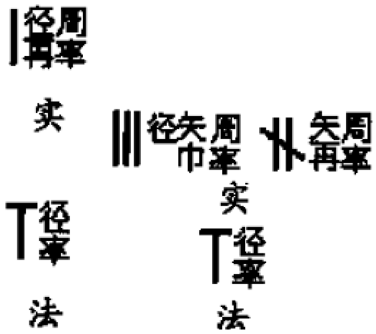


圖 4　松永良弼《立圓率》以實與法來表示分式的分子與分母。引自「**和算選粹**（頁 401）」，徐澤林，2008，北京：科學出版社。

又如關孝和《括要算法》「衰垛原數圖」的分式表示法，他利用在該行最下面的空間，另外記錄「原數法二」與「原數法三」，分別表示該式的分母為 2 與 3 等（如圖 5 所示）。同一著作中的「衰垛級數圖」裡，則是在該行的最下面另記「約法二」與「約法六」等，同樣分別表示該式分母為 2 與 6 等。因此，在無法表示分式籌式的情況下，關孝和列出各分式之後，另行記錄「法」或「約法」，來表示需將該分式除以「法」或「約法」方能得所求式。而此方法類似於前述分記「實」與「法」的表示法。

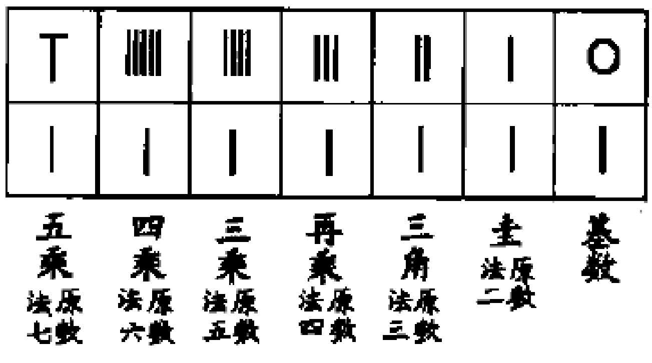


圖 5　關孝和《括要算法》衰垛原數圖。引自「**和算選粹**（頁 179）」，徐澤林，2008，北京：科學出版社。

另一方面，從關孝和《括要算法》的方垛式圖來看（如圖 6 所示），由於當時並無表示分數或分式的符號，因此，他在表格中以籌式記錄各式的分子，並將各列籌式的「公分母」或共同的「除數」提出，記於該列的最左側。例如圖中左側的「取二分之一為加」、「取三十分之一為減」分別代表該列各項需同乘 $\frac{1}{2}$ 與 $-\frac{1}{30}$。又如他在各行最下面記錄的「原法二」、「原法三」等，表示該行的分母同為 2 與 3。而這種在最左側記錄該列「公分母」或共同「除數」的習慣，也一直延續到十八世紀末（例如安島直圓的著作）。

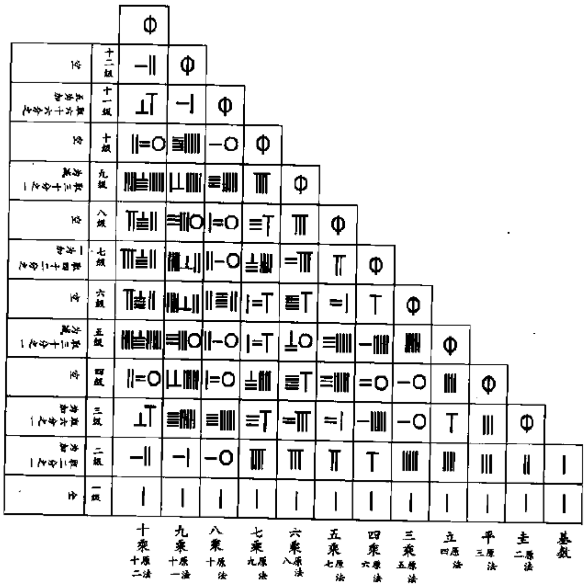


圖 6　關孝和《括要算法》的方垛式圖。引自「**和算選粹**（頁 175）」，徐澤林，2008，北京：科學出版社。

另外，松永良弼於 1739 年著作的《方圓算經》一書，則是在籌式左側以「除法」一欄來記錄該分式之分母。例如圖 7 中「除法」一行的功能，即為記錄除式或記錄分式之分母。雖然此一表示法屬於另記除式的方式，不過這種將除式並排於被除式左邊空間的表徵，可能是促使他發展出「乙除｜甲」或「乙｜甲」等表徵的重要過渡方式。

此時期，和算家的分式表徵仍非一個數學物件，可視為兩個數學式經除法操作所得的結果。

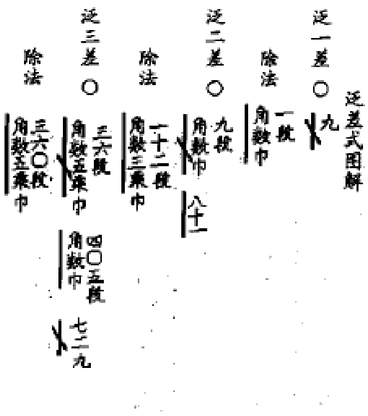


圖 7　松永良弼《方圓算經》中出現的分式籌式。引自「**和算選粹**（頁 427）」，徐澤林，2008，北京：科學出版社。

三、將除法操作記於「|」右側

和算家久留島義太的著作《久氏弧背草》書中，將除法操作（分式的分母）記於籌式「|」的右側，他利用「| 四除」、「| 四除之」、「| 徑二除」等方式記錄除法操作或作為分式的表示法，分別代表了$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{4}$與$\frac{1}{徑^3}$。

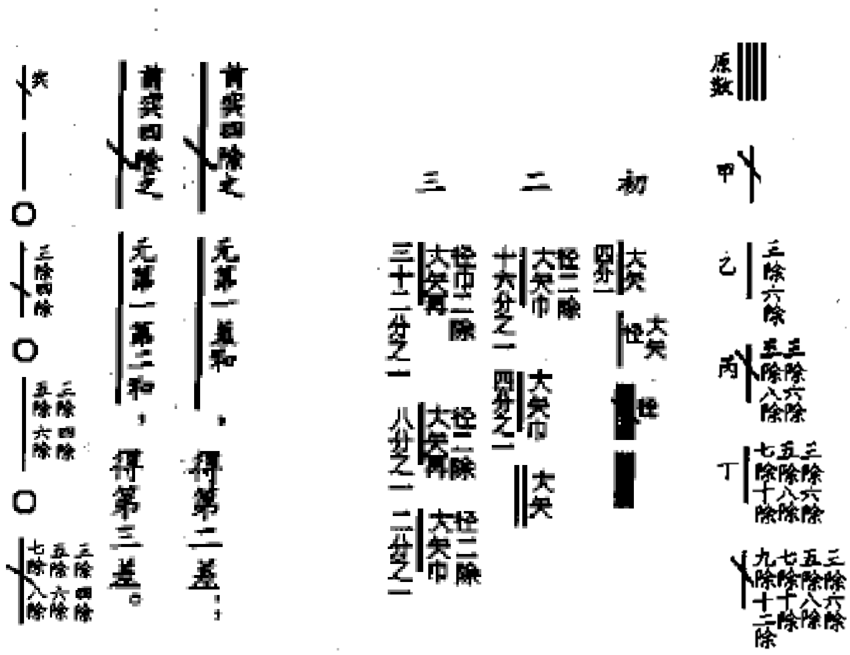
以圖 8（a）為例，此為久留島義太的著作《久氏弧背草》所出現的分式籌式，他在畫式「|」的右邊記錄「三除四除」等除法動作。因此，若以現代符號表示，該式相當於$-1+x-\frac{1}{3\cdot 4}x^3-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^5-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}x^7$。又如圖 8（b）所示，他同樣在「|」的右邊記

錄

了「**前實四除之**」的除法操作。至於圖 8（c）當中，久留島義太則是在「|」的右側以「**徑二除**」、「**徑巾二除**」的方式記錄「除以 2」的操作。

值得注意的是，同一本著作中，久留島義太也開始利用「|」的左邊空間（如圖 8（c）與（d）所示）。其中，圖 8（d）之中「|」左邊的甲、乙、丙、丁並非表示該分式的分母，而是以甲、乙、丙與丁等新變數表示圖中甲、乙、丙、丁右側之「項」。意義同於前述非關流和算家井關知辰的用

法。此圖中的甲代表了「-1」，乙代表的則是「$\frac{1}{3\cdot 6}$」。由此可看出，久留島義太在分式符號使用上相當混亂且隨性，即便同一部作中的表徵亦不統一。例如圖 8（c）中的式子，除了在「|」右側記錄「徑二除」之外，同時也在「|」的左側記錄了「四分一」與「四分之一」等。



（a）　（b）　（c）　（d）

圖 8　久留島義太著作《久氏弧背草》中出的四個分式籌式。引自「**和算選粹**（頁 352-367）」，徐澤林，2008，北京：科學出版社。

四、記於｜之左邊

除了前述三類表示法之外，久留島義太與松永良弼的著作中，也開始利用籌式符號「｜」的左側來記錄除的操作。如圖 8（c），久留島義太利用、「四分一| 大矢」、「四分之一| 大矢巾」等方式，表示出該分式的分母為 4，並分別表示了$\dfrac{大矢}{4}$與$\dfrac{大矢^2}{4}$。亦即他除了利用了「|」的右側描述除法運算外，也開始利用「|」左側的空間來表徵「分母為 4」以及乘上「四分之一」等運算。又如圖 9 松永良弼《方圓算經》中所出現的分式符號，他透過在「|」的左側記錄「十二除」、「三十除」等方式來表示該分式的分母包含 12 以及 30 等因數。然而，就這類表示法來看，將「十二除」、「三十除」等置於「|」左側主要作為紀錄程序性運算的功能，並非數或式等「數學物件」。另一方面，將「四分之一」置於「|」左側也非一般分式符號之分母作為除數或除式的意義，亦無法將整個籌式視為「|」左右兩數或兩式之比值。

總之，諸如「四除|甲、四分一|甲」等，將「除」的操作記錄在「|」左邊的方式，雖已類似於較完整的分式表示法「四|甲」，然仍舊帶有「除」、「分」等程序操作的意義。因此，這些表示法之下的分式，尚不能視為一個獨立而完整的數學物件。因此，到了 1739 年松永良弼著《方圓算經》之時，尚未發展出完備的分式符號。至於第五種方式則是「點竄」所用的分式符號，以下繼續討論。

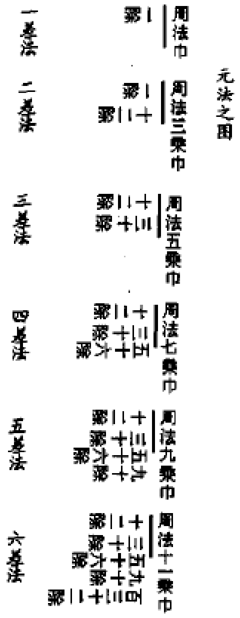


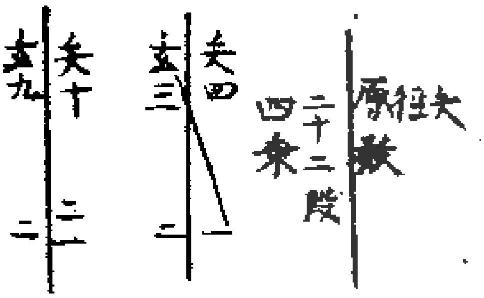
圖 9　松永良弼《方圓算經》中出現的分式籌式。引自「**和算選粹**（頁 448）」，徐澤林，2008，北京：科學出版社。

伍、完整的分式符號

一、1750 年松永良弼晚年所用的符號

第肆節當中所述的四類分式表徵，皆非完整的分式概念。就和算文本的考察來看，一直到 1739 年松永良弼《方圓算經》所用籌式符號「|」的左側，主要仍作為「以文字記錄除法運算」的功能，而非作為數學物件功能的「數」或「式」。得等到松永良弼（年代不詳）《方圓雜算》一書，始出現較為完備而類似於現代分式的符號。原書為漢文，成書年代不詳但據其使用的符號以及所得圓周近似值來看，應為松永晚年作品（林建宏，2013）。例如，他以「四|乙」或「徑｜弦」分別表示「$\frac{乙}{4}$」以及「$\frac{弦}{徑}$」。這也意味著他將「數或式」等數學物件，置於籌式符號「|」的左側，用以表示該分式的分母。《方圓雜算》一書，便是以「二｜弦」來表示「$\frac{弦}{2}$」，又松永良弼也將「$\frac{弦}{一}$」、「$\frac{弦}{二}$」」、「$\frac{弦}{四}$」置於「｜」的左側，分別表示該分式的分母為「弦 ^{1}」、「弦 ^{3}」、「弦 ^{5}」等。圖 10 為出現在《方圓雜算》一書中的分式，其中，松永良弼以圖 10（a）的左式來表示「$\frac{21\cdot矢^{11}}{2\cdot弦^{10}}$」，而圖 10（a）的右式則代表「$-\frac{1\cdot矢^{5}}{2\cdot弦^{4}}$」。

雖然松永良弼《方圓雜算》一書中出現了成熟的分式符號，但同一本書裡，卻也混雜地出現了包含程序操作的分式表徵。例如圖 10（b）的籌式，該式「|」的左側包含了「四乘」與「二十二段」，其中的「四乘」表示執行乘法運算，而「二十二段」則有「二十二倍」之意，意即此式左側所置並非單純的數字，而是包含了「乘」法運算的程序與言辭，因此，整個分式並非一個數或式，顯示出較不成熟的分式特色。



（a）　　　　　　（b）

圖 10　松永良弼《方圓雜算》一書中出現的籌式。引自「**方圓雜算**」，松永良弼，年代不詳。

不過，總體而言，松永良弼晚年的《方圓雜算》以及其弟子山路主住的著作中，都已經使用了具現代意義的分式符號，例如，圖 11 裡的籌式出現在山路主住的《算法弧背詳解》裡，可明顯看出該分式的符號「|」左側位置所放皆為數字與式，而不像圖 10（b）當中所放的「四除」，而「四除」代表的是和算家以文字來描述程序性操作，它本身並非一個數字。

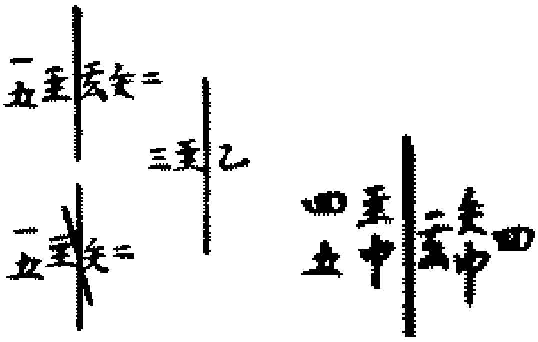


圖 11　山路主住《算法弧背詳解》一書中出現的籌式。引自「**算法弧背詳解**」，山路主住，年代不詳。

再者，筆者利用東北大學附屬圖書館電子資料庫搜尋的結果，書名與「點竄」有關，且署名松永良弼編，山路主住校的和算文本，包含了《絳老余算単伏点竄》、《一百好絳老余算点竄》、《絳老余算点竄》、《鉤股弦再乘和点竄》等書，經考察前三本書中皆使用了成熟的分式符號，然第四本書則未見分式符號。

至此，關流和算家所用符號已能表示出分母為「單項式」類型的代數式。[14]若將此符號對比於現代數學以「－」這個符號的上下，分別表示分式的分子與分母，可發現的數式符號「$\dfrac{b}{a}$」相當於和算家所用的「$a|b$」。其中，和算家沿用了中國傳統直式書寫的形式，並將「代數式」與係數置於「|」的左右。不過，依此表示法，分母並無法表示複雜的分式，例如當分母為二個以上數或式相加時，必需進一步「括之」，作變數變換，引入新代數符號，方能表示出較分母較複雜的分式。[15]

二、《拾璣算法》書中的點竄定則

分式符號在松永良弼晚年與山路主住時期已發展成熟，有馬賴徸在吸收了山路主住的傳書之後，於 1767 年所著的《拾璣算法》〈點竄〉定則裡，完整地公開了關流祕傳的籌式使用法則，此時關流和算家對於「分數」與「分式」的表示已臻於完備。他也在該書的〈點竄〉裡，提出關流所用的符號法則。

首先「**以所命一筭傍書者，固虛數也**」，意即在算籌符號「|」的右側傍書相關未知式。例如以「$|a$」表示「$1\cdot a$」。[16]接著提出加減的符號法則「**加減者隨意施於上下級或同級**」，即將加式與減式置於被加式與被減式的左右或上下，例如$a+b$可表示成「$|a|b$」或「$\begin{array}{l}|a\\|b\end{array}$」，$a-b$可表示成「$|a\nmid b$」或「$\begin{array}{l}|\,a\\ \nmid b\end{array}$」接著，他提出乘法的符號法則「**因者，用右傍書**」，例如，若將「$|a$」乘上b時，則可將b置於籌式符號「|」的右側，表示成「$|ab$」。另一方面，「**除者，用左傍書，一件則直用除數，若二件以上者，括之用號**」，即若將「$|a$」除以b時，則可將b置於籌式符號「|」的左側，表示成「$b|a$」。但分母包含兩單項式之和時，必需特別處理，否則當分母為「$|b|c$」時，若將此式置於$|a$的左側會形成「$|b|c|a$」，此式容易產生混淆，無法判別真正的分母。因此，若欲以「$|a$」除以「$|b|c$」時，需先令一個新變數$x=b+c$，再將x置於籌式的左側表示成「$x|a$」。依上述法則，和算家可以表示出一般的「分式」，若分母為單項式時，直接置於「|」符號的左側即可；若分母為多項式時，則先「括之」作變數代換，再將新變數置於「|」符號的左側。

除了「分式」的表示法之法，《拾璣算法》書中也提出「分數」的表示法，例如書中提到「**又有分母子數者，假如五分之三者**」可將此分數表示成「五｜三」。又「**二十五個八分之三者**」可

[14]這裡的單項式為多元單項式，其為常數係數與若干未知數之乘冪與積。
[15]請參考「二、《拾璣算法》書中的點竄定則」裡的說明
[16]這裡我們利用英文字母 a、b、c 等代替原書中的勾、股、弦等中文。

表示成「｜二十五八｜三」，[17]此式相當於 $1\cdot 25+\dfrac{3}{8}$，亦相當於現代數學符號中的 $25\dfrac{3}{8}$。如此，從《拾璣算法》〈點竄〉定則，我們可以發現關流和算家所用分式與分數記號已成熟。最後，筆者整理了《拾璣算法》〈點竄〉定則中，與四則運算相關的符號表示法（參見表 1）。

表 1

《拾璣算法》〈點竄〉定則整理

文字描述	點竄標記法		現代符號標記法
列 a 加入 b	$\mid a$ $\mid b$	$\mid a \mid b$	$a+b$
以 a 減 b 列 b 以減 a	$\mid a$ $\nmid b$	$\mid a \nmid b$	$a-b$
列 a 乘 b	$\mid ab$		$a\cdot b$
a 除以 b	$b\mid a$		$\dfrac{a}{b}$
列 a ，b、c 和除之	括之：$\mid b\mid c = x \;\; \to x\mid a$		$\dfrac{a}{b+c}$

最後簡單整理「點竄」符號系統所具有的特色：

1. 關孝和發明的傍書法符號系統能表示出「單一傍書式」－即多元單項式（$a(x_1)^{n_1}(x_2)^{n_2}\cdots(x_k)^{n_k}$）－以及單一傍書式的和、差、與積，然無法表示出其商（即分式），而松永良弼晚年的點竄法則，已推廣至可以表示分式的情況。

2.對於單一傍書式而言，「|」符號的左右邊皆為「數學物件」即「數」與「式」，而不再是「記錄」程序性除法運算的「數學程序」，亦即從帶有「除」字的「四除 ｜ 甲」，[18]演變成具現代分數意義的「四 ｜ 甲」。

3.籌式「|」符號的右側等價於分式的分子，「|」的左側等價於分式的分母。此可類比於現代符號「－」的上下位置。

4.一般而言，以籌式符號「|」（表正項）或「$\nmid$」（表負項）分隔分式的分子與分母，然有些場合，也會出現「|||」、「||」等具有數字意義的籌式代替符號「|」。

5.和算的符號系統並無加、減等運算符號，他們以左右並列或上下排列的方式來表示不同

[17]請讀者注意，這裡的「**二十五個八分之三者**」指的並非 25 倍的$\frac{3}{8}$，其中的 25 個指的是整數部份為 25，再加上分數部份的$\frac{3}{8}$。

[18]若以現代符號表示，此式即$\frac{\text{甲}}{\text{除以 }4}$，此示的分數記錄了將甲「除以四」的運算乘序，而不是指「$\frac{\text{甲}}{4}$」這個數。

傍書式的和，依據各傍書式之籌式符號決定該項之正負。

6.此系統裡所用的指數符號為文辭式的，以符號「巾」表示與記錄二次方、以「再或二」表示與記錄三次方、以「三」表示或記錄四次方、以「四」表示或記錄五次方等，並可依此類推。

7.由於並無括號符號，因此，若分式之分母較為複雜或包含多項之和時，必需先「括之」令其為一新變數，再將新變數置於「|」符號的左側，作為分式之分母。

8.多項式的表示法沿用中算天元術的傳統，為直式書寫形式，與現代的橫式不同。並且由上至下的位置依序升冪代表主變數的不同冪次項。儘管，點竄定則裡使用「｜」分隔分式的分子與分母，但關流數學家所用的「｜」，意義上不全然同於現代符號裡的分式橫槓「－」，有時尚具有「數字」的意義（例如：「|||甲」即「|三甲」亦為「3 甲」或者以 $b\|a$ 表示 $\frac{2a}{b}$ 等）。對比於此，非關流數學家井關知辰著作中所用的「|」，主要作為「符號」之用，而非籌式數字。

陸、綜合討論與符號再論

十七世紀末，出現於關孝和《三部抄》的傍書法，突破了中算天元術與四元術的限制，可用以表示出包含更多變數的籌式，有助於和算家列出更多元且複雜的方程式，利於求解更複雜數學問題。此外，當時關流和算家所用的代數符號主要包含三類，一是帶有實值意義的「積」、「徑」、「弦」、「和」、「又云」等符號，這些符號分別用來指稱題目給定的「某區域面積」、「某圓之直徑」、「勾股形的斜邊（弦長）」、「某些幾何量之總和」以及題目條件所提及「又云某幾何量若干」之數，因此具有言辭式的特色。再者，他們也利用「責」、「玄」、「圣」等較為簡化的「簡字」符號，來表示原本的面「積」、「弦」長、直「徑」長等幾何量。除了上述帶有意義的符號之外，和算書中也大量利用了天干「甲、乙、丙、…、癸」與地支「子、丑、寅、…、亥」或者平假名「イ、ホ、ニ、ハ」等沒有實值意義的字，作為抽象的代數符號。[19]

如此，有了傍書法加上符號，當時和算家可表示出複雜的「多元多項式」，但也由於缺少了代表加、減運算與「次方」等符號，故他們令變數符號左右擺放為乘（例如 |||甲乙 = 3 甲 · 乙），傍書式左右或上下擺放為和（例如 |||甲 ||乙 = 3 甲 + 2 乙），不過，此符號系統並無法表示除與分式。繼關孝和之後，從十八世紀的和算家久留島義太與松永良弼的著述可發現，傍書法慢慢被推廣，並衍生出可以表示分式的方法，整個符號演化與變革的過程中，也出現了多樣性的表

[19]十九世紀末德國史家 Georg Heinrich Ferdinand Nesselmann（1811-1881） 曾經提出一個『三階段說』，亦即：文辭代數（rhetoric algebra）、簡字代數（syncopated algebra）與符號代數 （symbolic algebra），並以此來刻畫西方代數學（含阿拉伯數學）的發展風貌。此階段說並無法適用於中算與和算脈絡中所使用的符號。以和算為例，此三者同時並存。

徵。

早期他們在表示$\frac{1}{2}$甲的概念時，必需透過「以二約之、折半之、法二、二除」等方式，透過文字來記錄對某個數學物件（數或式）執行「除以二」的除法運算。又或者利用「以a乘b除」來表示某式（數）的$\frac{a}{b}$倍。許多場合裡，和算家也沿用中算的用法，利用「實」與「法」來記錄被除式（數）與除式（數）或者分式的分子與分母，蘊涵將實之式（數）除以法之式（數）後，可得所求分式。他們也利用「周率 355」與「徑率 113」來記錄$\frac{圓周}{直徑}=\frac{355}{113}$此一圓周率近似值的分子與分母。

後來，他們也漸發展出新的表徵方式，包含利用籌式符號「｜」的右側記錄除的操作，例如：「｜四除」、「｜四除之」與「｜甲四除」分別指的是$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{4}$與$\frac{甲}{4}$。更普遍的表徵則是利用籌式符號「｜」的左側記錄除的操作，例如「四除｜」與「四分一｜甲」分別指的是$\frac{1}{4}$與$\frac{甲}{4}$。儘管將「除」的操作記錄在左邊的方式，已經類似於「點竄定則」中較完整的分式表示法「四 |甲」，但它仍帶有「除」與「分」等程序操作的意義。意即分式的意義離不開「對數學物件（式或數）執行除法運算」。

綜言之，早期關孝和創造的傍書式僅能表示多項式或多項方程式，和算家主要透過文字記錄「除法」的操作、另記「實」與「法」或另記「除式（分母）」等方式，取代分式以及負冪次。後來的過渡階段則發展出利用「|」的右邊記錄除法程序，而後更普遍地在「|」左側記錄除法程序。最後的成熟階段，和算家則是在「|」之左邊放置「數學物件」，真正使「乙|甲」成為完備的分式符號，代表「$\frac{甲}{乙}$」之意。

另值得一提的是，和算家在同一本著作中所用的符號常常不一致，甚至偶爾穿插使用了較不成熟的表示法。例如，久留島義太使用的符號有時相當隨性且不統一，於同一本書中同時使用了「|」的左、右側來記錄除法操作。至於松永良弼，他一開始主要透過文字記錄除法運算、使用中算概念下的「實」與「法」以及另外記錄除式等方式來表徵分式。後來，他也開始以「|」左側記錄除法操作，將單一籌式推廣至得以表示「分式」的情況。不過，1739 年《方圓算經》書中仍未出現「乙｜甲」形式的分式符號，一直得到他的《方圓雜算》一書，始以「|」左側放置除式（數），使得「乙｜甲」具有現代分式的意義，至此，和算家的分式符號才算發展成熟。不過，由於松永卒於 1744 年，因此《方圓雜算》很可能是他晚年最後一批著作（林建宏，2013）。相關分式籌式符號除了可見於松永良弼的《方圓雜算》外，亦被其弟子山路主住使用。最後，

得益於有馬賴徸刊刻《拾璣算法》，公開並介紹了關流密傳的點竄符號與相關符號運算法則，使得一般人有機會一窺關流所發展的籌式符號法則。

再回到前言所提出的問題：和算的符號系統源於中算，然而，為什麼中算家反而沒有發展出分式籌式符號？又是什麼樣的需求或因素，促使和算家發展進而完備分式的籌式表示法？以下筆者簡單作一說明。

首先，天元術是在宋、元時期發展成熟的中國傳統算學，並以中算學家李冶的《測圓海鏡》與《益古演段》二書為代表性著作。然而，李冶的天元術，到了明朝中葉已無人能曉，而天元術與四元術的失傳，這也使得明朝與清初時期，中國符號代數的發展，無以為繼。再者，1723-1840 年間的學術風氣上，西學中源說盛行，此時的中算家是依著「借根方」來進行校注算書，[20]解天元術的工作。蘇俊鴻（2013）與林倉億（2001）提到，此時的中算家所理解的天元術，是帶著借根方知識內涵的天元術。一直到 1797 年，中算家李銳（1769-1817）重新校算李冶的《測圓海鏡》與《益古演段》二書時，才重現天元術的原貌。然在此之前，和算家的分式符號系統早已發展完備。

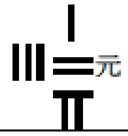
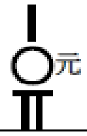
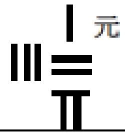
無論是中算家所用的借根方式或天元術，都發展出表示分式的方法。首先，借根方當中，以「根」代表未知數，並得以表示出未知數的不同冪次項。然而，借根方的表示法中，並沒有負數次方，而是以文字形式的「一根之一百四十」，來表示現代符號下的「$\frac{140}{x}$」，又如「一根之一百四十寸自乘、再乘」表示的是「$\frac{140}{x}$」的三次方，最終求得的結果「一立方之二百七十四萬四千」，亦即現代符號裡的「$\frac{2744000}{x^3}$」（林倉億，2001）。

除了源於西學的借根方之外，無論是傳統中算的天元術或四元術，都是利用相對位置來表徵不同的符號與意義。其中，天元術是利用上下擺放的籌式，來表示未知數不同冪次項的係數，例如二次項下面的是一次項、一次項之下是常數項、常數項以下是負一次項等。如表二所示，為天元術的籌算表示法，從中可看出如何表示出$\frac{7}{x}$項，該表示法裡，以常數項下一列的位置來表示負一次項，[21]而該位置上擺放的籌式，則是該項的數字係數，並且無法表示出符號係數，且空間使用上頗受限制。另外，中算家所發明的四元術，其籌式擺放則利用了上、下、左、右四個方位，來表示出四個未知數，並且利用其它各方位來表示這些未知數的組合，不難想見其空間使用上更不具彈性。

[20]借根方是十七世紀末期，由傳教士傳入中國，並教授康熙的西方代數學知識。
[21]元所在位置為 x 的一次項，元的下一列為常數項，再下一列即為負一次項。

表 2

天元術的籌算表示法與今日表示法對照表

籌算的表示法				
今日的表示法	$x^2+32x+7$	x^2+7	$x^2+32+\frac{7}{x}$	$x^2+(-32)x+7$

修改自「**中國清代 1723~1820 年間的借根方與天元術**（未出版碩士論文）（頁 32）」，林倉億，2001，國立臺灣師範大學，臺北市。

無論是借根方或是天元術都發展出用來表示 x^{-1} 項的方式，並為中算家所使用。然而，當中算家熟悉了借根方中，以文字形式來表示「一根之一百四十」的方式，或者天元術中，以常數項下一列的「位置」來表示負冪次之後，分式籌式符號的需求不再。再者，無論是天元術或四元術，所相應使用的計算器為籌算，在不同位置上所擺放的籌式各有不同意義，在各位置上附加新符號或記號易產生混淆，也難以外加文字，且它們分別只能表示一個未知數與四個未知數的多項式，無形中也限制了符號的發展性。加以中算書中的問題，所涉未知數往往不多，同樣未帶來符號發展的需求。因而，中算家終未發展出具現代性的分式符號。而這也說明了計算工具－制式算籌的擺放與位置－的局限，以及所解問題類型的局限，影響了數學概念與符號的發展。[22]

另一方面，十七世紀中期過後，和算家所處理的數學問題，往往涉及了多個未知量，或者他們是以抽象的方式解決問題。因此，只能表示一個未知數的天元術與傳統的籌算已明顯不敷使用，在此需求下，新的符號系統於是誕生。到了關孝和時期，他所發明的傍書法，將未知數從天元術中的各個「位置」解放，成為真正的符號，一方面得以利用不同的符號，表示出多個未知數，增加了未知數使用上的數量與彈性，也增加了空間使用上的可能性。多個「實質符號」同時使用時，勢必無法再利用傳統的算籌等計算器來進行符號運算與操作，因此，筆算得以發展。同時，畫式記號「|」的使用，使得單一籌式的左側空間得以被利用，進而如本文所述，逐漸發展出代表不同意義的新表示法。再者，筆算也促進了外加符號與記號的便利性，使得籌式可與文字相結合，文字脈絡中表示除法的運算程序，可被轉移記載至籌式「｜」的左右側，而後固定於左側，最後，和算家籌式中帶程序性的「四除」，成為數學物件「四」，且可再將此數字置換成抽象的符號，終形成具現代性的分數（式），使得分式符號得以完備。

[22]這裡筆者以一現代例子作類比，例如以計算機執行除法運算固然便利，然而，計算機並無法表示出分數，更遑論促進分數概念或符號的發展與學習。

再從前述分式表徵的發展歷程來看，和算家的分式概念具「程序」與「物件」的二元特色，且操作性的程序面向先於結構性的物件面向，他們透過對「式與數」的除法操作，最終發展出分式符號與分式概念，並將分式視為一數學物件，可進一步對其進行操作與運算。再者，後期和算家使用成熟的分式符號「乙｜甲」之餘，偶爾仍會混雜地使用了較不成熟的符號（例如：乙‖甲，其中的「‖」被用來表示籌式中的 2，亦即它尚有表示數字 2 之意，而非單純作為畫分分子與分母的符號。同時，其左邊的乙表示的是分母，右邊的甲，表示的是分子，因此，該籌式符號之意，即為現代分式符號裡的 $\frac{2\text{甲}}{\text{乙}}$ ）或具程序操作的表徵，例如以「$\substack{\text{乙}\\\text{除}}$|甲」來表示 $\frac{\text{甲}}{\text{乙}}$ ，這恰反應出分式概念對某些和算家而言，具有「程序－物件」二元性同時存在的特色，分式符號一方面表徵了數學物件，也表徵涉及了乘除法的程序操作或演算法，這正呼應了 Sfard（1991）有關數學概念二元性的觀點與論述。

此外，和算的分式符號發展，除了可作為印證 Sfard 對於數學概念「程序─物件」二元性之論述的歷史證據外，和算分式發展的過程，亦可佐證 Sfard 的論點：透過具體操作可將之內化成概念操作，進而物化成數學物件，得以進行運算操作，在此，筆者以一個簡單的一般性例子進行說明。早期和算文本的術文中，出現的演算法「置甲，四除之，合問」，代表著利用算籌或筆算，透過具體的「置甲」以及「四除」等操作，可得所求。到了十七世紀初期，上述演算與操作，開始被濃縮成「四除｜甲」之類的分式表徵，象徵著原本的演算法已逐漸被內化成概念上的操作，意即以符號「四除｜甲」濃縮並內化了原欲執行的「將甲除以四」之運算，而不再進行實際操作或提及操作上的細節，但它仍帶有程序操作的面向。一直到十八世紀中期，「點竄法則」的出現象徵著分式符號與相關運算法則已發展成熟，這也代表和算家眼中的「置甲，四除之」，已完全從程序性的具體操作，物化成「四｜甲」之類的數學物件－分數（式），並可再將它置於新的演算法脈絡裡，對此數學物件進行運算或操作。換言之，透過對數或式進行動態而具體的運算與操作，最終形成了靜態的概念結構關係與新數學物件－分數（式），乘除運算相關的演算法，被物化成分式符號後，這些分式亦再成為新演算法的程序裡所操作的數學物件。[23]

儘管傍書法發展至點竄分式符號的過程中，出現了各式各樣的表徵，不過，有馬賴僮公開了點竄定則之後，此表示法也為關流與一般和算家所接受。從另一個角度來看，許多十八世紀的和算著作，其刊刻或成書時間乃至抄寫者皆不詳，但數學家慣用的符號系統，特別是和算家對於「分式」符號的使用情況，就像筆跡或者慣用詞語一般，可作為判定作者、抄寫者或者成書時期的重要依據。

例如，某書中所使用的是較不成熟的分式符號，或者可使用卻未使用分式符號，我們當可

[23]事實上，和算裡的術文（演算法）發展，同樣具有類似的特色，不過礙於篇幅與主題，不在此多作說明。

推定成書時間應為 1740 年代之前，或該數學家尚未習得此符號。倘若書中使用了較成熟的分式符號，那麼此書的成書年代當可後推，或可推定該版本非早期和算家的手稿，亦可能是後代數學家的傳抄版。例如，從徐澤林（2009）《和算選粹補編》一書所收錄的《久留島極數》來看，「解義」裡所用的成熟分式符號，與久留島義太慣用的符號並不一致，且久留島義太其它著作並不使用「解義」一詞，因此可推斷應非久留島義太本人所寫，可能為後世傳抄版或是後人的諺解版。而現存的《久留島先生答術之論》一書中，同樣使用了成熟的分式符號，不過此書署名為安島直圓於 1773 年所編寫的版本，這也佐證了後人在抄寫過程中，可能修改了原書中所用的符號，改用較成熟的符號。[24]

又如建部賢弘的《圓理弧背術》一書，由於該書屬秘傳而未刊刻，故成書年代不詳，一方面日本學士院（1956）主編的《明治前日本數學史》認為此書是建部賢弘作品，但徐澤林則指出此書的作者問題，是和算史上無法考證的謎團（徐澤林，2013）。不過，若據書中署名建部不休撰，以及關流和算家本多利明（Honda Rimei，1743-1821）於該書的書誌中所述，此書原作者應為建部無誤（徐澤林，2013）。但筆者考察了目前可及的版本後發現，該書中使用了「四｜矢」等「點竄」式的成熟分式符號（如圖 12 所示），這裡衍生兩種可能性，其一，此版本為建部弟子傳抄本，傳抄者增修了建部賢弘原書中的符號，並使用了十八世紀中後期和算家慣用的符號。其二，倘若此版本真出於建部之筆，或傳抄者未增改書中的符號，那麼將傍書法推廣至可表示分式之功，建部賢弘應居其中。特別是松永良弼 1739 年的《方圓算經》，尚未出現完備的分式符號，而建部賢弘歿於 1739 年，若此版《圓理弧背術》的確為建部賢弘手稿，那麼和算分式符號的發明者，應是建部賢弘才是，這也推翻了過去數學史界的定論。

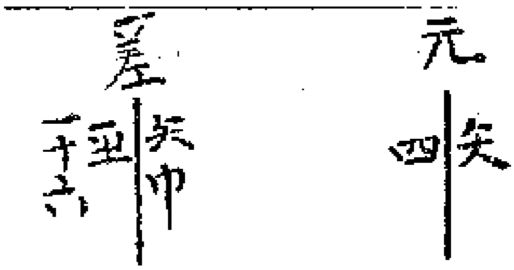


圖 12　建部賢弘《圓理綴術－圓理弧背術》書中的符號。引自” Japanese Mathematics in the Edo Period 1600-1868: A study of the works of Seki Takakazu (?-1708) and Takebe Katahiro (1664-1739) (p. 289),” by H. Annick, 2010, Birkhäuser: Basel, CH.

另一方面，Ogawa（2001）引松永良弼的《圓中三原適等》一書中所使用的分式符號（如圖 13 所示），說明松永良弼將關孝和的傍書法推廣至可以表示分式的「點竄術」。不過，事實上《圓中三原適等》的刊刻時間不詳，且據徐澤林（2008）所述，他認為《圓中三原適等》應

[24] 參考的版本主要為東北大學附屬圖書館收藏版本：http://dbr.library.tohoku.ac.jp/infolib/meta_pub/G0000002wasan_4100001787

是松永良弼於享保元年至十年間的作品，即約是 1715~1725 年間的著作。然而，此圖中出現的成熟分式符號與松永早年使用的分式表徵不並相符，再者，此書中多次出現了「形」、[25]「布算」等字，並且大量使用了「ᨀ、⊖」等符號皆非松永良弼其它著作中具有的特色，加上圖十三中的分式符號，是出現在該書的「解義」裡，但觀松永其它的著作，皆不曾出現「解義」一詞，其用詞皆為「解曰」。綜合上述原因，筆者認為此版本可能是後人傳抄版，而非出自松永之筆，若以此論斷松永發明了分式符號，有失偏頗。

圖 13　松永良弼《圓中三原適等》書中的符號。引自"A review of the history of Japanese mathematics," by T. Ogawa, 2001, *Revue d'histoire des mathématiques*, *7*(1), p.140.

總之，筆者考察松永良弼現存的著作後發現，在他的諸多著作中，僅著作時間不明的《方圓雜算》一書，真正使用了成熟的分式符號，其它著作則否。過去學者引以為證，說明松永為「點竄」發明者的相關著作，事實上要不是尚未發展出完備的分式符號，不然就是非出自松永良弼之筆。

柒、結論

在和算數學文化之下，題與術是算學研究的主要核心，其中的術文除了表示某些公式之外，一般為程序性的機械演算法。早期尚未發展出成熟的分式符號時，和算家的分式概念皆蘊含了與「除法」相關的程序操作，並以文字來描述除法操作流程，意即和算家的分式概念為一運算程序，並偏向操作性面向。

和算分式表徵的發展過程中，共出現了五種表示分（數）式的方式：1.以文字記錄乘除法操作、2.分開記錄被除式與除式、3.將除法運算記於｜右邊、4.將除法運算記於｜左邊、5.籌式符號「｜」的左右側皆為式或數，左側作為分母、右側作為分子，「乙|甲」形成一完備的分式符號。由此來看，和算分式相關表徵與符號的發展，主要從具程序與操作特色的文字敘述與除法，過渡至概念、結構面向的數學物件－分式。

和算家的符號系統雖源於中算的天元術，然與和算同一時期的中算家們，他們習慣於借根

25書中常將「形」置於傍書式之前。

方或天元術的代數表示法，前者是利用文字形式表示未知數的負冪次，後者，則是利用常數項下方一列的位置來表示負一次方。而天元術受空間相對位置的限制，乃至計算方法與工具─籌算與算籌─的限制，阻礙了新符號的發展。加上，中算家所處理的問題，並不涉及太多未知數與符號，對於符號的發展與分式籌式而言，並沒有直接的使用需求，因此，中算並未發展出分式符號系統。然而，和算家所處理的問題較為複雜，且涉及較多的未知數，同時，他們傾向以抽象的方式解決問題，因此，帶來了符號改革上的需求。傍書法的發明，解放了天元術與籌算的位置限制，加以筆算系統的使用，便於增修新符號與記號於舊有籌式，進而促進了分式符號的發展與最終的完備。

再從十八世紀初期重要和算家的符號使用來看，分式表徵與符號的發展歷程並非線性，過渡時期出現了多元的表徵方式，同時，有些文本中的表示法並不一致，多種符號或表示法並存。例如，個性上不拘而散慢的久留島義太，他在符號使用上也紊亂不統一，甚至《久氏弧背草》一書出現多種表徵共存的情況。此外，該書編排與體例上也較隨意，再再反應出數學著述的特色與數學家本身的個性有關。

另一方面，從松永良弼早期的著作來看，並無分式的使用，主要以文字描述除法、另記實與法或另記分母等方式來表示分式。慢慢地，他的著作中也開始利用籌式符號「|」的左側記錄除的程序，然至 1739 年《方圓算經》其仍未發展出完備的分式符號。歷經上述過渡時期，一直到松永良弼《方圓雜算》一書，才出現「$\begin{array}{c|c}\text{弦}&\text{矢}\\\text{一}&\text{巾}\end{array}$」之類較為成熟的分式符號。至此，籌式符號「|」的左右皆為「數」與「式」等「數學物件」，同時「乙｜甲」亦形成一個新數學物件，代表現代意義下的分式「$\frac{\text{甲}}{\text{乙}}$」，並可以對此符號進行加、減、乘等運算與操作。此時，分式已被視為一數學物件，而非帶有除法面向的程序操作過程。

特別地，部份和算家在使用成熟的分式符號「乙｜甲」之餘，偶爾仍會混雜地使用了較不成熟的符號或具程序操作性的表徵（如：$\begin{array}{c}\text{乙}\\\text{除}\end{array}$｜甲），恰反應出分式概念具有「操作程序－結構物件」二元性並存的特色，這也呼應 Sfard 提出數學概念二元性的觀點。再就和算分式符號與概念的發展來看，亦是操作性的程序面向先於結構性的物件面向。並且，透過具體的乘除法操作與運算，動態的演算法被內化成概念操作，最後物化成數學物件－分式，得以進行運算操作。

最後，筆者也認為，釐清了和算家在分式符號使用上的流變後，利用符號表徵，特別是分式符號的使用情況輔以書中的「慣用詞語」，對於判定文本作者、抄寫者或者成書時期，皆可以當成一項重要的依據。使用了不成熟分式符號的和算文本，應屬於該和算家的早期著作，又一些使用了完備分式符號的和算文本，應當是後代和算家的傳抄本，而非原作者之手稿才是。本研究在引入概念發展、認知與符號演化的觀點，並重新考察關孝和傍書法至十八世紀點竄之間，發展出的各種分式符號表徵後，對過去和算史相關論述，提出新的觀點與看法。

參考文獻

日本學士院（主編）（1956）。**明治前日本數學史**。東京：岩波書店。

林建宏（2013）。**松永良弼《方圓雜算》之內容分析**（未出版碩士論文）。國立臺灣師範大學，臺北市。

林倉億（2001），**中國清代 1723~1820 年間的借根方與天元術**（未出版碩士論文）。國立臺灣師範大學，臺北市。

徐澤林（2008）。**和算選粹**。北京：科學出版社。

徐澤林（2009）。**和算選粹補編**。北京：科學出版社。

徐澤林（2013）。**和算中源-和算算法及其中算源流**。上海交通：大學出版社。

郭書春、李兆華（主編）（2010）。**中國科學技術史，數學卷**。北京：科學出版社。

馮立昇（2009）。**中日數學關係史**。山東：山東教育出版社。

蘇俊鴻（2013），**中國近代數學發展（1607-1905）：一個數學社會史的進路**（未出版碩士論文）。國立臺灣師範大學，臺北市。

Annick, H. (2010).*Japanese Mathematics in the Edo Period 1600-1868: A study of the works of Seki Takakazu (?-1708) and Takebe Katahiro (1664-1739)*. Birkhäuser: Basel, CH.

Chikara, S. (1999).The French and Japanese schools of algebra in the seventeenth century: A comparative study.*Historia Scientiarum*, *9*(1), 17-26.

Ogawa, T. (2001). A review of the history of Japanese mathematics. *Revue d'histoire des mathématiques*, *7*(1), 137-155.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin.*Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36. doi: 10.1007/BF00302715